کاربرد آمار توصیفی در مدیریت ورزشی

تالیف: دکترسیدحسین علوی

استادیار گروه تربیت بدنی دانشکده فنی و حرفه ای محمودآباد دانشگاه فنی و حرفه ای

فصل ۱

آمار توصیفی

4 .1 مقدمه

آمار یک علم مستقل است که جنبه‌های کمی نمودهای اجتماعی را در ارتباط با کیفیت آنها با هم مطالعه می‌کند. روش‌های آماری را می‌توان به دو بخش آمار توصیفی و آمار استنباطی تقسیم نمود. آمار توصیفی، مجموعه‌ای از روش‌ها است که برای گردآوری، توصیف و بیان مقداری اطلاعات مربوط به جامعه‌های مورد مطالعه به کار می‌رود.

آمار استنباطی برای استنباط خصوصیات یک جامعه آماری از روی نتایج یک نمونه که از آن جامعه انتخاب می‌شود، به کار می‌رود. آمار استنباطی این امکان را می‌دهد تا جنبه‌های مورد نظر جامعه‌های بزرگ آماری از روی نمونه‌های کوچک‌تر که نماینده آن جامعه هستند، توصیف شوند.

4 .2 آشنایی با چند مفهوم آماری

مجموعه‌ای از اشیاء یا حوادث که در یک حوزه بحث معین، ویژگی یا ویژگی‌های آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد «**جامعه آماری**» نامیده می‌شود. به‌عنوان مثال، تمام دانش‌آموزانی که در مدرسه راهنمایی سعدی تحصیل می‌کنند، یک جامعه آماری را بوجود می‌آورند.

اندازه‌گیری‌های کمی که ویژگی‌های یک جامعه را توصیف می‌کند« **پارامتر**» نامیده می‌شود.

ویژگی‌های اعضای یک جامعه، که از فردی به فرد دیگر و یا از شئی به شئی دیگر تفاوت دارد «**متغیر**» نامیده می‌شود. میزان قد، وزن، سن، هوش، اضطراب، توانایی خواندن و چاقی نمونه‌ای از متغیرهای موجود در انسان‌هاست.

اطلاعات آماری را می‌توان به دو شیوه سرشماری و نمونه گیری به‌دست آورد.

در سر شماری، برای به دست آوردن اطلاعات آماری، تک تک افراد جامعه آماری را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که اطلاعات حاصل از آن دقیق است؛ اما سرشماری علاوه بر هزینه‌بر بودن،

وقت گیر نیز هست؛ از این رو سعی می شود با استناد به ضرب المثل مشهور «مشت نمونه خروار است» اندازه‌گیری را در بخشی از جامعه که به نمونه معروف است انجام داد.
اندازه‌هایی که از یک نمونه گرفته می‌شود و از آنها برای توصیف ویژگی‌های یک جامعه استفاده می‌گردد **«آماره»** نامیده می‌شود. پارامترهای جامعه از طریق آماره برآورد می‌شوند. به‌عنوان مثال نسبت قد به وزن 80 نفر از دانش آموزان دبستان سعدی « **آماره** » برای برآورد نسبت قد به وزن کل دانش آموزان «**پارامتر**» این دبستان مورد استفاده قرار می‌گیرد.

✓ **خودآزمایی 1**

1- به مجموعه بزرگی از اشیاء که در آن ویژگی یا ویژگی‌های متنوع وجود دارد .... گفته می‌شود؟

1) جامعه 2) پارامتر 3) متغیر 4) آماره

2- به اندازه‌های قد، وزن، سن، هوش .... نامیده می‌شود؟

1) جامعه 2) پارامتر 3) آماره 4) متغیر

3- اندازه‌هایی از یک نمونه، که برای توصیف ویژگی های یک جامعه استفاده می‌شود .... گویند.

1) جامعه 2) آماره 3) پارامتر 4) متغیر

3. 4 آمار پارامتریک و آمارغیر پارامتریک

روش‌های آماری استنباطی که وجود آن‌ها به دانستن یا فرض کردن برخی ازشاخص‌های آماری جامعه بستگی دارد **آمار پارامتریک** نامیده می‌شود که، برای مقیاس فاصله‌ای و مقیاس نسبی به کار می‌روند. در عمل ما همیشه قادر نیستیم اندازه‌های جامعه را پیش‌بینی کنیم و یا مفروضاتی را درباره آن بپذیریم؛ از این رو روش‌هایی توسعه و تدوین یافته‌اند که اساس پذیرش آن‌ها بر پایه مفروضات دقیق و محکم استوار نیست. این روش‌ها را **آمار غیرپارامتریک** نامیده‌اند که البته دقت آنها به مراتب کمتر از روش‌های آماری پارامتریک است. تفاوت دیگر آمار پارامتریک با غیرپارامتریک در نوع مقیاس اندازه‌گیری است که برای جمع‌آوری اطلاعات به کار رفته است. روش‌های آماری پارامتریک ویژه مقیاس‌های اندازه‌گیری کمی و پیوسته و غیر پارامتریک ویژه اطلاعات کیفی است.که برای مقیاس رتبه‌ای و اسمی به کار می‌روند.

✓ خودآزمایی 2

1- کدام گزینه صحیح است.

1) آمار پارامتریک برای مقیاس فاصله‌ای و نسبی بکار می‌رود.

2) آمار پارامتریک برای مقیاس‌های اندازه‌گیری کمی است.

3) آمار غیرپارامتریک برای مقیاس‌های اندازه‌گیری کیفی است.

4) هر سه

2- محاسبات ارزش‌هایی که با مقیاس اندازه‌گیری رتبه‌ای انجام شده باشد، با استفاده از روش‌های آماری .... صورت می‌گیرد.

1) اصولاً مقیاس اندازه‌گیری، ملاک تعیین روش آماری نمی‌باشد.

2) پارامتریک

3) غیرپارامتریک

4) کلیه روش‌های آماری برای این مقیاس قابل استفاده هستند.

4.4 متغیر تصادفی

موضوع یا موضوعاتی که روی یک جامعه یا نمونه، مورد مطالعه قرار می‌گیرد «متغیر تصادفی» نامیده می‌شود.

مثال: اگر در یک مدرسه گروه خونی دانش آموزان را بررسی کنیم متغیر تصادفی گروه خونی دانش‌آموزان است.

انواع متغیرهای تصادفی

متغیرها از نظر این‌که قابل اندازه‌گیری باشند یا نباشند به دو دسته کمی و کیفی تقسیم‌بندی می‌شوند.

1. **متغیرهای کمی :** متغیرهایی هستند که قابل اندازه‌گیری باشند(یعنی می‌توانیم به آن‌ها عدد نسبت دهیم) مانند قد، وزن و . . .
2. **متغیرهای کیفی:** متغیرهایی هستند که قابل اندازه گیری نباشند(یعنی نمی‌توانیم به آن‌ها عدد بدهیم) مانند گروه خونی، جنسیت و . . .

4.5 انواع متغیرهای کمی

متغیری که بتواند اعداد یا ارزش‌هایی را که مشخص کننده وجه معینی از یک مقیاس هستند به خود اختصاص دهد **متغیر گسسته** نامیده می شود؛ به عنوان مثال، جنسیت یک متغیر گسسته است. یک شخص یا مرد است یا زن، اختصاص هر نوع ارزش دیگر بین این دو نوع ارزش امکان پذیر نیست. تعداد بازیکنان یک تیم فوتبال، والیبال، تعداد کشش بارفیکس، دراز نشست و ... یک متغیر گسسته است. همه مقیاس‌های کیفی از نوع گسسته هستند. متغیری که بین دو واحد یا دو نقطه آن، هر نقطه یا ارزشی را بتوان انتخاب کرد **متغیر پیوسته (متصل)** نامیده می‌شود، به عنوان مثال: قد، وزن، طول یا ارتفاع پرش، درصدچاقی بدن نمونه‌هایی از متغیرهای پیوسته در رشته‌های تربیت‌بدنی هستند. همه مقیاس‌های نسبی (صفر مآخذی) و فاصله‌ای از نوع متغیر پیوسته هستند متغیرهای که بدین‌گونه اندازه‌گیری می‌شوند متغیرهای کمی نام دارند.

4.6 حدود متغیر های کمی

اعداد مربوط به متغیرهای کمی دارای دو حد نشانی و حد واقعی هستند.

حد نشانی عبارت است از حدی که شکل ظاهری آن نشان می‌دهد. مثلاً حد نشانی عدد35 همان عدد35 است و **حد واقعی** عبارت است محدوده‌ای که از نیم واحد پایین‌تر تا نیم واحد بالاتر از عدد مورد نظر ادامه دارد.

مثال: حد واقعی نمره 35 عبارت است حد واقعی بالایی 35/5 و حدپایینی34/5 .

مثال: کرانه واقعی بالایی و پایینی 44 ثانیه و یک دهم ثانیه به ترتیب 44/15 و 95 /43 است. توجه کنید که 0/05 واحد به اعداد اضافه می‌کنیم تا کرانه واقعی بالایی و 5 0/0 واحد از آن کم می‌کنیم تا کرانه پایینی بدست آید.

مثال: کرانه واقعی بالایی و پایینی 44 ثانیه و یک صدم ثانیه 44/015و44/095 است. توجه کنید که 0/005 به عدد اضافه و 0/005 از آن کم می‌کنیم تا کرانه واقعی بالایی و پایینی به‌دست آید.

انواع متغیرهای کیفی

متغیرهای کیفی به دو دسته ترتیبی و اسمی دسته بندی می شوند.

1. **متغیرهای کیفی ترتیبی :** متغیرهایی هستند که در آنها نوعی ترتیب طبیعی وجود دارد. مثلاً حروف الفبای فارسی ترتیب دارند و به ترتیب به صورت الف، ب و . . . می‌باشد.
2. **متغیرهای کیفی اسمی :** متغیر کیفی که ترتیبی نباشد، متغیر اسمی می‌باشد. مانند رنگ چشم افراد، گروه خونی، ورزش مورد علاقه و . . .

✓ **خودآزمایی3**

1- حد نشانی نمره 18 کدام است؟

1) 18 2) 18/5 3) 17/5 4) 18/5 - 17/5

2- حد واقعی نمره 15 کدام است؟

1) 15/5 2) 15 3) 15/5 ـ 14/5 4) 14/5

3- متغیرها از نظر اینکه قابل اندازه‌گیری باشند یا نباشند به کدام دو گروه زیر تقسیم می‌شوند؟

1) پیوسته-گسسته 2) گسسته- کیفی 3) پیوسته- کمی 4) کمی- کیفی

4- متغیرهایی که هر نوع عدد (اعشاری یا صحیح) را به آن می‌توان اختصاص داد چیست ؟

1) متغیر کمی گسسته 2) متغیر کیفی ترتیبی

3) متغیر کمی پیوسته 4) متغیر کمی اسمی

5- متغیرهای تصادفی کیفی به کدام دو گروه زیر تقسیم می‌شوند؟

1)ترتیبی-گسسته 2)پیوسته-گسسته 3)اسمی-ترتیبی 4) گسسته-اسمی

6- کدام یک از متغیرهای زیر کیفی است؟

1) طول عمر یک باتری 2) رنگ چشم افراد یک کلاس

3) درجه حرارت 4) میزان آلودگی هوا

7- کدام متغیر(کیفی ترتیبی) است؟

1) گروه خونی 2) جمعیت 3) وزن 4) نوزادی

7 . 4 قاعده سرراست کردن اعداد اعشاری

تصور کنید که می‌خواهیم معدل کسب شده توسط یک فرد را در کارنامه او ثبت کنیم قطعاً نوشتن معدل به صورت 17/645400 مناسب نیست. معمولا برای نوشتن معدل حداکثر از دو رقم اعشار استفاده می شود. برای این کار می توان از روش‌های قطع کردن (بریدن) و گردکردن استفاده نمود. در روش قطع کردن، ارقام بخش اعشاری تا رسیدن به طول مناسب حذف می‌شوند.

گرد کردن نیز بر اساس قاعده زیر انجام می شود:

الف. در صورتی که آخرین مانده اعشاری کمتر از 0/5 باشد آن را حذف می‌کنیم.

مثال: عدد 33/4 پس از گرد کردن به 33 تبدیل می‌شود.

ب. در صورتی که آخرین مانده اعشاری بیشتر از 0/5باشد آنرا حذف می کنیم ولی یک واحد به عدد ما قبل آن اضافه می‌کنیم.

مثال: عدد32/6 پس از گرد کردن به 33 تبدیل می‌شود.

ج. درصورتی که آخرین مانده اعشاری عدد 0/5 باشد چنانچه عدد ما قبل زوج باشد آن را حذف می‌کنیم،

ولی اگر فرد بود آن وقت پس از حذف اعشاری 0/5 یک واحد به عدد ما قبل آن اضافه می‌کنیم.

مثال: عدد34/5 پس از گرد کردن به عدد 34 تبدیل می‌شود.

عدد 33/5 نیز پس از گرد کردن به عدد 34 تبدیل می‌شود. توجه کنید که در این حالت چون رقم ما قبل فرد می‌باشد، قسمت اعشاری حذف و یک واحد به آن اضافه می‌شود.

8. 4 جدول توزیع فراوانی

پس از جمع آوری اطلاعات و دست یافتن به نتایج، پژوهشگر با این مسئله روبه روست که با نتایج حاصله چه نوع فعالیت یا فعالیت‌های انجام دهد؟ اولین کاری که تصویر روشن‌تری از نمره‌های یک کلاس بدست خواهد داد این است که نمره‌ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ(نمره کوچک از پایین) تنظیم‌کند.

1. 8. 4 مراحل تشکیل جدول توزیع فراوانی

دامنه تغییرات

دامنهٔ تغییرات یعنی فاصلهٔ بین بزرگترین و کوچکترین عدد. اگر بزرگترین را با H و کوچکترین داده رابا L و دامنهٔ تغییرات را با R نشان دهیم، دامنه‌ی تغییرات از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$R = (H - L) + \alpha$ یا $R = (X_{max} - X_{min}) + \alpha$

مقدار α برای اعداد اعشاری که بخش اعشاری یک رقمی است 0/1 می‌باشد و برای حالتی که بخش اعشاری دو رقمی است 0/01 می‌باشد و برای سایر اعداد اعشاری از فرآیند مشابهی استفاده می‌شود. مقدار α برای اعداد صحیح برابر یک است.

تذکر: در بعضی کتاب‌ها α را در نظر نمی‌گیرند و دامنه تغییرات را از فرمول زیر به‌دست می‌آورند.

$R = (X_{max} - X_{min})$

اگردامنهٔ تغییرات کوچکتر از20 باشد نیازی به طبقه‌بندی اعداد نیست و از جدول توزیع فراوانی ساده است استفاده می‌کنیم.

مثال: اگر بزرگترین عدد یک توزیع 25 و کوچکترین عدد آن 15 باشد دامنه تغییرات به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

حل:

$R = (H - L) + 1$

$R=(25-15)+1 \Rightarrow R=11$

مثال: اگر بزرگترین عدد یک توزیع 8 /10 و کوچکترین عدد آن 6 /7 باشد دامنه تغییرات آن به صورت محاسبه می‌شود.

$R = (10/8 - 7/6) + 0/1 \Rightarrow R = 3/3$

همان‌طور که قبلاً توضیح داده‌ایم برای اعداد اعشاری یک رقمی، α برابر 1/ 0است.

مثال: اگربزرگترین عدد یک توزیع 25 /20 وکوچکترین عدد18/21 باشد دامنه تغییـرات آن بـه صورت زیر محاسبه می‌شود.

$R = (20/25 - 18/21) + 0/01 \Rightarrow R = 2/05$

توجه کنید که در اینجا اعداد اعشاری دو رقمی داریم و لذا α برابر یک صدم است.

مثال : دامنه تغیرات 7/3، 6/2، 8/1.11/12 ، 12/7 و 7/1 را محاسبه کنید.

حل:

$R=(H-L)+\alpha$

$R=(12/7-6/2)+0/01=6/5+0/01=6/51$

چون در نمرات دو اعشاری وجود دارد، پس $\alpha = 0/01$ می‌شود.

✓ **خودآزمایی4**

1- اگر بزرگترین عدد داده‌ای، 15/13 و کوچکترین نمره آن 7/09 باشد، دامنـه تغییـرات کدام است؟

1) 8/05   2) 8/03   3) 7/04   4) 7/03

2- اگر بزرگترین نمره کلاسی 19 و کوچکترین نمره آن کلاس 13 باشد، دامنه تغییرات کدام است؟

1) 5   2) 7   3) 8   4) 6

3- دامنه تغییرات نمرات (1- ، 2- ، 3- ، 6- ، 7- ، 9- ، 11-)

1) 8+   2) 9-   3) 11-   4) 11+

4- دامنه تغییرات نمرات 9/5 ، 7/6، 5/25، 4/6 و 2/1 کدام است.

1)7/5   2) 7/41   3)7/4   4)7/6

2. 8. 4 جدول توزیع فراوانی ساده

برای تشکیل جدول توزیع فراوانی ابتدا دامنه تغییرات را تشکیل می‌دهیم.

اگر دامنه‌ی تغییرات به دست آمده کوچکتر از 20 باشد، از جدول توزیع فراوانی ساده استفاده می‌کنیم. برای تشکیل جدول توزیع فراوانی، ابتدا جدولی با 3 ستون رسم می‌کنیم و اعداد را به

ترتیب از بالا به پایین و از بزرگ به کوچک می نویسیم. سپس به ازای هر مرتبهٔ تکرار هر عـدد، در ستون دوم جلوی آن یک خط نشان و یا علامت(/) قرار می دهیم و درآخر، تعداد خط و نشان‌ها را به عنوان فراوانی مطلق یا (f) در ستون سوم می‌نویسیم. در واقع فراوانی مطلـق یـک داده آمـاری، تعداد دفعاتی است که آن داده تکرار شده است.

مثال: اعداد زیر نتیجه تست دراز و نشست 28 دانش‌آموز مـی‌باشـد. جـدول توزیـع فراوانـی آن را تشکیل دهید.

29, 34, 31, 42, 34, 30, 41, 32
35, 40, 32, 35, 35, 40, 35, 33
29, 30, 33, 35, 34, 32 , 42
35, 34, 30, 31, 35

حل:

جهت تشکیل جدول توزیع فراوانی ابتـدا دامنـه‌ی تغییـرات را محاسـبه مـی‌کنـیم. در اعـداد بـالا، بزرگترین عدد 42 و کوچکترین عدد 29 می‌باشد. دامنه تغییرات آن را محاسبه می‌کنیم.

$R = (H - L) + 1 \Rightarrow R = (42 - 29) + 1 \quad R = \Rightarrow 13 + 1 \quad R = \Rightarrow 14$

چون دامنه تغییرات بدست آمده کمتر از 20 است، احتیاجی به طبقه‌بندی نیست. بنابراین، داریم:

جدول 1-4. توزیع فراوانی ساده

X	خط و نشان	f
42	//	2
41	/	1
40	//	2
35	~~////~~ //	7
34	////	4
33	//	2
32	///	3
31	//	2
30	///	3
29	//	2

3. 8. 4 جدول توزیع فراوانی طبقه بندی شده

اگر دامنه تغییرات به دست آمده از 20 بیشتر شد، برای سهولت در محاسبات، جدول طبقـه بنـدی

شده تشکیل می‌دهیم. برای تشکیل جدول طبقه بندی مراحل زیر انجام می دهیم.

☜ **محاسبه دامنه تغییرات:** همان‌طوری‌که که قبلاً توضیح داده‌ایم دامنه تغییرات از فرمول $R = (H - L) + \alpha$ به‌دست می‌آید.

☜ **تعداد طبقات:**

برای تعداد طبقات می‌توان از فرمول $K = 1 + 3/3\ \mathrm{Log}_n$ ، که N تعداد اعداد و K تعداد طبقات است، استفاده کرد.

مثال: چنانچه تعداد اعداد جمع آوری شده برابر 60 باشد، تعداد طبقات را محاسبه کنید .

حل:

پایه لگاریتم بر مبنای 10 است .

$$K = 1 + 3/3 \log n \qquad k = 1 + 3/3 \log 60$$

$\mathrm{Log}\, 60$ در پایه 10 مساوی 1/7782 است.

$$K = 1 + 3/3(1/7782) = 6/86806 \approx 7$$

☜ **فاصله طبقه‌ای:** در انتخاب فاصله طبقاتی می‌توان به دو نکته توجه کرد. نخست آن که تعداد طبقه‌ها کمتر از 10 و بیشتر از 25 نباشد. اگر تعداد طبقه‌ها کمتر از 10 باشد، اطلاعات زیادی به خاطر طبقه‌بندی از دست می‌رود و در نتیجه از دقت محاسبات کاسته می‌شود؛ و اگر تعداد آنها از 25 تجاوز کند انجام محاسبه دشوار می‌گردد. دوم آن که تجربه نشان داده است که برخی از اعداد مانند 1 ، 2 ، 3 ، 5 ،10 برای اندازه فاصله طبقه مناسب‌تر است. برای تعیین اندازه فاصله طبقه‌ای از فرمول زیر استفاده می‌شود.

$$\text{فاصله طبقات} = \frac{\text{دامنه تغییرات}}{\text{تعداد طبقات}} \Rightarrow I = \frac{R}{k}$$

نکته: دسته بندی باید به گونه‌ای انجام شود که فراوانی هیچ طبقه‌ای صفر نشود.

نکته:با افزایش تعداد طبقات باعث می‌شود فاصله طبقات کمتر گردیده و این اقدام موجبات کاهش خطای گروه‌بندی را فراهم می‌سازد.

☜ **تعیین پایین‌ترین طبقه:** باید حد نشانی پایین‌ترین نمره بر فاصله طبقه قابل تقسیم و نتیجه آن عدد صحیح باشد.(یعنی باید کوچکترین عدد توزیع یا کوچکتر از آن که بر فاصله طبقه قابل تقسیم باشد را انتخاب کرد) طبقه a تا b شامل اعداد $a+1, a+2, a+3+a+4, \ldots, b$ است که با a-b نمایش داده می شود. پس طبقه 34 ـ 30 طبقه‌ای با فاصله طبقه‌ای 5 است که اعداد 30 ، 31 ،32 ،33 ،34 در آن قرار می‌گیرند.

☜ **نقطه میانی:** حاصل جمع دو عدد نشانی طبقه تقسیم بر 2 را گویند.

مثال: اگر فاصله طبقاتی 34 -30 باشد، نقطه میانی برابر $32 = \frac{30+34}{2}$ است.

مثال: نمرات زیر از آزمون پرش زیگزاگ به دست آمـده اسـت،جـدول توزیـع فراوانـی‌آن را تشکیل دهید.

$49-50-61-65-72-78-36-69-80-64-75-81-78-69$

$78-90-45-52-62-58-86-72-60-94-73-81-77-56-70$

$40-58-66-61-47-63-85-53-83-47-89-73-65-56-48$

$66-73-69-41-66-60$

حل:

ابتدا دامنه تغییرات را محاسبه می‌کنیم:

$R= (H-L)+1$

$R = (94 - 36) + 1 \; R= \Rightarrow 59$

بعد از محاسبه دامنه تغییرات تعداد طبقات را مشخص می‌کنیم، با توجه به تعداد نمرات حدود 12 طبقه در نظر می‌گیریم.

تعیین فاصله طبقه‌ای: اگر دامنه تغییرات را تقسیم بر تعداد طبقات کنیم فاصـله طبقـات بدسـت می‌آید.

$$I = \frac{R}{K} \Rightarrow I = \frac{59}{12} \approx 4/9 \Rightarrow I = 4/9$$

تذکر: فاصله طبقاتی می‌تواند اعشاری باشد ولی برای سهولت انجام کار I را مساوی 5 می‌گیریم.

چون فاصله طبقات برابر پنج شد، بهتر است طبقات را از35 که ضـریبی از عـدد پـنج اسـت شـروع کنیم. توجه کنید عدد 35 از کوچکترین داده ما یعنی 36 کوچکتر است. طبقهٔ اول را 39 – 35 در نظر گرفته و طبقات بعدی را بر اساس آن مشخص می‌کنیم.

نکته: حد بالای اولین طبقه نباید از بزرگترین عدد، کوچکتر باشد و حـد پـایین آخـرین طبقه ، نباید بزرگتر از کوچکترین داده باشد.

برای به‌دست آوردن عدد میانی طبقات، مجموع بزرگترین عدد و کوچکترین عدد هرطبقه را بر 2 تقسیم می‌کنیم، مثلاً برای به‌دست آوردن عدد میانی طبقه اول چنین عمل می‌کنیم.

$35 + 39 = 74 \Rightarrow 74 \div 2= 37$ عدد میانی

نتایج حاصل از طبقه‌بندی در جدول زیر خلاصه می‌شود.

جدول 2-4: توزیع فراوانی طبقه‌بندی شده

عدد میانی	فراوانی	خط و نشان	طبقات
$(\frac{90+94}{2})=92$	2	//	90-94
87	3	///	85-89
82	4	////	80-84
77	5	~~////~~	75-79
72	6	~~////~~ /	70-74
67	8	~~////~~ ///	65-69
62	7	~~////~~ //	60-64
57	4	////	55-59
52	3	///	50-54
47	5	~~////~~	45-49
42	2	//	40-44
37	1	/	35-39

✓ خودآزمایی 5

1- اگر دامنه تغییرات نمراتی 25 و فاصله طبقاتی 5 باشد، تعداد طبقات کدام است؟

1) 5   2) 6   3) 4   4) 3

2- اگر بزرگترین نمره داده‌ای 29، کوچکترین نمره آن 9 باشد. تعداد طبقات 7 باشد، فاصله طبقات کدام است؟

1) 4   2) 3   3) 3/5   4) 4/5

3- در اعداد طبقه شده زیر فاصله طبقات کدام است؟

x	f
9-11	1
6-8	2
3-5	3
0-2	1

1) 1/5 2) 2 3) 3 4) 3/5

4- اگر بخواهیم مضارب عدد (4) را در محدوده اعداد 20 تا 65 با فاصله سه طبقه‌بندی کنیم، چند طبقه خواهیم داشت؟

1) 13 2) 14 3) 15 4) 12

5**- اگر دامنه تغییرات نمراتی 59 و تعداد طبقات آن 10 باشد، فاصله طبقات کدام است؟**

1) 5/9 2) 6 3)5 4) 5/5

6- با افزایش کدام‌یک از موارد زیر، خطای گروه بندی کاهش می‌یابد؟

1)تعداد طبقات 2)سطوح طبقات 3)دامنه تغییرات 4) فاصله طبقات

4.9 فراوانی نسبی (p) و روش محاسبه آن

فراوانی مطلق، معیاری مناسبی برای توصیف داده‌ها در جامعه نمی‌باشد به‌عنوان مثال فرض کنیدکه دروازه‌بانی در 5 ضربه پناتی 5 گل بخورد، و دروازه‌بان دیگری در 10 ضربه پنالتی 5 گل بخورد، در این صورت فراوانی مطلق تعداد گل‌های خورده برای هر دو دروازه بان برابر 5 است که معیار مناسبی برای بررسی وضعیت آن‌ها نیست. بهتر است که تعداد گل‌های خورده را به نسبت تعداد ضربات پنالتی برای هر فرد در نظر بگیریم. **در حالت کلی چنانچه فراوانی مطلق را بر مجموع فراوانی‌های مطلق تقسیم کنیم، فراوانی نسبی[1] آن طبقه به‌دست می‌آید**؛ که نشان دهنده این است که هر یک از داده‌ها چه درصدی از کل داده‌ها را تشکیل می‌دهند.

$$\text{فراوانی نسبی} = \frac{\text{فراوانی مطلق هر طبقه}}{\text{فراوانی کل}}$$

[1] . Relative Frequency

4 .10 فراوانی مطلق تجمعی (تراکمی)

برای محاسبه فراوانی تجمعی[1] کافی است که فراوانی‌های مطلق را به ترتیب از پایین به طبقـه بـالا جمع کنیم. این نوع فراوانی‌ها به ما نشان می‌هد چه تعداد نمره پایین‌تر از حد واقعی بـالای طبقـه قرار گرفته است به طور مثال، اگر فراوانی تراکمی نمره 16 برابر 20 باشد، به ما نشان می‌دهـد کـه 20 نفر نمره‌ی برابر 16 و یا کمتر از 16 گرفتند.

نکته: فراوانی تجمعی بالاترین دسته با فراوانی کل برابر است.

نکته: در سطح اندازه‌گیری اسمی، هرگز نمی‌توان به محاسبه فراوانی تراکمی مبادرت ورزید.

4 .11 فراوانی های نسبی تراکمی (CP)

برای محاسبه فراوانی نسبی تراکمی[2]، فراوانی نسبی را به ترتیب از طبقه پایین به طبقـه بـالا جمع می‌کنیم. این فراوانی به ما نشان می‌دهد چند درصد از نفرات کمتر از حد واقعی بـالایی یـک نمره و یا یک طبقه معین در کلاس قرار دارند. به طور مثال، اگر فراوانی نسبی تراکمی طبقه 62–60 برابر 39 درصد باشد، نشان‌دهنده این است که 39 درصد نفرات کلاس نمره مسـاوی و یـا کمتر از آن گرفته‌اند. یا طبقه 62-60 از 39 درصد افراد نمره بیشتر گرفته است.

جدول 3-4. توزیع فروانی‌های نمرات خام مربوط به 150 دانش آموز هنرستان شهید کلانتری محمودآباد در پرش ارتفاع جفتی که طبق نورم‌های استاندارد بین صفر تا صد به آنها نمره داده شده است، به صورت زیر است.

65	55	75	77	71	78	50	67	51	79
88	32	63	74	67	80	73	83	89	62
34	70	55	47	79	79	71	60	48	88
93	75	68	86	72	61	50	46	81	89
58	54	66	73	82	61	75	90	50	41
41	87	57	67	64	80	72	42	37	59
52	36	51	91	78	74	67	79	73	75
76	95	69	70	74	85	36	77	73	70
69	76	62	39	45	77	74	85	67	67
57	53	59	73	78	83	93	42	43	91
43	47	61	84	81	71	79	55	63	93
57	73	38	72	83	77	96	53	98	71
75	81	67	49	71	53	86	59	92	70
46	42	68	80	59	71	71	67	67	33
49	39	66	50	52	57	72	30	68	82

---

۱ . Cumulative Ferquency
۲ . Relative Frequency - Cumulative

تعداد طبقات: باتوجه به تعداد نمرات خام که 150 عدد است حدود 15 طبقه پیش‌بینی می‌شود.

تعیین فاصله طبقه ای: (I= ؟)

ابتدا دامنه‌ی تغییرات را محاسبه می‌کنیم:

$$R=(H-L)+1$$

$$R = (98 - 30) + 1 = 68 + 1 \quad R= \Rightarrow 69$$

$$I = \frac{R}{K} = \frac{69}{15} \approx 4/67 \Rightarrow i = 5$$

فاصله طبقات = Interval و دامنه طبقات = Range

چون فاصله طبقات را گرد کرده‌ایم برای آن که فراوانی هیچ طبقه‌ای صفر نشود، 14 طبقـه در نظر می‌گیریم.

تعیین پایین‌ترین نقطه: کوچکترین عدد 30 است که اگر بر فاصـله طبقـاتی تقسـیم شـود، حاصل آن عددی صحیح و زوج می‌شود ($30 \div 5 = 6$). بنابراین با توجه به فاصله طبقاتی 5 ، حد نشانی کوچکترین عدد که 30 است اولین طبقه 34 – 30 تعیین مـی گـردد و طبقـات بعـدی بـه ترتیب بالای آن قرار می‌گیرد. نتایج در جدول زیر خلاصه شده است .

جدول 4-4. انواع فراوانی‌ها را در نمره های دسته بندی شده را نشان می‌دهد.

حدهای واقعی‌طبقه‌ها	نشان دسته	فراوانی تجمعی نسبی (cp%)	فراوانی‌نسبی (P%)	فراوانی تجمعی مطلق (cf)	فراوانی‌مطلق (f)	حدود طبقات
94/5–99/ 5	97	1 /00	0/ 0 2	150	3	95-99
89/5–94/ 5	92	0/ 98	0/ 05	147	7	90-94
84/5–89/ 5	87	0 / 93	0/0 6	140	9	85-89
79/5–84/ 5	82	0/ 87	0/0 8	131	12	80-84
74/5–79 /5	77	0/ 79	0/0 13	119	19	75-79
69/5-74/5	72	0/ 66	0/ 16	100	25	70-74
64/5-69/5	67	0 / 50	0/ 11	75	17	65-69
59/5-64/5	62	0/ 39	0/ 0 7	58	10	60-64
54/5-59/5	57	0/32	0/0 8	48	12	55-59
49/5-54/5	52	0/24	0/07	36	11	50-54
44/5-49/5	47	0/17	0/05	25	8	45-49
39/5-44/5	42	0/12	0/05	17	7	40-44
34/5-39/5	37	0/07	0/04	10	6	35-39
29/5-34/5	32	0/03	0/03	4	4	30-34

توجه کنید که برای به دست آوردن فراوانی نسبی، فراوانی تجمعی، فراوانی مطلق و فراوانی تجمعی نسبی طبق روال قبلی که توضیح داده‌ایم عمل می‌کنیم .

یادآوری می‌کنیم که ستون فراوانی نسبی (p) نشان دهنده‌ی این است که داده‌ها چه درصدی از کل داده‌ها را تشکیل می‌دهند.

ستون فراوانی تجمعی (CP)، جایگاه افراد در کلاس مورد نظر را نشان می‌دهد. به‌عنوان مثال، کسی که در دسته 89 ـ 85 قرار می‌گیرد از 93 درصد افراد نمره‌ای بیشتر و یا برابر دارد و یا 93 درصد افراد نمره‌ای کمتر یا مساوی با او گرفته‌اند.

4 .12 نمودارهای آماری

روش‌های مرسوم نمایش داده‌ها به صورت هندسی عبارتند از:

الف) نمودار میله‌ای ب) هیستوگرام ج) نمودار چند ضلعی د) نمودار فراوانی تراکمی(اجایو) هـ) نمودار دایره‌ای یا کیکی

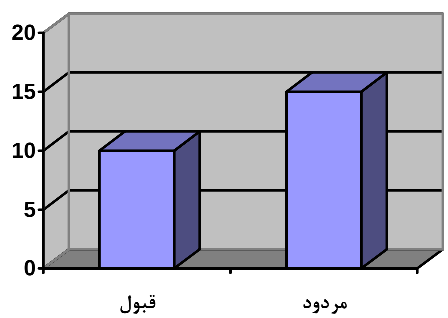
1. 12. 4 نمودار میله ای

این نمودارهنگامی سودمند است که داده‌های جمع‌آوری شده متعلق به متغیرهای گسسته (نظیر قبول و مردود شدن) بوده و با استفاده از مقیاس اسمی اندازه‌گیری می‌شوند. در این نمودار برای نشان دادن طبقات گسسته از مستطیل استفاده می‌شود. ارتفاع میله برابر با فراوانی طبقات است.
مثال: جدول زیر توزیع فراوانی 25 داوطلب که به‌صورت قبول و رد طبقه‌بندی شده‌اند را نشان می‌دهد.

طبقات	فراوانی (f)	درصد (p)
قبول	10	% 40
رد	15	% 60

نمودار میله‌ای متناظر با آن را رسم کنید.

حل:



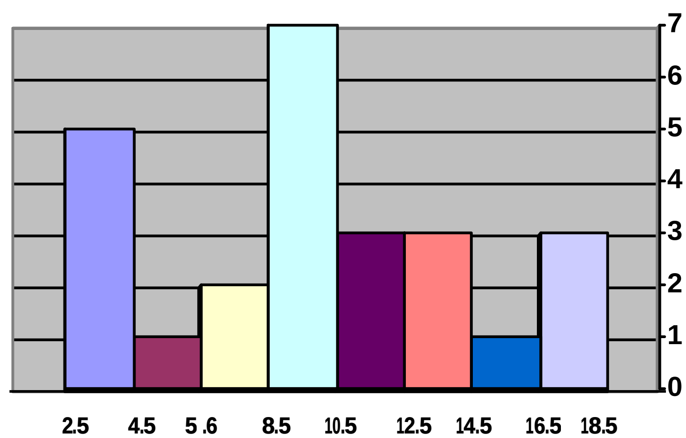
202 1. 4 نمودار هیستو گرام

همانند نمودار میله‌ای است و تنها اختلافی که بین این دو نمودار وجود دارد نمایش ستون‌ها است. ستون‌ها در هیستوگرام موجب گردیده تا این نمودار وسیله‌ی مناسبی برای نمایش داده‌های ناشی از اجرای متغیرهای پیوسته و یا متغیرهایی که با استفاده از مقیاس‌های فاصله‌ای و نسبی مورد اندازه‌گیری قرار می‌گیرند باشد. هر ستون نشان دهنده‌ی یک طبقه از اعداد است. حدود واقعی هر طبقه موجب به وجود آمدن معیار پیوسته‌ای بر روی محور افقی (x) می‌شود. عرض هر ستون برابر با طول هر طبقه بوده و ارتفاع هر ستون فراوانی طبقه متناظر را نشان می‌دهد.

جدول 5-4. اطلاعات مربوط به 25 دانشجو را در آزمون بارفیکس نشان می‌دهد.

حدود طبقات	کرانه طبقات	فراوانی (f)	نقطه میانی xc	فراوانی‌تراکمیcf
17-18	16/5-18/5	3	17/ 5	25
15- 16	14/5-16/5	1	15/5	22
13-14	12/5-14/5	3	13/5	21
11-12	10/5-12/5	3	11/5	18
9-10	8/5-10/5	7	9/5	15
7-8	6/5-8/5	2	7/5	8
5-6	4/5-6/5	1	5/5	6
3-4	2/5-4/5	5	3/5	5

نمودار هیستوگرام آن را رسم کنید؟

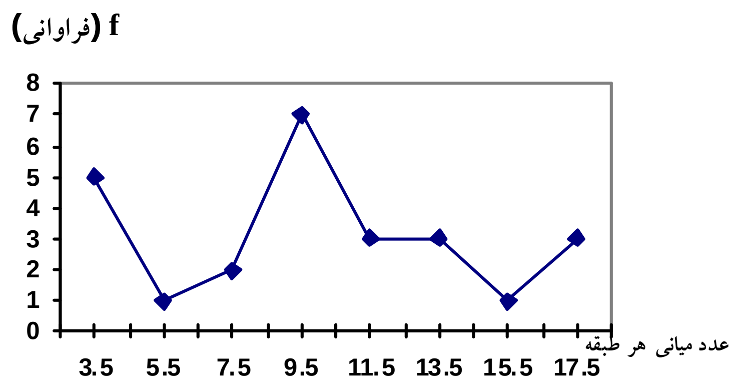


شکل2-4: نمودار هیستوگرام

3. 12. 4 نمودار چند ضلعی

این نمودارمعمولاً بیشترین کاربرد را دارد؛ و ازتعدادی نقاط که به وسیله خطوط راست به هم متصل می‌شوند تشکیل شده است همچنین این نمودار، برای داده‌های پیوسته و کمی کاربرد دارد و برای ترسیم آن نمودار، از نقطه وسط هر طبقه استفاده می‌شود. از نقطه وسط هر طبقه که بر روی محور افقی معین شده است به اندازه فراوانی آن طبقه به موازات محور عمودی بالا می‌رویم و محل تقاطع را با یک، نقطه مشخص می‌سازیم سپس نقاط حاصل را به وسیله خطوط راست به هم وصل می‌کنیم. این نمودار برای مقایسه یک یا چند گروه از داده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

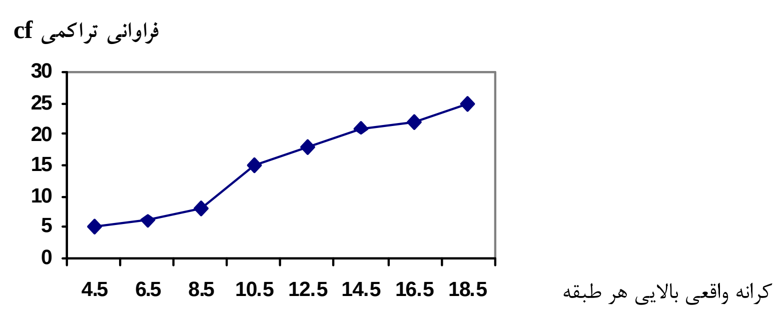
نمودار چند ضلعی متناظر با جدول فراوانی مثال قبل به صورت زیر است:



شکل 3-4: نمودار چند ضلعی

4. 12. 4 نمودار فراوانی تراکمی یا (اجایو)

برای ترسیم این نمودار محور، عمودی (y) براساس فراوانی تراکمی درجه بندی می‌شود و محور افقی (X) به جای نقطه میانی بر پایه کرانه‌های واقعی بالایی هر طبقه درجه‌بندی می‌شود. نقطه‌هایی که روی این کرانه‌ها قرار می‌گیرد نشان می‌دهد که چه تعداد و یا چه درصدی از نمره‌ها تا پایان کرانه واقعی بالایی طبقه جای گرفته است. نمودار تراکمی متناظر با جدول فراوانی مثال فوق به‌صورت زیر است:



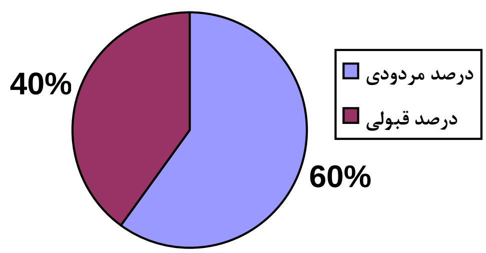
شکل4-4: نمودار فراوانی تراکمی (اجایو)

5. 12. 4 نمودار دایره ای یا کیکی

این نمودار ساده‌ترین و درعین حال مناسب ترین روش برای مقایسه و نمایش داده های جمع آوری

شده از متغیرهای گسسته و کیفی است. این‌نمودار بر اساس تبدیل سطح دایره به سطحی معادل با سطح توزیع فراوانی (صد درصد) ترسیم می‌شود. مثلاً درصد داوطلبان قبولی و مردودی را که به ترتیب 40 درصد و 60 درصد هستند محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، دایره‌ای ترسیم می‌کنیم که سطح آن برابر با 100 درصد است. باتوجه به اینکه سطح کل دایره 360 درجه است40 پس درصد آن برابر با زاویه‌ای به اندازه144 درجه است. ($144 = 360 \times 40\%$)و 60 درصد آن نیز 216 درجه می‌شود. در حالت کلی برای محاسبه مقدار و درجه یک فراوانی می‌توانیم از فرمول ($d^o = \frac{F}{N}(360^o)$) استفاده نمود.

نمودار دایره‌ای متناظر با اطلاعات فوق به‌صورت زیر است:



شکل 5-4: نمودار دایر ه‌ای یا کیکی

✓ خودآزمایی 6

1- برای دسته‌بندی کردن اطلاعات خام، کدام‌یک ازداده‌های زیر مورد نیاز هستند:

1) مد (نما)، میانه، میانگین

2) تعداد طبقات، دامنه تغییرات و فاصله‌ی طبقات

3) انحراف استاندارد (معیار)، واریانس، دامنه تغییرات

4) تعداد نمره‌ها، تعداد طبقه‌ها و فاصله طبقه‌ای

2- برای نمایش متغیرهای گسسته کدام نمودار مناسب است؟

1) میله ای 2) هیستوگرام 3) اجایو 4) چند ضلعی

3- برای نمایش متغیرهای پیوسته کدام نمودار مناسب‌تر است؟

1) میله‌ای 2) دایره‌ای 3) اجایو 4) هیستوگرام

4- کدام یک از نمودارهای زیر برای نمایش فراوانی تجمعی/ تراکمی به‌کار می‌رود؟

1) نمودار میله‌ای 2) نمودار اجایو

3) نمودار چند ضلعی 4) نمودار دایره‌ای

5- نمودار اجایو همان نمودار .... است؟

1) لوله‌ای 2) چند ضلعی 3) میله‌ای 4) فراوانی تراکمی

6- نمودار دایره‌ای برای کدام متغیر مناسب است؟

1) پیوسته 2) گسسته 3) نسبی 4) فاصله‌ای

7- وقتی فراوانی‌های مطلق هر نمره از پایین به بالا جمع می شوند به آن .... می‌گویند.

1) فراوانی مطلق 2) فراوانی نسبی 3) فراوانی تجمعی 4) فراوانی حجمی

8- اگر فراوانی نسبی طبقه ای از یک توزیع فراوانی 0/12 و فراوانی مطلق آن طبقه 15 باشد، تعداد کل داده‌ها کدام است؟

1) 115 2) 125 3) 95 4) 130

9- چنانچه بخواهید میزان وقوع صدمات ورزشی در سه رشته ورزشی والیبال، بسکتبال و فوتبال را با یکدیگر مقایسه و درک مفیدی را به خواننده القاء کنید بهره‌گیری از کدام ابزار آماری زیر را توصیه می‌کنید؟

1) دایره‌ای 2) نمودار ستونی

3) جدول توزیع فراوانی 4) نمودار چندضلعی

10- کرانه بالایی و پایانی طبقه 25/5 – 24/5 کدام است؟

1) 23/5 -25/6 2) 24/1– 25/4 3) 22/5 –23/5 4) 24/45 – 25/55

11- اگر در یک کلاس 25 نفری، بالاترین طبقه دارای فراوانی4 باشد، فراوانی تجمعی درصدی طبقه ماقبل آخر کدام است؟

1) 84 2) 86 3) 88 4) 90

12- فراوانی نسبی طبقه‌ای 0/05 و تعداد داده ها برابر 80 است . فراوانی مطلق کدام است؟

1) 4 2) 5 3) 6 4) 0/16

13- فراوانی نسبی 0/4 و فراوانی مطلق 24 باشد، تعداد داده‌ها کدام است؟

1) 100 2) 80 3) 60 4) 50

14- اگر فراوانی نسبی طبقه ای 0/12 باشد درصد فراوانی نسبی این طبقه کدام است؟

1) 8 2) 20 3) 12 4) 16

15- فراوانی تجمعی طبقه‌ای 36 است، کدام مقدار زیر می‌تواند فراوانی تجمعی طبقه‌ای بعد از آن باشد؟

1) 42   2) 38/5   3) 34   4) 22/5

16- در یک دسته‌بندی داده‌ها، فراوانی کل برابر 120 و فراوانی نسبی دسته‌های اول و دوم به ترتیب 0/4 و 0/2 می‌باشد فراوانی تجمعی دسته دوم کدام است؟

1) 24   2) 36   3) 48   4) 72

17-در یک جدول فراوانی، فراوانی تجمعی دسته آخر برابر کدام است؟

1) 1   2) 100

3) N (تعداد کل داده‌ها)   4) $\frac{1}{N}$

18- فراوانی تجمعی نسبی دسته آخر در یک جدول فراوانی برابر است؟

1) تعداد افراد در جدول   2) جمع فراوانی های تجمعی

3) جمع فراوانی های تجمعی نسبی   4) یک

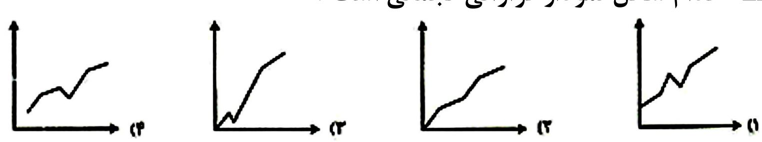
19- اگر فراوانی تجمعی در طبقات دوم و سوم به ترتیب 12 و 17 و فراوانی نسبی طبقه سوم 0/1 باشد تعداد داده‌ها کدام است؟

1) 60   2) 55   3) 50   4) 45

20- در جدول توزیع 60 داده‌ی آماری، فراوانی تجمعی دسته پنجم 21 و فراوانی تجمعی دسته ششم 24 است فراوانی نسبی دسته ششم چقدر است؟

1) 0/ 35   2) 0/05   3) 0/2   4) 0/4

21- کدام شکل نمودار فراوانی تجمعی است ؟



22- نمودار دایره‌ای بر مبنای کدام یک از موارد زیر رسم می‌شود؟

1) فراوانی نسبی   2) فراوانی تجمعی   3) طول دسته‌ها   4) تعداد داده ها

23- اگر تعداد داده‌ها 180 و فراوانی طبقه‌ای 30 باشد زاویه مربوط به این طبقه در نمودار دایره‌ای چند درجه است؟

1) 40   2) 60   3) 80   4) 90

24- تعداد دانش آموزان سه کلاس مدرسه ای 70 ، 60 و 50 نفر است . در نمودار دایره‌ای داده‌ها، زوایه مربوط به کلاس 50 نفری چند درجه است؟

1) 50 2)150 3) 100 4) 120

25- اگر زاویه‌ی طبقه در نمودار دایره‌ای 30 درجه و تعداد کل داده ها برابر 36 باشد فراوانی مطلق این طبقه کدام است؟

1) 2 2) 3 3) 6 4) 12

26- در نمودار دایره‌ای، زاویه سطح مربوط به فراوانی مطلق $fi = 15$ برابر 54 درجه است. فراوانی، کل داده‌ها کدام است.

1) 96 2) 100 3) 108 4) 120

27- اگر فراوانی مطلق دسته یک، نصف فراوانی مطلق دسته دو باشد نسبت زاویه‌ی دسته یک به زاویه ی دسته دو در نمودار دایره‌ای کدام است.

1)0/25 2) 0/5 3)2 4) 4

28- در رسم نمودار توزیع فراوانی‌تجمعی(اجایو)، بر روی محور x چه مقادیری را ثبت می‌کنیم؟

1) فراوانی تجمعی 2) فراوانی مطلق 3) حدود میانی 4) حدود بالایی طبقات

29- همواره مجموع فراوانی نسبی برابر با چه رقمی است؟

1)یک 2) صد 3)تعداد 4)پنجاه

30- کدامیک از موارد زیر در سطح اندازه‌گیری اسمی محاسبه نمی‌شود؟

1)فراوانی نسبی 2)فراوانی مطلق 3)فراوانی تراکمی 4)فراوانی درصدی

31- آخرین طبقه فراوانی تراکمی نسبی درصدی برابر کدام است؟

1)یک 2)ده 3)پنجاه 4)صد

13. 4 معیارهای مرکزی (شاخص های گرایش به مرکز)

معیارهای مرکزی، اندازه تمایل داده‌ها را نسبت به مرکز داده‌ها مشخص می‌کنند که سه نمونه از آن‌ها عبارتنداز: میانگین حسابی ، میانه و مد (نما).

1. 13. 4 میانگین حسابی

میانگین[1] با حرف $\overline{X}$ نشان داده می‌شود؛ و یکی از قوی‌ترین و مفیدترین اندازه‌ای است که به منظور توصیف گرایش به مرکز، یا معدل توزیع نمره‌های یک گروه از افراد، اشیاء و یا حوادث به

---

[1] . Average(mean)

کار برده می‌شود. میانگین مناسب‌ترین شاخص تمایل مرکزی برای داده‌های فاصله‌ای و نسبی به شمار می‌رود که از تقسیم جمع کل نمره‌ها بر تعداد آن‌ها به‌دست می‌آید.

الف) در حالتی که داده‌ها طبقه‌بندی نشده باشند از فرمول زیر برای محاسبه میانگین استفاده می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{N}$$

$\bar{X} =$ معدل (میانگین)

$N =$ تعداد کل آزمون ها

$\Sigma x_i =$ جمع کل آزمون ها

مثال نمره‌های 5 دانش‌آموز در آزمون دراز و نشست به شرح زیر ثبت شده است. میانگین حسابی آن‌ها را به‌دست آورید؟

15, 20, 25, 30, 35

حل:

$$\Sigma x_i = 15 + 20 + 25 + 30 + 35$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{125}{5} \Rightarrow \bar{x} = 25$$

نکته‌ها:

1. حاصل ضرب میانگین در تعداد افراد مساوی است با جمع کل مقادیر مربوط به آن افراد یعنی

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{N} \Rightarrow \Sigma x_i = N\bar{X}$$

2. اگر عدد ثابت c را به کلیه رکوردهای یک گروه اضافه و یا کم نماییم به همان نسبت به میانگین اضافه یا از آن کم می گردد .

به عبارت دیگر، اگر میانگین $X_1, X_2, \ldots, X_N$ برابر $\bar{X}$ باشد آنگاه میانگین $X_1 \pm C, X_2 \pm C, \ldots, X_N \pm C$ برابر با $\bar{X} \pm C$ است.

3. اگر عدد ثابت c را درکلیه رکوردهای یک گروه ضرب کنیم میانگین نیز در همان عدد ضرب می‌شود.

به عبارت دیگر، اگر میانگین $X_1, X_2, \ldots, X_N$ برابر با $\bar{X}$ باشد آنگاه میانگین $CX_1, CX_2, \ldots, CX_N$ برابر $C\bar{X}$ است.

4. اگر $\bar{x}$ میانگین داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ باشد آنگاه میانگین $ax_1 + b, \ldots, ax_n + b$ به صورت

$a\overline{x}+b$ می‌باشد.

مثال: اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, ..., x_n$ برابر 5 باشد میانگین $2x_1-2, ..., 2x_n-2$ را محاسبه کنید؟

حل: چون میانگین $\overline{x}=a\overline{x}-b$ می‌باشد، بنابراین میانگین جدید برابراست با:

$$\overline{x}=(2\times 5)+(-2)=10-2=8$$

5. حاصل جمع جبری انحرافات از میانگین‌ها برابر با صفر می‌باشد.

$$\Sigma(x_i-\overline{x})=\circ$$

6. میانگین داده‌های n ، ... 2 ، 1 برابر با $\frac{n+1}{2}$ است.

7. میانگین داده‌ای $a, a+d ... + a(n-1)d$ که تشکیل یک تصاعد حسابی با قدرنسبت d رامی‌دهند برابر است با $\frac{1}{2}[2a+(n-1)d]$

8. اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, ..., x_n$ برابر $\overline{X}$ باشد آنگاه میانگین $x_1+1, x_2+2, ..., x_n+n$ برابر است با $\overline{x}+\frac{n+1}{2}$

مثال: رکوردهای 5 نفر در آزمون بارفیکس به صورت زیر به دست آمده است، نشان دهید که حاصل جمع انحراف از میانگین برابر صفر است؟

19 ، 17 ، 17 ، 15 ، 12

حل:

$$\Sigma(x_i-\overline{x})=0$$
$$\overline{x}=\frac{19+17+17+15+12}{5}=16$$
$$\Sigma(x_i-\overline{x})=(19-16)+(17-16)+(17-16)+(15-16)+(12-16)=$$
$$(+3)+(+1)+(+1)+(-1)+(-4)=0$$

نکته: از آنجایی‌که مجموع انحراف از میانگین‌ها صفر است، از حاصل جمع قدر مطلق انحراف از میانگین‌ها استفاده می‌شود؛ که در این صورت باید محاسبات را انجام داد تا نتیجه به‌دست آید.

مثال: جمع جبری قدر مطلق انحرافات از میانگین اعداد زیر را به‌دست آورید؟

x_i = ۲،۳،۷،۸،۱۰

حل:

$$\overline{x}=\frac{10+8+7+3+2}{5}=\overline{x}=\frac{30}{5}\Rightarrow\overline{x}=6$$

x_i	$x_i-\overline{x}$	$\lvert x_i-\overline{x}\rvert$
10	10-6=4	|10-6|=4
8	8-6=2	|8-6|=2
7	7-6=1	|7-6|=1
3	3-6=-3	|3-6|=3
2	2-6=-4	|2-6|=4
	$\Sigma(x_i-\overline{x})=0$	$\Sigma\lvert x_i-\overline{x}\rvert=14$

مثال: میانگین ده داده آماری برابری 15 محاسبه شده است. پس از محاســبه معلــوم شد که باید دو داده 6 و 18 را به آن بیفزائیم، میانگین داده‌های جدید را به‌دست آورید.

حل:

مجموع ده داده آماری $=15\times10=150$

مجموع 12داده آماری $= 150 + 6 + 18 = 174$

میانگین 12 داده $=\frac{174}{12}=14/5$

مثال: میانگین داده‌های آماری 36 ، ... ، 9 ، 6 ، 3 کدام است؟

حل:

$3+6+9+...+36=3(1+2+3+...+12)$

میانگین داده‌های $1,2,3,...,12$ برابر $\frac{12+1}{2}=6/5$ است پس میانگین داده‌های مورد نظر $3\times 6/5=19/5$ است.

یا در اینجا می‌توان به صورت مستقیم از رابطه $\frac{3+36}{2}=19/5$ برای محاسبه میانگین استفاده کرد.

✓ خودآزمایی 7

1- معتبرترین شاخص مقدار متوسط کدام است؟

1) میانگین 2) نما 3) مد 4) میانه

2- کدام‌یک ازشاخص‌های گرایش به مرکز برای داده‌های فاصله‌ای ونسبی مناسب است؟

1) نما 2) میانه 3) میانگین 4) 2 و 3

3- میانگین داده‌های زیر کدام است؟

۴،۶،۸،۹،۱۰،۵

1) 8 2) 7 3) 7/5 4) 8/5

4- اگر از کل نمرات کلاسی 2 نمره کم شود کدام گزینه صحیح است؟

1) میانگین جدید هیچ تغییری نمی‌کند.

2) دو نمره از میانگین جدید کم می‌شود.

3) دو نمره به میانگین جدید ضرب می‌شود.

4) چهار نمره به میانگین جدید اضافه می‌شود.

5- حاصل جمع جبری انحراف از میانگین نمرات زیر کدام است؟

1 و 2 و 3 و 4 ... و 20

1) 10/5 2) 20 3) 10 4) صفر

6- اگر عدد ثابت (3) را درکل نمرات ضرب کنیم، میانگین جدید کدام است؟

1) سه نمره به میانگین اضافه می‌شود. 2) سه نمره از میانگین کم می‌شود.

3) میانگین جدید هیچ تغییری نمی‌کند. 4) سه در میانگین قدیم ضرب می‌شود.

7- شاخص‌های گرایش مرکزی کدامند؟

1) واریانس، نمره Z ، انحراف معیار   2) دامنه تغییرات، انحراف معیار، واریانس

3) نمره T، نمره Z ، واریانس   4) میانگین، میانه، نما

8- اگر عدد ثابتی را به رکوردهای یک گروه اضافه کنیم در محاسبه میانگین اعـداد چـه اتفاقی می‌افتد؟

1) میانگین هیچ تغییری نمی‌کند.

2) میانگین اعداد با عدد ثابت جمع می‌شود.

3) میانگین اعداد در عدد ثابت ضرب می‌شود.

4) میانگین اعداد به عدد ثابت تقسیم می‌شود.

9- در رکوردهای (8 ، 10 ، 12) اگر فراوانی 8 و 12 را یکسان در نظر بگیـریم، میـانگین کدام است؟

1) 10   2) 12   3) 9/5   4) بستگی به فراوانی رکورد 12 دارد.

10- در توزیع 6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2 مجموع انحراف نمرات نسبت به کدام عدد کمتر است؟

1) 2   2) 3   3) 4   4) 5

11- اگر به 50 درصد یک سری اعداد خام 2 نمره اضافه و از 50 درصد آن ها 1 نمـره کـم کنیم، میانگین جدید چه تغییری خواهد کرد؟

1) 0/5 نمره به میانگین اضافه می‌شود.   2) 0/25 به میانگین اضافه می‌شود.

3) تغییری نمی‌کند.   4) 0/5 نمره از میانگین کم می‌شود.

12- در رکوردهای 12 ، 14 ، 16 اگر فراوانی رکوردهای 12 و 16 را یکسان در نظر بگیـریم، میانگین کدام است؟

1) 12   2) 14   3) 14/5   4) 15

13- در صورتی که میانگین x ، 4 ، 6 ، 5 ، 1 ، 1 ، برابر 3 باشد ، مقدار x کدام است؟

1) 4   2) 1   3) 4   4) 2

14- اگر میانگین داده های x_n ..... و x_2 و x_1 برابر 10 باشد میانگین داده‌های $2x_1$ -3 و ....و $2x_n$ -3 کدام است؟

1) 23   2) 1   3) 2   4) 17

15- شاخص های گرایش مرکزی کدامند؟

1) واریانس، نمره Z ، انحراف معیار **2) دامنه تغییرات، انحراف معیار، واریانس**

3) نمره T، نمره Z ، واریانس **4) میانگین، میانه، نما**

16- از هر یک از اعداد یک سری، 5 واحد کسر کرده و اعداد به‌دست آمده در 3 ضرب شده‌اند، میانگین اعداد جدید 45 محاسبه شده است، میانگین اعداد اصلی کدام است؟

1) 10 2)20 3) 30 4) 130

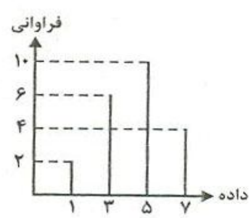
17- در صورتی که مجموع انحراف داده‌ها از عدد 5، برابر صفر باشد، میانگین این داده‌ها کدام است؟

1) 5- 2) 2 3) 5 4) 25

18- کدام یک از شاخص گرایش مرکزی، مرکز ثقل مجموعه‌ای از اندازه‌ها را نشان می‌دهد؟

1) نما 2) میانه 3) میانگین 4) نقطه پنچاه درصدی

19- در نمودار روبه رو میانگین چقدر است؟



1) 7/65
2) 6/75
3) 5/125
4) 4/45

20- میانگین داده‌های $x_1, x_2, ..., x_{10}$ رابر 5 است . میانگین مقادیر 16 و $x_1, x_2, ..., x_{10}$ کدام است؟

1) 5 2) 6 3) 6/6 4) 10/5

21- اگر میانگین $x_1, x_2, ..., x_{10}$ برابر 13/5 باشد، میانگین داده های 18 و 15 و $x_1, x_2, ..., x_{10}$ کدام است؟

1)15/5 2) 15 3) 14/5 4) 14

22- دانش‌آموزی در 10 درس دارای میانگین 14 می‌باشد اگر یکی از نمرات این دانش‌آموز 14 باشد، معدل بقیه دروس او کدام است؟

1) 14 2) 10 3)15 4) 13

23- میانگین 10 داده آماری 32/5 است اگر دو داده 35 و 40 را از آن داده‌ها کنار بگذاریم میانگین 8 داده حاصل کدام است؟

1) 32/25 2) 31/25 3) 31/75 4) 32

24- میانگین 3 داده آماری 14 و میانگین همان 3 داده به اضافه یک داده دیگر 13 شده مقدار داده اخیر کدام است؟

1) 10 2) 11 3) 12 4) 13

25- میانگین نمرات دانش آموزی در پنج درس برابر 13 می‌باشد اگر 4 نمره این دانش‌آموز 11 ، 12 ، 14 ، 15 باشد نمره پنجم این دانش آموز کدام است؟

1) 10 2) 13 3) 12 4) 14/5

26- اگر به نمرات درسی سنجش و اندازه گیری در تربیت بدنی دریک کلاس 35 نفری 1/5 نمره اضافه کنیم و از $\frac{1}{3}$ افراد کلاس 1/5 نمره کسر کنیم، در میانگین جدید چه تغییری ایجاد می شود؟

1) تغییری نمی‌کند. 2) 1/5 نمره کم می‌شود.
3) 2 نمره اضافه می‌شود. 4) 1 نمره اضافه می‌شود.

محاسبه میانگین در جدول فراوانی ساده :

برای محاسبه‌ی میانگین در جدول فراوانی ساده باید ابتدا تمام نمرات را در فراوانی مربوط ضرب و سپس مجموع آن‌ها را بر تعداد کل تقسیم کنیم. در این حالت حاصل ضرب فراوانی در نمرات را fx و مجموع آن را Σfx می‌نامند. که فرمول محاسبهٔ میانگین به‌صورت زیر است.

$$\bar{X} = \frac{\sum fx_i}{N}$$

مثال: اگر جدول زیر در دست باشد میانگین آن به‌صورت زیر حساب می‌شود.

حل:

اعداد (x)	فراوانی (f)
3	1
5	2
6	1
7	3
4	2
	N=9

$$\Sigma fx_i = 3\times1+5\times2+6\times1+7\times3+4\times2$$
$$\Sigma fx_i = 48$$
$$\overline{x} = \frac{\Sigma fx_i}{N} = \frac{48}{9} \approx 5/33$$

ب) برای محاسبه میانگین در جدول داده‌های طبقه‌بندی شده باید از نماینده یا عدد میانی هر طبقه استفاده و آن را در فراوانی هر طبقه ضرب، و مجموعه آن‌ها را بر تعداد کل تقسیم کرد؛ به عبارتی دیگر داریم:

$$\overline{x} = \frac{\Sigma fx_c}{N}$$

مثال: میانگین حسابی نمرات زیر را به دست آورید؟

9-11	12-14	15-17	18-20	نمرات
1	1	2	2	فراوانی

حل:

نمره میانی (x_c)	فراوانی (f)	نمرات
19	2	18-2
16	2	15-17
13	1	12-14
10	1	9-11
	$N=6$	

$$\Sigma fx_c = (2\times19)+(2\times16)+(1\times13)+(1\times10)$$
$$\Sigma fx_c = 93$$
$$\overline{x} = \frac{\Sigma fx_c}{N} = \frac{93}{6} = 15/5$$

✓ خودآزمایی 8

1- در جدول رو به رو میانگین کدام است؟

1) 10
2) 11
3) 10/5
4) 11/5

X	F
15-17	1
12-14	3
9-11	2
6-8	3
3-5	1

2- میانگین نمرات زیر کدام است؟

1) 15/5
2) 14/5
3) 17
4) 16

X	F
18-20	2
15-17	2
12-14	1
9-11	1

ج) برای محاسبه میانگین می‌توان از راه میانگین فرضی نیز عمل کرد که به روش کد گذاری مشهور است. دراین روش یکی از طبقات را که فرض می‌کنیم میانگین در آن واقع شده است، در ستون جداگانه‌ای که آن را ستون d می نامیم، مساوی صفر قرار می‌دهیم و به طبقه‌ای که در ستون d به آن صفر تعلق گرفته است طبقه‌ی مبدأ می‌گوییم، (بهتر است طبقه‌ای را که فراوانی آن از فراوانی دیگر طبقات بیشتر است، به عنوان طبقه مبدأ انتخاب کنیم، البته اگر هم طبقه‌ای دیگر را به این عنوان مشخص کنیم، در نتیجه محاسبات تغییری ایجاد نمی‌شود).سپس به طبقات بالای طبقه‌ی مبدأ به ترتیب از اولین طبقه بالاتر عدد 1 + به دومین طبقه 2+ و الی آخر عدد می‌دهیم. همچنین در ستونd به طبقات پایین‌تر از طبقۀمبدأ به ترتیب یک طبقه پایین‌تر عدد 1− و دومین طبقه پایین‌تر2- والی آخر عدد می‌دهیم. با این روش، ستون d کامل می‌شود. و ما می‌توانیم ستون دیگری به نام ستون fd تشکیل دهیم و فراوانی هر طبقه را در عدد d همان طبقه ضرب کنیم ودر مقابل آن در ستون fd می‌نویسیم. با تکمیل ستون fd مجموع این ستون را با در نظر گرفتن اعداد مثبت و منفی محاسبه می‌کنیم و در فرمول زیر برای به دست آوردن میانگین حقیقی قرار می‌دهیم.

$$\overline{x} = x^1 + (\frac{\Sigma fd}{N}) \times i$$

میانگین $= \overline{X}$

$X^1 =$ عدد میانی طبقه ای که صفر فرضی در ان قرار دارد.
$\Sigma fd =$ مجموع ستون fd
$N =$ تعداد کل نفرات

به عنوان مثال، جدول زیر را در نظر بگیرید و میانگین آن را از طریـق میـانگین فرضـی بـه دسـت آورید.

طبقات	f	d	Fd
90-94	2	+5	10
85-89	3	+4	12
80-84	4	+3	12
75-79	5	+2	10
70-74	6	+1	6
65-69	8	0	0
60-64	7	-1	-7
55-59	4	-2	-8
50-54	3	-3	-9
45-49	5	-4	-20
40-44	2	-5	-10
35-39	1	-6	-6
	$n = 50$		$\Sigma fd = -10$

$$\bar{x} = x^1 + \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right) \times i$$

عدد میانی طبقه‌ای که صفر فرضی در آن قرار دارد. $x^1 = \frac{65+69}{2} \Rightarrow x^1 = 67$

$$\bar{x} = 67 + \left(\frac{-10}{50}\right) \times 5 = 67 + (-1) \Rightarrow \bar{x} = 66$$

✓ خودآزمایی 9

1- میانگین جدول زیر از طریق میانگین فرضی کدام است؟

1) 4/2   2) 3/7

3) 3/4   4) 4/4

X	F
5-6	3
3-4	5
1-2	2

د) هرگاه میانگین چند گروه و تعداد کل هر گروه مشخص باشد، برای محاسبه میانگین کل و یا میانگین، میانگین‌ها از فرمول زیر استفاده می‌شود.

$$\bar{x} = \frac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2 + N_3\bar{x}_3 + 000}{N_1 + N_2 + N_3 + 000}$$

مثال: در کلاس، سه طبقه دانشجو قرار داده‌ایم تعداد دانشجوی هر طبقه به ترتیب 20، 30 ، 40 نفر است. در صورتی‌که معدل درس بیومکانیک آنها به ترتیب 10 ، 15 ، 13 باشد، معدل کل کلاس را در این درس محاسبه نمایید؟

حل:

$$\bar{x} = \frac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2 + N_3\bar{x}_3}{N_1 + N_2 + N_3} = \frac{(20\times10) + (30\times15) + (40\times13)}{40+30+20} = 13$$

میانگین را وقتی محاسبه می‌کنیم که :

الف. معتبرترین کمیت معرف از مقادیر مرکزی لازم باشد (زیرا تغییرات آن از نمونه‌هایی که از یک جامعه بیرون می‌آید کم است).

ب. محاسبات دیگری مانند اندازه‌های پراکندگی یا ضریب همبستگی مورد نیاز باشد.

پ. توزیع نمره‌ها نرمال و یا در وسط، توزیع متقارن باشد.

ت. نقطه تعادل یا مرکز ثقل توزیع را لازم داشته باشیم.

✓ خودآزمایی 10

1- معلم کلاسی با توجه به اطلاعات زیر می‌خواهد معدل کل را به دست آوردبه نظر شما معدل کل کدام است؟

1) 16   2) 16/25

3) 16/5   4) 17

کلاس	N	$\bar{X}$
1	40	17
2	20	16
3	20	15

2- در صورتی که نمرات درسی سنجش، بیومکانیک و زبان محمد به ترتیب 18 ، 14 ، 14 باشد و دروس سنجش و بیومکانیک 2 واحدی و میانگین نمرات محمد برابر 15 باشد، درس زبان محمد چند واحد است؟

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

2. 13. 4 میانه

مقداری که 50 درصد داده‌ها از آن کمتر و 50 درصد داده‌ها از آن بیشتر هستند، **میانه**[1] نامیده می‌شود.

روش تعیین میانه

الف. محاسبه میانه در اعداد طبقه بندی نشده

برای پیدا کردن میانه‌ی اعدادی که تعداد آن‌ها کم است، نیازی به طبقه بندی نیست، داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و چنانچه **تعداد آن‌ها فرد باشد**، میانه عبارت خواهد بود از مقداری که در وسط توزیع قرار دارد و فراوانی آن یک است (عدد تکرار نشده باشد) و اگر **تعداد اعداد زوج باشد** برای تعیین عددمیانی دو عدد وسطی را جمع و بر دو تقسیم می‌کنیم.

مثال: میانه **اعداد ۷،۹،۱۰،۱۲،۱۳،۱۴،۱۵ را به دست آورید؟**

حل:

اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. 15، 14، 13، 12، 10، 9، 7 چون تعداد فرد باشد، بنابراین میانه برابر 12 است.

مثال: میانه اعداد ۱۲،۱۳ ، 11، 9، 10، 7 را به دست آورید؟

حل: ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. چون تعداد داده‌ها زوج است، میانگین دو عدد وسط یعنی 10و11 با میانه برابر است. لذا میانه برابر $\frac{10+11}{2}=10/5$ می‌باشد.

اگر نمره‌ای که در وسط توزیع قرار دارد دارای فراوانی بیش از یک باشد، تشخیص فاصله بین اعداد برای محاسبه میانه ضروری است. فاصله هر عدد، به حدود واقعی همان عدد تعریف شده است. می‌دانیم که دامنه هر عدد یا حدود واقعی هر عدد 0/5 واحد پایین‌تر و 0/5 واحد بالاتر از همان عدد است، بنابراین عدد 5 شامل کلیه اعدادی است که بین 5 /4 تا5/5 قرار دارند، یعنی عدد 5 دارای حد پایین 4/5 و حد بالای 5/5 است به توزیع زیر توجه کنید.

[1] .Median

3، 4 ، 4 ، 5، 5 ،5، 5، 6 ، 7

در این توزیع تعداد این نمره‌ها فرد است و میانه در محلی که به وسیله علامت پیکان نشان داده شده قرار دارد. به‌عبارت دیگر میانه در گروه نمره‌های 5 واقع شده است، اما کدام عدد 5.

فرض می‌کنیم توزیع 5 ،5 ،5 ، 5 در طبقه 5 /4 تا5/5 یکسان است بنابراین فاصله هر یک از اعداد 5 نسبت به یکدیگر، همان‌طور که در زیر نشان داده شده $\frac{1}{4}$ (یک تقسم تعداد تکرار عدد) یا (0/25) است. عدد 0/25 را به حد پایینی عدد 5 یعنی 4/5 اضافه می‌کنیم تا به حد بالایی یعنی 5/5 برسیم.

4/5 ،4/75،5 ، 5/ 25، 5/5

حالا تمام اعداد را به صورت زیر مرتب می‌کنیم و میانه آن را به دست می‌أوریم.

3 ،4، 4 ، 4/ 5 ، 4/75 ، 5 ، 5/25 ،5/5 ،6، 7

چون تعداد اعداد آن زوج است پس مجموع دو عدد وسطی را بر دو تقسیم می‌کنیم تا عدد میانه به‌دست آید .

$$\text{میانه} = \frac{4/75+5}{2} = 4/875$$

$$\text{میانه} = 4/875$$

روش دیگر برای محاسبه میانه هنگامی که داده‌ها تکراری است:

گاهی در مجموعه داده‌ها بعد از مشخص کردن حل میانه، میانه روی عدد تکراری می‌افتد در این حالت میانه از رابطه زیر به‌دست می‌آید :

$$\text{میانه} = \text{حد پایین عدد تکراری} + \left(\frac{\frac{N}{2} - \text{تعداد اعداد قبل از عدد تکراری}}{\text{تعداد اعداد تکراری}} \right) \times 1$$

مثال : در مجموعه داده های 2، 4 ،6 ،6،10،6،11،6،8،6، 12 میانه عدد 6/25 است (Md=6/25) .

مراحل تعیین میانه در حالت تکراری :

اول، اعداد را مرتب می‌کنیم. 2،4،6،6،6،6،8،10،11،12

دوم، حل پایینی عدد تکراری وسطی برابر 0/5می‌شود.

سوم، از رابطه بالا استفاده می‌کنیم و میانه را محاسبه کرده و می‌نویسیم.

$$Md = 5/5 + \left(\frac{(\frac{10}{2} - 2)}{4}\right) \times 1$$

$$Md = 5/5 + 0/75 = 6/25$$

$$Md = 6/25$$

توجه : در این حالت میانه عددی است که بین حد پایین و حد بالا عدد تکراری قرار می‌گیرد.

محاسبه میانه هنگامی که داده‌ها فراوانی نابرابر دارند:

گاهی در مجموعه داده‌ها بعد از مشخص کردن محل میانه، میانه در بین اعدادی که فراوانی نـابرابر دارند قرار می‌گیرد.

مثال : در مجموعه داده‌های 14و14و16و14و16و12و10و20و17و19 میانه عدد 15/2 اسـت یعنـی (Md=15 /2).

مراحل تعیین میانه در حالت فراوانی نابرابر:

اول، اعداد را مرتب می‌کنیم. 20و19و17و16و16و14و14و14و12و10

دوم، محل میانه را تعیین می‌کنیم. $\frac{10+1}{2}=5/5=$ محل میانه

سوم، در این مثال میانه بین عدد پنجم و ششم قرار دارد. چون فراوانی این دو عدد (یعنی 14و16) برابر نیستند لذا برای محاسبه میانه باید اختلاف این دو عدد، یعنی عدد 2 (2=14-16) را به نسبت 3 (یعنی فراوانی عدد 14) و به نسبت 2 (یعنی فراوانی عدد 16) تقسیم کنیم.

عدد 14 سه بار تکرار می‌شود. $\frac{2\times 3}{5}=1/2$

عدد 16 دو بار تکرار می‌شود. $\frac{2\times 2}{5}=0/8$

بعد می‌توانیم میانه را با دو روش محاسبه کرده و بنویسیم.

$\mathrm{Md} = \text{عدد کوچک} + 1/2 \Rightarrow 14+1/2=15/2$

$\mathrm{Md} = \text{عدد بزرگ} - 0/8 \Rightarrow 16-0/8=15/2$

$\mathrm{Md} = 15/2$

✓ **خودآزمایی 11**

1- میانه اعداد زیر کدام است؟

77 ، 80 ، 78 ، 79 ، 76 ، 82 ،84

1) 79　　2) 77/5　　3) 78/5　　4) 78

2- میانه اعداد زیر کدام است؟

15 ، 14 ، 16 ، 22 ، 13 ، 20 ، 18 ، 19

1) 16　　2) 17　　3) 16/5　　4) 17/5

ب. میانه در اعداد طبقه بندی شده

چنانچه داده‌ها را به صورت توزیع فراوانی طبقه بندی کرده باشیم میانه‌ی آنها به ترتیب با استفاده از الگوریتم زیر به دست می‌آید:

1. ابتدا $\frac{N}{2}$ را محاسبه می‌کنیم. (N تعداد کل فراوانی یا افراد)
2. در ستون فراوانی تجمعی (تراکمی) جدول توزیع فراوانی طبقه بندی شده، طبقه‌ای که دارای فراوانی تجمعی برابر با $\frac{N}{2}$ یا نزدیکترین عدد بزرگتر از $\frac{N}{2}$ باشد را انتخاب می‌نماییم.
3. حد پایین طبقه مورد نظر را یادداشت می‌نماییم.
4. مقداری را که باید به حد پایینی طبقۀ میانه اضافه شود، به ترتیب زیر محاسبه می‌نماییم.
5. در نتیجه، مراحل محاسبه میانه را می‌توان با فرمول زیر ارائه نمود:

$$\text{میانه} = \text{حد پایین طبقه میانه} + \left(\frac{\frac{N}{2} - \text{مجموع فراوانی‌های قبل از میانه}}{\text{فراوانی ساده طبقه میانه}}\right) \times \text{فاصله طبقات}$$

$$Mdn = L + \left(\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right) \times I$$

Mdn = میانه

L = حد پایین طبقه میانه

I = فاصله طبقاتی

Cf = مجموع فراوانی های قبل از طبقه میانه

F = فراوانی ساده طبقه میانه

مثال: میانه جدول زیر را به دست آورید.

x	فراوانی مطلق (f)	فراوانی تجمعی (cf)
35 -39	4	20
30-34	5	16
25 -29	3	11
20-24	4	8
15 -19	2	4
10-14	2	2
	N =20	

حل:

ابتدا $\frac{N}{2}$ را به دست می‌آوریم.

$$\frac{N}{2}=\frac{20}{2}=10$$

با توجه به عدد به‌دست آمده از پایین، فراوانی را جمع می‌کنیم تا به عدد مورد نظر برسیم آن وقت می‌فهمیم که میانه در کجا قرار دارد. میانه در طبقه 29 – 25 قرار دارد. حالا با توجه به فرمول زیر میانه را به‌دست می‌آوریم.

$$mdn = L + \left(\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right) \times I$$

$$mdn = 24/5 + \left(\frac{10-8}{3}\right) \times 5 = 27/8$$

$$mdn = 27/8$$

میانه را وقتی محاسبه می‌کنیم که :

الف. وقت کافی برای محاسبه میانگین نداشته باشیم.

ب. توزیع دارای چولگی قابل ملاحظه باشد؛ یعنی وقتی که یک یا چند نمره در حد افراط و تفریط قرار گیرد.

ج. بخواهیم بدانیم که نتایج اندازه‌گیری در نیمه بالایی توزیع قرار می‌گیرد یا در پایین آن.

د. اندازه‌گیری مقادیر انتهایی توزیع دقیق نباشد.

✓ **خودآزمایی 12**

1- میانه جدول زیر کدام است؟

X_i	F
8-9	1
6-7	2
4-5	2

1) 6/5　　2) 7

3) 6　　4) 7/5

2- چنانچه اندازه‌های یک توزیع را دو برابر کنیم، در مقادیر میانگین و میانه توزیع چه تغییری ایجاد می‌شود؟

1) میانگین و میانه دو برابر می‌شود.

2) میانگین دو برابر شده ولی میانه تغییری نمی‌کند.

3) در میانگین و میانه تغییری ایجاد نمی‌شود.

4) میانگن دو برابر می‌شود ولی میزان تغییر در میانه مشخص نخواهد شد.

3- اگرمیانه را از تمام داده‌ها کم کنیم، میانه اعداد حاصل برابر می‌شود با:

1) صفر　　2) عدد منفی　　3) 1-　　4) 1

4- میانه سه عدد 4 است. اگر هر عدد را با 3 جمع کنیم، میانه جدید برابر خواهد شد با:

1) 1　　2) 4　　3) 7　　4) 12

5- اگر داده‌ها را دو برابر کنیم چه تأثیری در مقدار میانه حاصل می‌شود؟

1) دو برابر می‌شود.　　2) تغییری نمی‌کند.

3) با 2 جمع می‌شود.　　4) وضعیت معلومی ندارد.

6- اگر درداده‌های ما داده پرت وجود داشته باشد بهتر است از .... استفاده کنیم.

1) میانگین　　2) مد　　3) میانه　　4) واریانس

7- برای اندازه‌گیری نمرات زیر کدام شاخص مرکزی و پراکندگی بهتر استفاده شود.

20، 21، ۲۳،۲۱، 20، ۲۵،۲۲، ۶۷،۲۶، ۲۳،۲۵، 20، 24، 60، 26، 25، 22

1)میانه و واریانس　　2)میانگین و انحراف استاندارد

3)میانه و انحراف چارکی　　4)میانگین و انحراف چارکی

8- در اندازه های 21 و 15 و 11 و x و 4 و 3 که به‌طور صعودی مرتب شده‌اند میانه 8/5 می‌باشد، x کدام است؟

1) 5　　2) 1　　3) 21　　4) 6

9- مجموع هفت عدد متوالی برابر 147 است، اگر میانگین این اعداد از میانه کم شود، حاصل کدام است؟

1) صفر　　2) 1　　3) 21　　4) اطلاعات کافی نیست .

3. 13. 4 نما (مد)

نما[1] یکی دیگر از شاخص‌های گرایش به مرکز است؛ یعنی عددی که در توزیع نمره‌ها بیشترین فراوانی را دارد. گاهی اوقات نمرات دارای بیش از یک نماست. نما با داده‌های اسمی به کار برده می‌شود در برآورد سریع مقادیر متوسط (گرایش‌های مرکزی) از نما استفاده می‌شود.

مثال: برای داده‌های ۲،۳،۳،۴،۴،۶،۷ نما برابر با 3و4 می‌باشد. زیرا ماگزیمم فراوانی، مربوط به این دو عدد است. همان‌طوری‌که مثال فوق نشان می‌دهد نما منحصر به فرد نیست.

نکته : بین میانه و میانگین و نما رابطه زیر بر قراراست:

(میانگین) 2-(میانه) (3) = نما یا $Mo = 3Md - 2\bar{X}$

مثال: اگر میانه دسته‌ای از اعداد 15 و میانگین 10 باشد، نمای آن چقدر است؟

حل:

نما = 3 × (15) − 2 × (10) = 45 − 20 ⇒ نما = 25

برای محاسبه نما در داده‌های دسته‌بندی شده می‌توان از فرمول $MO = La + \frac{1}{2}(I)$ استفاده کرد. در آن Mo = مد ، La = حد پایینی واقعی طبقه با بیشترین فراوانی و I = فاصله طبقات، است.

همچنین می‌توان از فرمول $Mo = L + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) \times I$ محاسبه نما استفاده کرد که در این فرمول نیز داریم:

MO = مد

L = کرانه پایینی طبقه‌ای که نما در آن قرار دارد. (طبقه‌ای که بیشترین فراوانی دارد)

d_1 = تفاضل فراوانی مطلق طبقه نما دار از طبقه ما قبل.

d_2 = تفاضل فراوانی مطلق طبقه نما دار از طبقه ما بعد.

I = فاصله طبقات.

تذکر: طبقه‌ای که متناظر با فراوانی ماگزیمم است به طبقه نما دار معروف است.

برای برآورد تقریبی نما، در برخی از اوقات مرکز طبقه‌ای را که فراوانی آن حداکثر است در نظر می‌گیریم؛ ولی اشتباه چنین برآوردی معمولاً زیاد است.

[1] . Mode

مثال ـ نما یا مد جدول زیر را محاسبه کنید.

طبقات	F
18-20	9
15-17	9
12-14	17
9-11	11
6-8	5
3-5	3

حل: طبقه‌ای که بیشترین فراوانی را دارد انتخاب می‌کنیم. در این جدول، طبقه 12-14 دارای بیشترین فراوانی می‌باشد، طبق فرمول بالا حل داریم.

$d_1= 17- 11=6$

$d_2=17 -9 =8$

$$Mo = L + \left(\frac{d_1}{d_1+d_2}\right) \times I$$

$$Mo = 11/5 + (\frac{6}{6+8}) \times 3 \Rightarrow Mo = 12/78$$

روش دیگر : برای پیدا کردن مد در جدول فراوانی دسته‌هایی که فراوانی آن از همه بیشتر است را پیدا می‌کنیم. نشان آن دسته (مرکز آن دسته) مد می‌باشد.

حل مثال بالا : دسته 12-14 بیشترین فراوانی را دارند نشان آن را محاسبه می‌کنیم:

$\frac{12+14}{2} = 13$ پس مد 13 می‌باشد.

نما را وقتی محاسبه می‌کنیم که :

الف. برآورد سریعی از اندازه‌های مرکزی توزیع لازم باشد.

ب. برآورد تقریبی از اندازه‌های مرکزی توزیع لازم باشد.

ج. بخواهیم بدانیم کدام نمره بیشتر تکرار شده است.

د. مقیاس ما اسمی باشد.

✓ **خودآزمایی 13**

1- برای برآورد سریع مقدار متوسط یک سری اعداد خام احتیاج به چه شاخصی داریم؟

1) دامنه تغییرات 2) میانگین 3) مد 4) میانه

2- نما در اعداد زیر کدام است؟

2 ، 3 ، 5 ، 4 ، 5 ، 6 ، 3 ، 8 ، 3

1) 3 2) 5 3) 5 و 3 4) 8

3- اگر میانه یک سری اعداد 15 و میانگین آنها نیز 15 باشد نمای آن کدام است ؟

1) 15 2) 17 3) 18 4) 14

4- اگر میانگین یک گروه داده‌ها 25 و نمای آن 40 باشد، مقدار عددی میانه چقدر است؟

1)20 2)30 3) 35 4) 40

5- میانگین، میانه و نمای رکورد 10 تا 20 که هر یک از رکوردها دارای فراوانی 5 هستند کدام است ؟

1) هر سه = 15 2) میانگین = 15 ، نما = 14 ، مد = 4

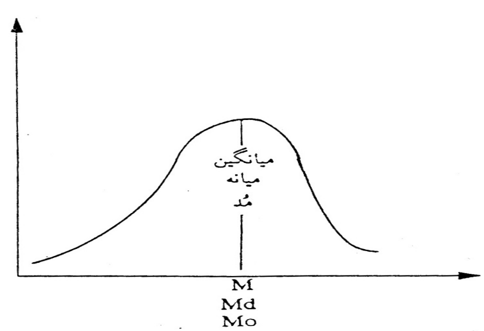
3) میانگین = 15 ، نما و میانه نداریم 4) میانگین و میانه = 15 ، نما نداریم

6- در هر جامعه آماری کدام‌یک از شاخص‌های زیر ممکن است منحصر به فرد <u>نباشد</u>؟

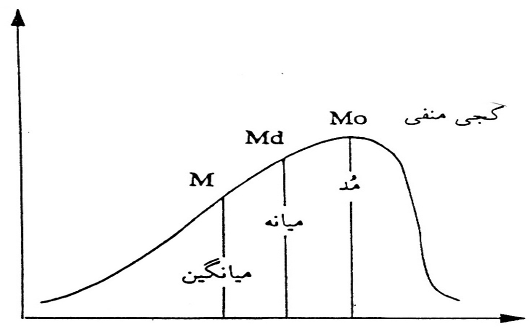
1) میانگین 2) میانه 3) مد 4) دامنه تغییرات

14. 4 میانگین ،میانه و نما در نمودارهای مختلف

الف) اگر میانگین، میانه و نما (مد) برابر باشد (نمودار طبیعی و متقارن یا توزیع نرمال) (چولگی صفر).

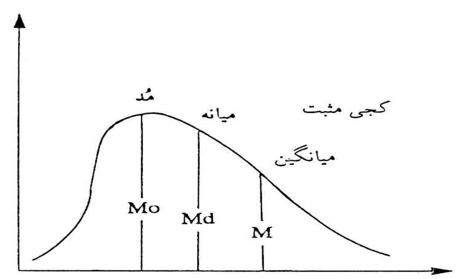


ب) اگر میانگین از میانه و مد کوچکتر باشد (چـولگی منفـی یـا بـه چـپ)، در کجـی منفـی میانگین به نمره‌های کوچکتر گرایش دارد. اگر سؤالات یک درس آسان باشد معمولاً منحنی کجـی منفی پیدا می‌کند.



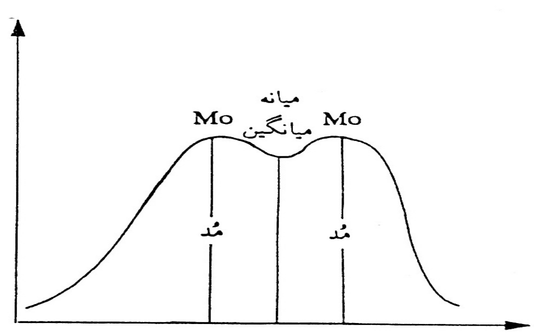
مُد(نما) > میانه > میانگین

ج) اگر میانگین از میانه و مد بزرگتر باشد (چولگی مثبت)، در کجـی مثبـت میـانگین بـه نمـرات بزرگتر گرایش پیدا می‌کند. اگر سؤالات یـک درس سـخت باشـد معمـولاً منحنـی کجـی مثبـت پیـدا می‌کند.



مُد(نما) < میانه < میانگین

د) در صورتی که دو نما یا مد، میانگین و میانه برابر باشد.



✓ خودآزمایی 14

1- اگر در یک کلاس مقدار نمرات میانگین، میانه و نما برابر باشد کدام گزینه صحیح است؟

1) جامعه کجی مثبت دارد.
2) جامعه طبیعی است.
2) جامعه کجی منفی دارد.
4) جامعه طبیعی و پراکندگی نمرات صفر می باشد.

2- اگر میانگین نمرات کلاسی کوچکتر از میانه و مد باشد آنگاه:

1) نمودار کجی مثبت دارد. 2) نمودار کجی منفی دارد.
3) نمودار طبیعی 4) هیچ تغییری نمی کند.

3- اگر میانگین نمرات کلاسی بزرگتر از میانه و مد باشد می‌توان گفت:

1) سئوالات سخت بوده است. 2) سئوالات متوسط بوده است.
3) سئوالات آسان بوده است. 4) سئوالات بین سخت و متوسط بوده است.

4- رابطه مقادیر تمایل مرکزی در کلاسی که اکثر فراگیران وضعیت خوبی دارند، به شکل زیر است:

1) میانگین > میانه > نما 2) میانه > میانگین > نما
3) نما > میانه > میانگین 4) نما > میانگین > میانه

5- کدام‌یک از عبارت زیر صحیح است؟

1) در کجی مثبت میانگین کوچکتر از میانه و نما است.
2) در کجی مثبت میانگین بزرگتر از میانه و نما است.
3) در کجی منفی میانگین بزرگتر از میانه و نما است.
4) در کجی منفی نما کوچکتر از میانگین است.

6- در یک منحنی کجی مثبت، اگر نما 10 و میانه 14 باشد میانگین کدام است؟

1) 10 2) 12 3) 14 4) 16

7- در یک منحنی که دارای کجی منفی می‌باشد، میانگین به سمت چه نمره‌هایی گرایش دارد؟

1) نمره‌های بزرگتر 2) نمره صفر

3) نمره‌های کوچکتر		4) اصولاً میانگین از نمره‌های کران تاثیر نمی‌پذیرد.

8- بر اساس رابطه داده شده، شکل تقریبی منحنی توزیع را تعیین کنید.

$P_{75} - P_{50} < P_{50} - P_{25}$

1) منحنی کجی به چپ		2) منحنی نرمال

3) منحنی با کجی قرینه		4) منحنی با کجی به راست.

9- میانگین، میانه و نمای رکوردهای 10 تا 30 که هر یک از رکوردها دارای فراوانی 5 هستند، کدام است؟

1) هر سه 20		2) میانگین=20 و نما و میانه نداریم

3) میانگین و میانه=20 و نما=4		4) میانگین و میانه=20 و نما نداریم

10- اگر در آزمونی، میانگین رکورد افراد دارای45 تکرار باشد و بیشترین تکرار این آزمون نیز مربوط به این تکرار باشد، میانه آزمون کدام است؟

1) 40	2) 45	3) 41	4) 42

11- در کلاس درس سنجش که بالاترین فراوانی نمره مربوط به دانش‌آموزانی باشد که بیشتر از میانگین کسب کرده‌اند، کدام شاخص برای نشان دادن تفاوت نمرات درون کلاسی مناسب‌تر است؟

1) انحراف استاندارد (معیار)		2) واریانس

3) انحراف چارکی		4) دامنه تغییرات

12- کدام شاخص میزان تقارن یک توزیع معین را نشان می‌دهد؟

1) کجی(کشیدگی)	2) میانه	3) میانگین	4) نما

13) توزیع نمره های دواطلبان ورود به دانشکده در آزمون هوش، در شرایطی که اکثر آن ها نمره بالا گرفته اند به چه صورت است؟

1)متقارن	2)کجی مثبت	3) تقریباً	4)کجی منفی

15. 4 معیارهای تغییر پذیری یا پراکندگی

پراکندگی به حدودی که افراد یا نمره‌ها از یکدیگر اختلاف دارند گفته می‌شود. به بیان دیگر تغییرپذیری نمره‌ها عبارت است از میزان اختلاف آن‌ها با میانگین و با یکدیگر. برای مثال فرض کنید دو دسته نمره خام (الف و ب) به شرح زیر وجود دارد:

الف)۵،۷، 9 ب) 3 ، 7 ، 11

هر چند که هر دسته نمره دارای میانگین مساوی 7 است، تغییر پذیری(پراکندگی) در نمره‌های دسته (ب) بیشتراز دسته (الف) است.

پراکندگی را می‌توان از طریق محاسبه دامنه تغییرات، انحراف متوسط، انحراف چارکی، واریانس، انحراف استاندارد (انحراف معیار) و ضریب تغییرات به‌دست آورد.

1. 15. 4 دامنه تغییرات

که قبلاً گفته شد دامنه تغییرات فاصله بین کوچکترین و بزرگترین نمره در یک توزیع را نشان می‌دهد. لذا چندان قابل اعتماد نبوده و اعتبار کمتری به‌عنوان شاخص پراکندگی دارد و از فرمول زیر به‌دست می‌آید.

$R = (H - L) + \alpha$ یا $R = (X_{max} - X_{min}) + \alpha$

موارد استفاده دامنه تغییرات :

الف. به فوریت شاخصی از اندازه‌های پراکندگی لازم باشد.

ب. اطلاعاتی درباره نمره‌ها در بالا و پایین توزیع نیاز باشد.

مثال: دامنه تغییرات اعداد 13 ، 11 ، 10 ، 9 ، 5 ،3 را به‌دست آورید.

حل:

$R = (13 - 3) + 1 \Rightarrow R = 11$

تذکر: عدد یک در بالا، حاصل نیم نمره حدود واقعی بالایی و پایینی نمرات است.

نکته: هنگامی از دامنه‌ی تغییرات استفاده می‌شود که نمره‌ها دارای پراکندگی خیلی زیادی هستند.

نکته: اگر عدد ثابتی به داده هایی اضافه یا کم شود دامنه تغییرات هیچ تغییری نمی‌کند.

نکته: اگر عدد ثابتی در همه داده ها ضرب یا تقسیم شود دامنه تغییرات نیز در آن عدد ثابت ضرب یا تقسیم می‌شود.

✓ **خودآزمایی 15**

1- کدام یک از شاخص‌های پراکندگی فقط تحت تأثیر دو عدد بالایی و پایینی قرار می‌گیرد؟

1) واریانس　　2) انحراف استاندارد

3) دامنه تغییرات　　4) انحراف متوسط

2- در یک امتحان سنجش، همه افراد نمره منفی گرفته‌اند کدام عبارت زیر صحیح است؟

1) دامنه تغییرات منفی است.　　2) میانگین کلاس منفی است.

3) انحراف معیار کلاس منفی است.　　4) واریانس کلاس منفی است.

3- اگر 2 نمره به بالاترین رکورد داده‌ها اضافه و 2 نمره از پایین‌ترین رکورد کم کنیم چه تغییری در دامنه تغییرات داده‌ها بوجود می‌آید؟

1) 4 نمره بیشتر می‌شود.　　2) 4 نمره کم می‌شود.

3) هیچ فرقی نمی‌کند.　　4) اطلاعات دیگری لازم است.

4- در صورتی‌که به فوریت شاخصی از اندازه‌های پراکندگی لازم باشد از کدام‌یک از پراکندگی‌ها استفاده می‌شود؟

1) واریانس　　2) انحراف معیار　　3) انحراف متوسط　　4) دامنه تغییرات

5- اگر به تمام داده‌های آماری سه واحد اضافه شود دامنه تغییرات چه تغییری می‌کند؟

1) سه واحد اضافه می شود.　　2) سه واحد کم می‌شود.

3)در عدد 3 ضرب می شود.　　4) تغییر نمی کند.

6- **اگر دامنه تغییرات x_5 و ...و x_2 و x_1 برابر 5 باشد دامنه تغییرات $\frac{x_5}{2}$ و ... و $\frac{x_2}{2}$ و $\frac{x_1}{2}$ کدام است؟**

1) 10　　2) 25　　3) 5　　4) 2/5

2. 15. 4 انحراف متوسط (انحراف میانگین)

انحراف متوسط[1]یا انحراف از میانگین به ما کمک می‌کند تا پراکندگی داده‌ها را توصیف کنیم. بدین‌معنا که انحراف از میانگین، شاخصی را برای تعیین مقدار پراکندگی نمره ها از میانگین فراهم می‌کند. انحراف به زبان ساده عبارت است از فاصله هر نمره از میانگین توزیع آن و چون نمره‌ها در اطراف میانگین به صورت مثبت و منفی پراکنده هستند، میزان متوسط واقعی برابر با صفر خواهد بود. متوسط واقعی انحرافات چیزی در مورد توزیع به ما نخواهد گفت بنابراین برای محاسبه متوسط انحرافات از قدر مطلق انحراف از میانگین استفاده می‌شود. اگر انحراف متوسط را با AD نشان دهیم داریم:

---

١ . Average deviation

$AD = \frac{\Sigma |x_i - \overline{x}|}{N}$ طبقه‌بندی نشده

$AD = \frac{\Sigma F |x_c - \overline{x}|}{N}$ دسته‌بندی شده

موارد استفاده انحراف متوسط :

1. تعداد زیادی از نمرات خیلی بزرگ و یا خیلی کوچک موجود که وقتـی انحـراف آن‌هـا از میانگین مجذور می‌شود اثر زیادی بر مقدار انحراف استاندارد بگذارد.
2. شاخص از پراکندگی نسبتاً بدون زحمت لازم باشد.
3. توزیع تقریباً نرمال باشد.

مثال: انحراف متوسط اعداد زیر را به‌دست آورید.

10 ، 8 ، 7 ، 3 ، 2

حل:

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x_i}{N} = \frac{30}{5} \Rightarrow \overline{x} = 6$$

$x_i - \overline{x}$	$\mid x_i - \overline{x} \mid$
10 -6 =4	$\mid 10-6 \mid = 4$
8 -6 =2	$\mid 8-6 \mid = 2$
7-6 =1	$\mid 7-6 \mid = 1$
3-6 = -3	$\mid 3-6 \mid = 3$
2-6= -4	$\mid 2-6 \mid = 4$
	$\Sigma \mid x_i - \overline{x} \mid = 14$

$$AD = \frac{\Sigma |x_i - \overline{x}|}{N}$$

$$AD = \frac{14}{5} \Rightarrow AD = 2/8$$

مثال:انحراف متوسط نمره های زیر را محاسبه کنید؟

x	f
18- 20	5
10-17	9
12- 14	17
9-11	11
6- 8	5
3- 5	3

حل :

$$\bar{x}=\frac{\sum f_{x_c}}{N}\Rightarrow \bar{x}=\frac{(5\times19)+(9\times16)+(17\times13)+(12\times10)+(5\times7)+(3\times4)}{50}\approx 12/34$$

x	f	X_c عددمیانی	$\lvert x_c-\bar{x}\rvert$	$f\lvert x_c-\bar{x}\rvert$
18-20	5	19	19- 12/34= 6/66	5× 6/66= 33/30
10-17	9	16	16- 12/34= 3/66	9× 3/66 32/94
12-14	17	13	13 -12/34= 0/66	17× 0/66= 11/22
9-11	11	10	10- 12/34= 2/34	11× 2/34= 25/74
6-8	5	7	7- 12/34 = 5/34	5× 5/34= 26/70
3-5	3 N= 50	4	4- 12/34 = 8/34	3× 8/34= 25/02 $\sum f\lvert x_c-\bar{x}\rvert=154/92$

$$AD=\frac{\sum f\lvert x_c-\bar{x}\rvert}{N}\Rightarrow AD=\frac{154/92}{50}=3/099$$

✓ **خودآزمایی 16**

1- اگر $\sum\left|Xi-\overline{X}\right|=27$ و تعداد افراد جامعه 9 نفر باشد، انحراف متوسط جامعه کدام است؟

1) 15　　2) 10　　3) 5　　4) 3

2- انحراف متوسط نمرات زیر کدام است؟

11 ، 10 ، 9 ، 8 ، 7

1) 2　　2) 1/2　　3) 2/25　　4) 3/5

3- زمانی‌که به شاخصی از پراکندگی نسبتاً بدون زحمت لازم باشد، از کدام پراکندگی استفاده می‌شود.

1) انحراف معیار　　2) انحراف متوسط　　3) واریانس　　4) دامنه تغییرات

3. 15. 4 انحراف چارکی

انحراف چارکی[1]، میزان پراکندگی را در اطراف مرکز توزیع نمره ها نشان می‌دهد. جامعه آماری به چهار قسمت تقسیم می‌شود که چارک اول تا سوم به صورت زیر مشخص می‌شوند:

چارک اول (Q_1): عددی است که از 25 درصد ($\frac{1}{4}$) داده ها بزرگتر و از 75 درصد ($\frac{3}{4}$) داده‌ها کوچکتر است.

چارک دوم (میانه): چارک دوم که با Q_2 نشان داده می شود همان میانه است که از 50 درصد (نصف) داده بزرگتر و از 50 درصد (نصف) داده‌ها کوچکتر است.

چارک سوم (Q_3): عددی است که از 75 درصد ($\frac{3}{4}$) داده‌ها بزرگتر و از 25 درصد ($\frac{1}{4}$) داده‌ها کوچکتر است. از دامنه‌ی تغییرات با ثبات‌تر است و از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{\overline{Q}=\frac{Q_3-Q_1}{2}=\frac{p_{75}-p_{25}}{2}}$$

از انحراف چارکی برای معرفی شاخص متوسط از میانه یا تعیین حدود نمره‌های 50 درصدی وسط مورد استفاده قرار می‌گیرد.

یکی از موارد مهم استفاده انحراف چارکی معرفی چولگی (کجی) توزیع است. در توزیع‌های متقارن، فاصله چارک‌های یکم و سوم از میانه یکسان است، اما اگر چولگی توزیع، مثبت (یعنی به

[1]. Quartile Deviation

راست) باشد مقدار $(Q_3 - Q_2)$ بزرگتر از $(Q_2 - Q_1)$ است و به عکس اگر چولگی توزیع منفی (به چپ) باشد عکس این مطلب صادق خواهد بود. بنابراین داریم:

وقتی چولگی صفر و توزیع متقارن باشد. $Q_3 - Q_2 = Q_2 - Q_1$

وقتی چولگی مثبت باشد. $Q_3 - Q_2 > Q_2 - Q_1$

وقتی چولگی منفی باشد. $Q_3 - Q_2 < Q_2 - Q_1$

نکته: منحنی توزیع نمرات یک کلاس با گرایش مثبت(چولگی مثبت) معرف یک کلاس ضعیف و کلاس با گرایش منفی (چولگی منفی) معرف یک کلاس با سطح قوی‌تر است.

موارد استفاده از انحرف چارکی:

1. برای معرفی شاخص متوسط، از میانه استفاده شده باشد.
2. توزیع نرمال نباشد.
3. چند نمره خیلی بزرگ و یا خیلی کوچک داشته باشیم یا چولگی توزیع شدید باشد.
4. حدود نمره‌های 50 درصد وسط لازم باشد.

الف) محاسبه انحراف چارکی در اعداد طبقه بندی نشده

برای محاسبه انحراف چارکی ابتدا داده‌ها را از کوچکتر به بزرگ مرتب می‌کنیم، سپس میانه توزیع را به‌دست می‌آوریم(Q_2). بعد از این کار تعدادی از اعداد در سمت راست میانه و تعدادی در سمت چپ آن واقع می‌شوند. با بدست آوردن میانه اعداد سمت راست چارک سوم (Q_3) و با بدست آوردن میانه اعداد سمت چپ چارک اول (Q_1) بدست می‌آید. مطابق فرمول، تفاضل چارک اول و سوم را نصف می‌کنیم تا انحراف چارکی به دست آید.

$$\boxed{\overline{Q} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}}$$

مثال: انحراف چارکی توزیع 8 ، 12، 4 ، 9 ، 5، 11، 10، 7 ،6 کدام است؟

حل: اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و آنگاه میانه آن را به دست می‌آوریم(Q_2). در این توزیع $Q_2 = 8$ می‌باشد. و اعداد سمت راست میانه ، عدد وسط آن (Q_3) را بدست می‌آوریم که برابر 10/5 می‌باشد. از اعداد سمت چپ، عدد وسطی آن (Q_1) را به‌دست می‌آوریم که برابر 5/5 می‌باشد.

4 ، 5 ،6 ،7 ، 8، 9 ، 10 ،11 ، 12

9.10.11.12

Q_3=10/5 $$\overline{Q} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{10/5 - 5/5}{2} = 2/5$$

4 ،۶،۵ ، 7

Q_1=5/5

ب. محاسبه انحراف چارکی در اعداد طبقه بندی شده

برای محاسبه چارک اول و سوم ابتدا فراوانی تراکمی داده را در جدول به دست آورده. سپس از روابط زیر چارک‌ها را به دست می‌آوریم.

$$Q_3 = L + \left(\frac{\frac{3N}{4} - cf_i}{f_i}\right) \times I \text{ و } Q_1 = L + \left(\frac{\frac{N}{4} - cf_i}{f_i}\right) \times I$$

Q_1 = چارک اول

Q_3 = چارک سوم

Cf_i= فراوانی تراکمی طبقه ما قبل

L= کرانه پایینی که Q_1 و Q_3 در آن قرار دارد.

I= فاصله طبقات

مثال: اطلاعات زیر در مورد نمرات درس حرکت شنا سی 40 دانشجوی تربیت بدنی است انحراف چارکی (چارک متوسط) آن را بدست آورید؟

حل:

طبقات	F	CF_i
18-20	10	40
15-17	5	30
12-14	15	25
9-11	5	10
6-8	5	5
	N =40	

1ـ محاسبه چارک اول (Q_1) یا نقطهٔ درصدی 25:

$$P_{25} = \frac{25}{100} N = \frac{N}{4} \Rightarrow P_{25} = \frac{40}{4} = 10$$

نگاه می‌کنیم که نمره 10 در کدام طبقه قرار می‌گیرد. (طبقه 11-9) طبق فرمول بالا حل می‌کنیم.

$$Q_1 = L + \left(\frac{\frac{N}{4} - cf_i}{f_i}\right) \times I \Rightarrow Q_1 = 8/5 + \left(\frac{10-5}{5}\right) \times 3 \Rightarrow Q_1 = 11/5$$

2- محاسبه چارک سوم (Q_3) یا نقطه درصدی 75 :

$$P_{75}=\frac{75}{100}N=\frac{3}{4}N \Rightarrow P_{75}=\frac{3}{4}\times 40=\frac{120}{4}=30$$

طبقه مورد نظر 17-15 می‌باشد چون 30 در آنجا قرار می‌گیرد.

$$Q_3=L+(\frac{\frac{3N}{4}-cf_i}{f_i})\times I \Rightarrow Q_3=14/5+(\frac{30-25}{5})\times 3 \Rightarrow Q_3=17/5$$

بنابراین انحراف چارکی برابر است با:

$$\bar{Q}=\frac{Q_3-Q_1}{2} \Rightarrow \bar{Q}=\frac{17/5-11/5}{2} \Rightarrow \bar{Q}=3$$

✓ **خودآزمایی 17**

1- اگر چارک اول برابر 13/5 و چارک سوم برابر با 18/5 باشد ،چارک متوسط کدام است؟

1) 2/5 2) 3/5 3) 5 4) 16

2- اگر دامنه تغییرات چارک اول و سوم برابر 14 باشد انحراف چارکی کدام است؟

1) 6 2) 7 3) 12 4) 14

3- در توزیعی که از میانه برای تعیین مقادیر گرایش به مرکز استفاده می‌شود بهره‌گیری از کدام شاخص پراکندگی مناسب است؟

1) انحراف متوسط 2) انحراف معیار 3) دامنه تغییرات 4) انحراف چارکی

4- اگر چند نمره خیلی بزرگ یا چند نمره خیلی کوچک داشته باشیم ازکدام مقادیر گرایش به مرکز استفاده می‌کنیم؟

1) انحراف معیار 2) دامنه تغییرات 3) انحراف چارکی 4) انحراف متوسط

5- **بین چارک‌های اول و دوم چند درصد اطلاعات قرار دارد؟**

1) 25 % 2) 50 % 3) 75 % 4) 100 %

4. 15. 4 واریانس

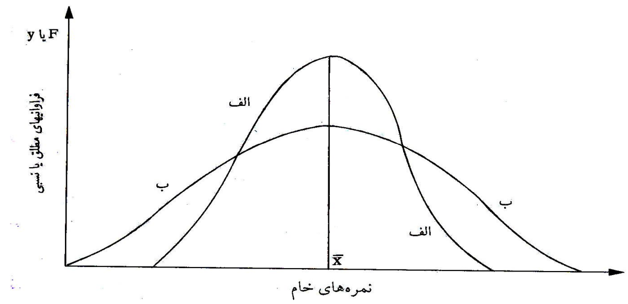
یکی دیگر از اندازه‌های پراکندگی که تمام نمرات روی آن اثر می‌گذارند، واریانس[1] است. واریانس مقیاسی است که نشان می‌دهد که داده‌ها حول میانگین چگونه پخش شده‌اند. اگر یکی از نمره‌ها تغییر کند واریانس نیز تغییر می‌کند. به این علت از اهمیت بیشتری برخوردار است. واریانس در واقع میانگین مجذور انحرافات می‌باشد. واریانس کمتر بدین معنا است که انتظار می‌رود اگر نمونه‌ای از توزیع مزبور انتخاب شود مقدار آن به میانگین نزدیک باشد.

شکل 6-4 دو کلاس الف و ب را نشان می‌دهد که از نظر گرایش مرکزی مشابه ولی از جهت تغییر-

---

[1].variance

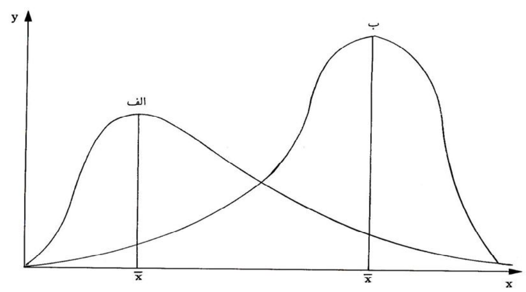
پذیری نمره‌ها متفاوت هستند. همان طوری که در شکل مشاهده می‌کنید نمر ه‌های کلاس الف بیشتر در حدود گرایش مرکزی خود که با یک خط عمود نشان داده شده است متمرکز هستند، در حالی در کلاس ب نمره‌های بیشتری در فاصله های دورتر از شاخص گرایش مرکزی خود واقع شده‌اند.کلاس الف را متجانس‌تر می گویند.



شکل 6-4: تفاوت واریانس های در دو گروه با میانگین های مساوی

شکل 7-4 دو منحنی کج را نشان می‌دهد. هر دوی این منحنی‌ها فاقد ویژگی قرینگی نسبت به نقطه مرکزی خود هستند. در منحنی الف، گرایش منحنی به سمت راست یا نمره‌های بالاست. این گرایش مثبت یا خوب می‌نامند. منحنی ب را دارای گرایش بد، به چپ یا منفی گویند.

منحنی توزیع نمرات یک کلاس با گرایش مثبت معرف یک کلاس ضعیف و کلاس با گرایش منفی معرف یک کلاس با سطح قوی‌تر است.



شکل 7-4: توزیع در دو گروه با میانگین و واریانس های متفاوت

فرمول واریانس به صورت حاصل تقسیم مجموع مجذور انحرافات به تعداد کل اعداد می‌باشد.

برای محاسبه واریانس اعداد طبقه‌بندی نشده از فرمول زیر استفاده می شود:

$$S^2 = V = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{N} \quad \text{یا} \quad S^2 = V = \frac{\sum X_i^2}{N} - \left(\frac{\sum X_i}{N}\right)^2 \quad \text{و} \quad S^2 = V = \frac{\Sigma x_i^2}{N} - \bar{x}^2$$