دیفرانسیل

Subject:

Year: Month: Date:

فرمول های مشتق گیری

① مشتق عدد ثابت همیشه برابر ۰ می باشد

$f(x)=a \rightarrow f'(x)=0$

مثال: $f(x)=7 \rightarrow f'(x)=0$

② $f(x)=ax \rightarrow f'(x)=a$

مثال: $f(x)=4x \rightarrow f'(x)=4$

③ $f(x)=x^n \rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$

$f(x)=x^4 \rightarrow f'(x)=4x^3$

④ $f(x)=g(x)\pm h(x) \rightarrow f'(x)=g'(x)\mp h'(x)$

$f(a)=4x^2+2x \rightarrow f'(x)=8x+2$

⑤ $f(x)=\sin x \rightarrow f'(x)=\cos x$

⑥ $f(x)=\sin u \rightarrow f'(x)=u'\cos u$

$f(x)=\sin 7x^3 \rightarrow f'(x)=21x^2\cos 7x^3$

⑦ $f(x)=\cos x \rightarrow f'(x)=-\sin x$

⑧ $f(x)=\cos u \rightarrow f'(x)=-u\sin u$

$f(x)=\cos 4x^2 \rightarrow f'(x)=-8x\sin 4x^2$

⑨ $f(x)=\tan x \rightarrow f'(x)=(1+\tan^2 x)$

⑩ $f(x)=\tan u \rightarrow f'(x)=u'(1+\tan^2 u)$

$f(x)=\tan 12x \rightarrow f'(x)=12(1+\tan^2 12x)$

⑪ $f(x)=\cot x \rightarrow f'(x)=-(1+\cot^2 x)$

⑫ $f(x)=\cot u \rightarrow f'(x)=-u'(1+\cot^2 x)$

$f(x)=\cot 7x^5 \rightarrow f'(x)=-35x^4(1+\cot^2 7x^5)$

(۱۳) $f(x)=g(x)\cdot h(x) \longrightarrow f'(x)=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)$

$f(x)=\sin x \times 5x^2 \longrightarrow f'(x)=\cos x\times 5x^2+\sin x\times 10x$

(۱۴) $f(x)=e^x \longrightarrow f'(x)=e^x$

(۱۵) $f(x)=e^u \longrightarrow f'(x)=u'e^u$

$f(x)=e^{7x} \longrightarrow f'(x)=7e^{7x}$

(۱۶) $f(x)=\ln x \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$

(۱۷) $f(x)=\ln u \longrightarrow f'(x)=\frac{u'}{u}$

$f(x)=\ln 5x^2 \longrightarrow f'(x)=\frac{10x}{5x^2}$

(۱۸) $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \longrightarrow f'(x)=\frac{g'(x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h'(x)}{(h(x))^2}$

$f(x)=\frac{5x^2}{\sin x} \longrightarrow f'(x)=\frac{10x\cdot\sin x-5x^2\cdot\cos x}{\sin^2 x}$

۲۸,۷,۱۷

تعریف معادله ی دیفرانسیل معمولی: هر معادله که شامل یک یا چند مشتق از تابع مجهول باشد معادله ی دیفرانسیل نامیده می شود. اگر تابع مجهول تابع یک متغیره باشد معادله را معادله دیفرانسیل معمولی و در غیر این صورت معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می گوییم.

مثال: معادله های زیر معادلات دیفرانسیل هستند:

۱) $f'''(x)+f'(x)=x\sin x$

۲) $y'+2y=5x \,,\; y=f(x)$

۳) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \,,\; y=f(x,y)$

روند

امتحانی

• **تعریف مرتبه و درجه‌ی یک معادله‌ی دیفرانسیل:** بالاترین مرتبه‌ی مشتق موجود در معادله را مرتبه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل می‌گویند و به بیشترین توان بالاترین مرتبه درجه‌ی معادله دیفرانسیل گفته می‌شود.

امتحانی

• **مثال:** مرتبه و درجه‌ی معادله دیفرانسیل زیر را بدست بیاورید.

1) $xy' + 2y = 0$ مرتبه 1 درجه 1

2) $y' = x^3 y'' + \sin x$ مرتبه 2 درجه 1

3) $(y'')^2 + 3y' = 5x - 3$ مرتبه 2 درجه 2

تشکیل معادلات به کمک جواب عمومی:

برای اینکار از تابع اولیه $F(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$، n بار مشتق می‌گیریم لذا $n+1$ رابطه حاصل می‌گردد در این $n+1$ رابطه پارامترهای $c_1, c_2, \dots, c_n$ را حذف می‌نماییم رابطه‌ای که به وجود می‌آید معادله‌ی دیفرانسیل نظیر F می‌باشد مشروط بر آنکه بالاترین مرتبه‌ی مشتق حذف نشود

امتحانی

• **مثال:** معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به عبارت زیر را بدست بیاورید.

$$F(x, y, c_1, c_2) = y - c_1 \cos 2x - c_2 \sin 2x = 0$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

$$y' = c_1 \cdot -2 \sin 2x + c_2 \cdot 2 \cos 2x$$

$$y'' = -2c_1 \cdot 2\cos 2x + 2c_2 \cdot -2 \sin 2x$$

$$= \underline{-4 c_1 \cdot \cos 2x - 4 c_2 \cdot \sin 2x}$$

$$-4(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

$$\Rightarrow \boxed{y'' = -4y}$$

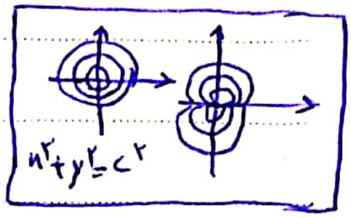
Subject:

Year: Month: Date:

* امتحانی *

• معادله‌ی دیفرانسیل دسته دوایری به مرکز واقع بر محور y ها و مماس بر محور x ها را بنویسید

$$x^2+(y-c)^2=c^2$$



$$2x+2(y')(y-c)=0$$

$$2y'(y-c)=-2x$$

$$(y-c)=\frac{-2x}{2y'} \Rightarrow y-c=\frac{-x}{y'}$$

$$-c=\frac{-x}{y'}-y \Rightarrow \boxed{c=\frac{x}{y'}+y}$$

$$x^2+\left(y-\left(\frac{x}{y'}+y\right)\right)^2=\left(\frac{x}{y'}+y\right)^2$$

$$x^2+y^2+\cancel{\left(\frac{x}{y'}+y\right)^2}-y\left(\frac{x}{y'}+y\right)=\cancel{\left(\frac{x}{y'}+y\right)^2}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-\frac{xy}{y'}-y^2=0 \Rightarrow x^2-\frac{xy}{y'}=0$$

حل معادلات مرتبه‌ی اول :

فرم کلی این دسته از معادلات به صورت $y'=\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ می باشد مانند : $y'=\frac{x-y^2}{x+3y}$

ممکن است نتوان تمام این معادلات را حل نمود اما با تقسیم بندی که ارائه می شود می توانیم گونه هایی از معادلات را حل بنماییم.

Subject:
Year: Month: Date:

معادلات با متغیرهای جدا شدنی :

به این صورت می باشد که معادلهٔ $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ را می توانیم به صورت $y'=\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ نمایش داده و به صورتی که در ادامه می گوییم حل بنماییم.

$$y'=\frac{x^2 \sec y}{2xy} \qquad \sec y=\frac{1}{\cos y} \qquad \mathrm{co}\sec y=\frac{1}{\sin y}$$

اگر به این صورت باشد در این صورت داریم :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2\sec y}{2xy} \Rightarrow (2xy)dy=(x^2\sec y)dx \Rightarrow \underbrace{2xy}_{Q(x,y)}dy-\underbrace{(x^2\sec y)}_{P(x,y)}dx=0$$

اگر بتوان این دسته از معادلات را با ضرب عباراتی خاص و یا تقسیم بر عبارتی خاص و یا تغییر متغیر معادله را به صورت $M(x)dx+N(y)dy=0$ در آورد در این صورت متغیرها در این معادله جدا شدند و لذا با یک انتگرال گیری ساده می توان آن را حل نمود.

مثال : معادلهٔ مثال قبلی را حل کنید.

$$y'=\frac{x^2\sec y}{2xy}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2\sec y}{2xy} \Rightarrow 2xy\,dy=x^2\sec y\,dx \Rightarrow \frac{x^2\sec y\,dx-2xy\,dy=0}{\sec \cdot 2x}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{2x}}dx-\frac{y}{\underset{\frac{1}{\cos y}}{\sec y}}dy=0 \Rightarrow \frac{x}{2}dx-y\cos y\,dy=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int\frac{x}{2}dx}_{\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{4}}-\int \overset{f(x)}{y}\,\overset{g(x)}{\cos y}\,dy=\int 0 = C$$

Subject:

Year: Month: Date:

$f(x)$	$g(x)$
y	$\cos y$
1	$\sin y$
0	$-\cos y$

$y\sin y-(-\cos y) \Rightarrow y\sin y+\cos y$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2}-y\sin y-\cos y=C$$

$y'+x+y=0$

مثال: معادله‌ی زیر را حل بنمایید. *امتحانی*

$dx\left(\frac{dy}{dx}+v=0\right)$

$$x+y=v$$
$$dv=dx+dy$$
$$dy=dv-dx$$

$dy+v\,dx=0$

$dv-dx+v\,dx=0$

$$\Rightarrow \frac{dv+(v-1)dx=0}{v-1} \Rightarrow \int\frac{dv}{v-1}+\int\frac{dx}{x}=\int\frac{0}{C}$$

$\boxed{\ln|x-1| \Rightarrow \frac{1}{x-1}}$ $\quad \ln|v-1|$

$$\Rightarrow \ln|v-1|+x=C$$

x,y

معادلات همگن:

یادآوری: عبارت $f(x,y)$ برحسب x,y درصورتی همگن است که هرجمله‌ی آن مجموع توان‌های x و y ثابت باشد

مانند:

$$x^3+y^3=x^2+y^2$$

FARHANG

Subject:
Year: Month: Date:

تعریف معادله همگن:

معادله ی $y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ را معادله همگن گوییم در صورتی که f و g هر دو همگن و هم درجه باشند.

مثال: $y' = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$

* نکته * اگر در f و g، x را λx و y را به λy تبدیل کنیم و مقدار y' تغییر نکند آنگاه معادله همگن می باشد.

مثال:

$$y' = \frac{x + y\sin\frac{y}{x}}{x + xe^{\frac{x}{y}}} \Rightarrow \frac{\lambda x + \lambda y \sin\frac{\lambda y}{\lambda x}}{\lambda x + \lambda x e^{\frac{\lambda x}{\lambda y}}} = \frac{\lambda(x + y\sin\frac{y}{x})}{\lambda(x + xe^{\frac{x}{y}})} = y'$$

حل معادله ی همگن:

هر معادله ی همگن با تغییر متغیر حل می شود.

$$\begin{cases} y = vx \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow dy = v\,dx + dv\,x$$

یا

$$\begin{cases} x = uy \\ u = \frac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow dx = u\,dy + du\,y$$

FARHANG

Subject:
Year: Month: Date:

* امتحانی *

مثال: معادله‌ی زیر را حل بنمایید:

$$y' = \frac{x^2+y^2}{2xy}$$

$$\frac{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2}{2\lambda x\lambda y} = \frac{\lambda^2x^2+\lambda^2y^2}{2\lambda^2xy} = \frac{\cancel{\lambda^2}(x^2+y^2)}{2\cancel{\lambda^2}xy} = y'$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\,dx + dv\,x}{dx} = \frac{x^2+(vx)^2}{2x(vx)} = \frac{x^2(1+v^2)}{2x^2v} = \frac{1+v^2}{2v}$$

$$= 2v(v\,dx+dv\,x) = dx(1+v^2)$$

$$\Rightarrow 2v^2dx + 2vx\,dv = dx+v^2dx$$

$$\Rightarrow v^2dx - dx + 2vx\,dv = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(v^2-1)\,dx + 2vx\,dv = 0}{(v^2-1).(x)}$$

$$\underbrace{\int\frac{dx}{x}}_{\ln|x|} + \underbrace{\int\frac{2v}{v^2-1}dv}_{\ln|v^2-1|} = \underbrace{\int 0}_{c} \Rightarrow \ln|x| + \ln|(\tfrac{y}{x})^2-1| = c$$

$$\int\frac{2v}{v^2-1} = \int\frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|v^2-1|$$

$v^2-1 = u$

$2v\,dv = du$

$$dv = \frac{du}{2u}$$

Subject:

Year: Month: Date:

معادلات با ضرایب خطی:

فرم کلی این گروه دسته از معادلات به صورت $(ax+by+c)dx+(a'x+b'y+c')dy=0$ می باشد مانند معادلات زیر

الف) $(-2x-2y-1)dx+(x+y)dy=0$

ب) $(x-y+1)dx+(-2x-y-1)dy=0$

ج) $(x+y)dx+(2x-y)dy=0$

برای حل کردن این دسته از معادلات اگر $c=c'=0$ می باشد. آنگاه معادله به یک معادله ی همگن و قابل حل تبدیل می شود. مانند مثال ج

اگر c یا c' حداقل یکی صفر نباشد در این صورت دو حالت در نظر می گیریم.

الف) $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$

در این صورت دستگاه $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ و به جواب $x=\alpha$ و $y=\beta$ می رسیم و با تغییر متغیر زیر معادله به یک معادله ی همگن تبدیل شده و حل می شود

$x=X+\alpha \qquad dx=dX$

$y=Y+\beta \qquad dy=dY$

مثال: معادله ی زیر را حل نمایید.

$(x-y+1)dx+(2x-y-1)dy=0$

$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{1}{2} \qquad \dfrac{b}{b'}=\dfrac{-1}{-1}=1 \qquad \dfrac{1}{2}\neq 1$

$-2\times\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-2x}+2y-2=0 \\ \cancel{2x}-y-1=0 \end{cases} \qquad y-3=0 \qquad \boxed{y=3}$

$\longrightarrow x-3+1=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$

Subject:
Year: Month: Date:

$\alpha = 2 \qquad x = X + 2$

$\beta = 3 \qquad y + Y + 3$

$$\big((X+2) - (Y+3) + 1\big)\,dX + \big(\overbrace{2(X+2)}^{2X+4} - \overbrace{(Y+3)}^{-Y-3} + 1\big)\,dY$$

$$(X - Y + \overbrace{2 - 3}^{-1+1=0})\,dX + (2X - Y)\,dY$$

$$(X - Y)\,dX = -(2X - Y)\,dY$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{-2X + Y} \qquad Y = vX \rightarrow dY = dv\,X + v\,dX$$

$$\frac{dv\,X + v\,dX}{dX} = \frac{\overbrace{X - vX}^{X(1-v)}}{\underbrace{-2X + vX}_{X(-2+v)}} \qquad \frac{X\,dv + v\,dX}{dX} = \frac{1 - v}{-2 + v}$$

$$\Rightarrow (1-v)\,dX\,(X\,dv + v\,dX)(v-2)$$

$$(1-v)\,dX = (v-2)X\,dv + (v^2 - 2v)\,dX$$

$$(1-v) - (v^2 - 2v)\,dX = (v-2)X\,dv$$

$$\cancel{(-v^2 + v + 1)}\,dX = (v-2)X\,dv$$

$$\cancel{(-v^2+v+1)X}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{v-2}{(-v^2+v+1)}\,dv$$

$\downarrow$

$\ln|x|$

$$\hookrightarrow \int \frac{v-1-1}{-v^2+v+1}\,dv = \int \frac{v-1}{-v^2+v+1}\,dv - \int \frac{dv}{-v^2+v+1}$$

$$-v^2 + v + 1 = u$$
$$(-2v + 1)\,dv = du$$
$$dv = \frac{du}{-2v+1} = -\frac{1}{2}\frac{du}{v-1}$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{\cancel{v-1}}{u}\,\frac{du}{\cancel{v-1}} - \int \frac{dv}{-v^2+v+1} \Rightarrow = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}(\ln|u|)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\ln|-v^2+v-1|\right)$$

ب) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$

در این صورت با تغییر متغیر $z = \alpha x + b y$ و جایگذاری به جای y یا x در معادله می توان متغیرها را جدا شود و سپس آن را حل کرد.

• معادله ی زیر را حل بنمایید.

$$(\underset{a}{2x}+\underset{b}{2y}-1)\,dx+(\underset{a'}{x}+\underset{b'}{y})\,dy=0$$

$$\frac{2}{1}=\frac{2}{1}=2=k$$

$$z=x+y \rightarrow dz=dx+dy$$

$$\hookrightarrow (2z-1)\,dx+z(dz-dx)=0$$

$$(2z-1)\,dx-z\,dx+z\,dz=0$$

$$(2z-z-1)\,dx+z\,dz=0$$

$$\frac{(z-1)\,dx+z\,dz=0}{z-1}$$

$$\underbrace{\int dx}_{x}+\int\frac{z}{z-1}\,dz=\int 0$$

$$\int\frac{z-1+1}{z-1}\,dz=\underbrace{\int\frac{z-1}{z-1}\,dz}_{z}+\underbrace{\int\frac{1}{z-1}\,dz}_{\ln|z-1|}$$

$$\Rightarrow x+z+\ln|z-1|=c$$

$$\Rightarrow x+(x+y)+\ln|x+y-1|=c$$

تعریف دیفرانسیل کامل: هرگاه داشته باشیم $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ آنگاه می گوییم دیفرانسیل کامل داریم و این مقدار از رابطه ی زیر بدست می آید.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

یا

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

Subject:

Year: Month: Date:

نشان دهید تابع زیر دیفرانسیل کامل است سپس df را بدست بیاورید:

$$\underbrace{f(x,y)}_{z} = e^{xy} - c \qquad \boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y e^{xy} - 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \times e^{xy} + y \times x e^{xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x e^{xy} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = 1 \times e^{xy} + x \times y\, e^{xy}$$

$$df = y e^{xy} dx + x e^{xy} dy$$

تعریف معادله دیفرانسیل کامل: معادله دیفرانسیلی است که دیفرانسیل کامل یک تابع ضمنی باشد یعنی اگر $p(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ کامل باشد آنگاه $f(x,y) = c$ به طوری که $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$ و $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ وجود دارد

جواب عمومی این معادله باشد. مثلاً معادله‌ی $y e^{xy} dx + x e^{xy} dy = 0$ یک معادله‌ی کامل است لذا تابع ضمنی $e^{xy} = c$ جواب عمومی این معادله می‌باشد.

حل معادله‌ی کامل: $f = \int p\,dx + Q(y) = c$ یا $f = \int p\,dx + Q(y) = 0$ که در حالت دوم ثابت c را در داخل $Q(y)$ قرار می‌دهیم.

برای ادامه‌ی کار فرض می‌کنیم که

$$S(x,y) = \int p\,dx \Rightarrow f = S(x,y) + Q(y) = 0 \quad *$$

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{Q} = \frac{\partial S}{\partial y} + Q'(y) \qquad Q = \frac{\partial S}{\partial y} = Q'y$$

و با بدست آوردن Q_y از رابطه‌ی بالا و با انتگرال گیری مقدار Q_y بدست می‌آید و با قرار دادن در رابطه‌ی * جواب عمومی معادله بدست می‌آید

مثال: معادله‌ی زیر را در صورت کامل بودن حل بنمایید:

$$\underbrace{x\sin y}_{P}\,dx+\Big(\underbrace{\frac{x^2}{2}\cos y+y}_{Q}\Big)\,dy=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\overset{P}{\frac{\partial f}{\partial x}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\overset{Q}{\frac{\partial f}{\partial y}}\right) \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow x\cos y=\cos y\,\frac{2x}{2}$$

$$f=\int x\sin y\,dx+Q(y)=0$$

$$f=\underbrace{\frac{x^2}{2}\sin y}_{S(x,y)}+Q(y)=0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^2}{2}\cos y+Q'(y)=0$$

$$\left(\frac{x^2}{2}\cos y+y\right)=\frac{x^2}{2}\cos y+Q'(y)\Rightarrow Q'(y)=y$$

$$\Rightarrow Q(y)=\int y\,dy\Rightarrow Q(y)=\frac{y^2}{2}+C$$

$$f=S(x,y)+Q(y)\Rightarrow f=\frac{x^2}{2}\sin y+\frac{y^2}{2}+C$$

Subject:
Year: Month: Date:

معادله‌ی ناقص و عامل انتگرال ساز:

اگر معادله‌ی $P\,dx+Q\,dy=0$ کامل نباشد آنگاه می‌گوییم ناقص است

اگر معادله‌ای غیر کامل باشد و در عبارتی مانند λ ضرب شود و آن معادله کامل گردد در این صورت λ را عامل انتگرال ساز یا فاکتور انتگرال می‌نامیم.

فاکتور انتگرال را با استفاده از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم

$$\lambda = e^{\int f(x)\,dx} \longrightarrow f(x)=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

یا

$$\lambda = e^{\int g(y)\,dy} \longrightarrow g(y)=-\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

* امتحانی *

- مثال: معادله‌ی زیر را با فاکتور انتگرال حل کنید.

$$\sin y\,dx+\frac{x}{2}\cos y\,dy=0$$

$$\lambda = e^{\int f(x)\,dx}$$

$$f(x)=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{1}{\frac{x}{2}\cancel{\cos y}}\left(\cancel{\cos y}-\frac{1}{2}\cancel{\cos y}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x} \qquad f(x)=\frac{1}{x}$$

$$\lambda = e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}\Rightarrow \lambda = x$$

$$x\sin y\,dx+\frac{x^2}{2}\cos y\,dy=0$$

معادله برنولی: فرم کلی این دسته از معادلات به صورت $a(x)y' + a(x)y = y^n f(x)$ می باشد و این معادلات با تغییر متغیر $v = y^{1-n}$ و جاگذاری به جای y به یک معادله خطی و قابل حل تبدیل می شود

$$v = y^{1-n} \Rightarrow v' = (1-n)y' \, y^{(1-n-1)} = (1-n)\, y' \, y^{-n}$$

مثال: معادله ی زیر را حل کنید

$$y' - y = \underbrace{x}_{f(x)} y^5 \qquad n = 5$$

$$y' = xy^5 + y$$

$$v = y^{1-5} = y^{-4} \Rightarrow v' = -4\, y' \, y^{-5}$$

$$y' = \frac{v'}{-4y^{-5}} \Rightarrow xy^5 + y = \frac{v'}{-4y^{-5}}$$

$$xy^5 + y = -\frac{1}{4}(v' + y^5)$$

$$\Rightarrow -4(xy^5 + y) = v' + y^5 \Rightarrow \frac{v'}{-4y^5} - y = xy^5$$

$$\Rightarrow v' + 4\underbrace{y^{-4}}_{v} = -4x \Rightarrow v' + 4v = -4x$$ خطی و قابل حل

معادله‌ی کلرو:

فرم کلی این دسته از معادلات $y = xy' + f(y')$ می باشد

و برای حل این دسته از معادلات از طرفین معادله مشتق میگیریم

و به صورت زیر حل می کنیم

$$y' = y' + xy'' + y''f'(y') = 0 \Rightarrow xy'' + y''f'(y') = 0$$

$$\Rightarrow y''(x + f'(y')) = 0$$

$$\Rightarrow y'' = 0 \longrightarrow y' = \int 0 \, dx = c$$

$$y = \int c \, dx \Rightarrow y = cx + f(c)$$

$$x + f'(y') = 0$$

$$\downarrow$$

$$x = -f'(y') \Rightarrow \begin{cases} x = -f(c) \\ y = x + f(c) \end{cases}$$

امتحانی

* مثال: معادله‌ی زیر معادله کلرو می باشد آن را حل کنید.

$$y = xy' + (y')^2$$

$$y' = 1 \times y' + x \times y'' + 2y''y' = 0 \longrightarrow xy'' + 2y''y' = 0$$

$$\Rightarrow y''(x + 2y') = 0$$

$$y'' = 0 \Rightarrow y' = c \longrightarrow y = \int c \, dx$$

$\Rightarrow y = (cx + c^2)$ جواب عمومی

$$\begin{cases} x = -2c \\ y = cx + c^2 \end{cases} \Rightarrow c = -\frac{x}{2}$$

$$y = -\frac{x}{2} \times x + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 \longrightarrow \frac{-x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = \frac{-x^2}{4}$$

$$\boxed{y = \frac{-x^2}{4}}$$ جواب استثنائی

تبدیل لاپلاس: برای تابع پیوسته یا تکه ای متصل $f(t)$ تبدیل زیر که توسط یک انتگرال تعریف می‌شود که آن را با $L(f(t))$ نمایش می دهیم تبدیل لاپلاس تابع f می باشد

$$F(s) = L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

امتحانی* مثال: تبدیل لاپلاس $f(t) = 1$ را بدست آورید.

$$L(1) = \int_0^\infty e^{-st}\, dt$$

$$-st = u$$
$$-s\,dt = du$$
$$dt = \frac{du}{-s}$$

$$= \int_0^\infty e^u \times \frac{du}{-s} = \frac{-1}{s} \int_0^\infty e^u\, du$$

$$= \frac{-1}{s} e^u = \frac{-1}{s} e^{-st} \Big]_0^\infty \Rightarrow \frac{-1}{s} \frac{1}{e^{st}} \Big]_0^\infty = \frac{-1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$