پژوهش عملیاتی ۱

(Operations research)

مدرس : سیروس کلوانی

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

سخنی با دانشجویان :

آنچه امروز به عنوان دانش مدیریت مطرح است، از دیرباز در گنجینه معارف بشری موجود بوده و با گذشت زمان توانسته است با بهره گیری از تجربه های عملی انسان در اداره جوامع بشری، گسترش یابد. در سده اخیر، شتاب رشد دانش مدیریت، افزایش یافت تا جایی که به عنوان دانش مستقل شناخته شد. بنابراین نظریه های موجود در دانش مدیریت، نظریه هایی نوظهور نیستند بلکه نظریه هایی هستند که پایه و اساس آنها بر تجارب مدیریتی گذشتگان بنا شده است. جمع آوری و نظریه پردازی در دانش مدیریت، اغلب به وسیله نویسندگان و دانشمندان غربی انجام گرفته و از این رو برخی گمان کرده اند که مدیریت، دانشی غربی است و یا به وسیله غربیان پدید آمده است؛ در حالی که سوابق تاریخی گویای آنست که دانش مدیریت ابتدا در مشرق زمین مورد توجه قرار گرفته است.

به هر شکل، آنچه اهمیت دارد این است که در عصر جدید باید دانشمندان و کاوشگران با کمک فکر و اندیشه خود و با استفاده از منابع مربوط، در جستجوی یافتن نظریه های نو و مطابق با فرهنگ دینی و ملی خود باشند.

در این میان، آشنایی با کتاب پژوهش عملیاتی یکی از مباحث ریاضی، رشته حسابداری و مدیریت و اقتصاد هست که در دانشگاه‌ها تدریس می‌شود. بسیاری از دوستان دانشجو که پایه‌ی قوی برای ریاضیات ندارند، در حل مسئله این درس دچار مشکل می‌شوند.

مطالب این کتاب، از منابع مختلف و معتبر فارسی و لاتین، گردآوری شده و اغلب تمرینها و مسائل مورد بازنگری قرار گرفته و به روز در آمده اند . رئوس مطالب تدوین شده « شورایعالی برنامه ریزی ستاد انقلاب فرهنگی » در این مجموعه بر اساس سر فصل مصوب برای دانشجویان رشته حسابداری در درس پژوهش عملیاتی(۱) گردآوری شده است.

بخاطر همین، تصمیم گرفته‌ام بر اساس جزوه‌ای که از کتابها و جزوات درسی مختلف در دانشگاه‌ها نوشته بوده‌ام یک جزوه‌ای آماده کنم که در این جزوه موضوعات به صورت تحلیلی و ساده و گاهی به زبان محاوره بیان شده است تا دانشجویان ترغیب به خواندن جزوه بشوند.

سیروس کلوانی

پاییز ۹۶

فهرست مطالب :

فصل اول.. کلیات تحقیق در عملیات. ۵
فصل دوم... برنامه ریزی خطی « مدل سازی » ۲۶
فصل سوم: بخش اول روش سیمپلکس ..(Simplex Method).....۳۹
فصل سوم بخش دوم سیمپلکس « روش M بزرگ یا روش متغیر مصنوعی» ۶۰
فصل سوم بخش سوم روش دوفازی یا دو مرحله ایی ۶۵
فصل چهارم... تصمیم گیری در شرایط اطمینان ۷۲
فصل پنجم ... تخصیص کار (واگذاری) ۸۳
فصل ششم ... مدل کنترل موجودی (در حالت مشخص) ۸۹
فصل هفتم ... تصمیم گیری در شرایط عدم اطمینان کامل ۹۷
فصل هشتم... تصمیم گیری در شرایط ریسک (از نوع مدلهای قیاسی و احتمالی) ۱۰۳
فصل نهم... تصمیم گیری شاخه های (تصمیم گیری در شرایط ریسک از نوع مدلهای شمایلی و احتمالی)۱۱۴
منابع :.....۱۱۸

فصل اول...

کلیات تحقیق در عملیات (۱)

کلیات تحقیق در عملیات ...

کلیات:

در این فصل ابتدا تعاریفی از پژوهش عملیاتی ارائه می‌شود و در ادامه پیدایش پژوهش عملیاتی، انواع پژوهش در عملیات، روش پژوهش در حل مسائل واقعی، جمع‌آوری داده‌ها، مدل‌سازی داده‌ها، ساده سازی مدل، مدل-های پژوهش عملیاتی، اعتبار سنجی مدل، حل مدل ،پیاده سازی مدل از جمله مباحث این فصل می‌باشد.

مقدمه:

هر مسئله نیازمند تصمیم گیری را می‌توان در انواع مسائل پژوهش عملیاتی (Operations research) طبقه-بندی کرد. امروزه روش‌های تصمیم‌گیری بطور قابل ملاحظه‌ای تغییر یافته است. پیچیدگی، هزینهٔ بالای عملیات و وسعت تشکیلات سازمانی، لزوم شیوه‌های مناسب تصمیم‌گیری و تصمیم‌های مستدل را برای مدیران روشن می‌سازد. آنچه مدیران بیش از هر چیز نیاز دارند، ابزاری راحت، مطمئن و کاربردی برای یاری رساندن به آنها در تصمیم‌گیری است.

موضوع این بحث یکی از کاربردی‌ترین علوم، یعنی «پژوهش عملیاتی» است که به خوبی می‌تواند ابزاری کارآمد برای حل مسائل مدیران باشد. برای اکثر مدیران ما، پژوهش عملیاتی هنوز چیزی بیش از یک اسم نیست. پژوهش عملیاتی با بسیاری از مسائل محوری تصمیم‌گیری مدیران در ارتباط است، پژوهش عملیاتی مجموعه‌ای از تکنیک‌ها و روش‌های استنتاج شده از ریاضیات و دیگر علوم است که بطور قابل ملاحظه‌ای در بهبود تصمیمات مدیریتی می‌تواند مؤثر واقع شود.

اگرچه این علم هنوز در زمرهٔ علوم نو محسوب می‌شود، ولی به خوبی توانایی خود را در حل مسائلی مثل برنامه-ریزی تولید، تخصیص منابع، کنترل موجودی، تبلیغات و غیره نشان داده است. مدیرانی که به کیفیت نتایج تصمیمات خود علاقه‌مندند نباید نسبت به پژوهش عملیاتی بی‌تفاوت باشند. در جهان رقابتی امروز، بقای یک سازمان به تصمیمات مدیرانش وابسته است. این تصمیمات نوع و مقدار منابع سازمان را تعیین می‌کند. تصمیمات درست مدیران موجب رونق و رشد یک مؤسسه و تصمیمات غلط منجر به از دست دادن بازار و نهایتاً فروپاشی می‌شود. در جهان امروز ارزش یک مدیر به طور عمده بر اساس کیفیت تصمیماتش سنجیده می‌شود.

بنابراین مدیران باید با دانش‌هایی که آنان را در تصمیم‌گیری بهتر یاری می‌کند آشنا شوند. پژوهش عملیاتی یکی از این دانش‌هاست.

تحقیق در عملیات، یکی از رشته‌های دانشگاهی است که بر اساس ترکیبی از رشته‌های مختلف (چون ریاضی، آمار، اقتصاد، مهندسی و...) بنا شده است. از آنجا که علم مدیریت نیز یک علم بین رشته‌ای است از این جهت، این دو رشته بی‌شباهت به همدیگر نیستند. یکی از وظایف مدیریت تصمیم‌گیری است. فنون تحقیق در عملیات با توجه به قابلیت فوق‌العاده‌ای که در فرموله کردن مسائل سازمانی و حل آنها دارند، مدیران را در ایفای این نقش (تصمیم‌گیری) یاری می‌دهند. با توجه به پیچیدگی محیط سازمانی و تأثیر پذیری از عوامل متعدد درون‌زا و برون‌زا مدیریت به ابزاری توانمند نیاز دارد که وی را در اندازه‌گیری این عوامل و یا هدایت و کنترل آنها یاری رساند. به جرأت می‌توان گفت که فنون تحقیق در عملیات یکی از کارآمدترین ابزارهای مدیریت در این راستا هستند.

پیدایش و توسعهٔ پژوهش عملیاتی

در گذشته، تحقیق و توسعه اغلب محدود به مسیرهای خاص و جدا از هم بوده‌اند، پژوهش عملیاتی زمانی شروع به بیرون آمدن از پوسته خود نمود که تکنیک‌های پیشگیری جایگزین روشهایی مانند تاس انداختن شدند.

اولین استفاده سازمان یافته از تحقیق در عملیاتی در جنگ جهانی دوم به سال ۱۹۴۱ انگلستان بود. مدیریت نظامی انگلیس در آن برهه، گروهی از دانشمندان را که با مسائل تاکتیکی و استراتژیک در رابطه با دفاع هوایی و زمینی تخصص داشتند، مامور تحقیقاتی در این فرضیه نمود.

دلیل اصلی انجام چنین مطالعاتی محدودیت بودجه نظامی بود. بدین سبب لازم بود که چگونگی استفاده مناسب و حداکثر از منابع نظامی مورد بررسی و مطالعه قرار گیرد. چنانچه از نام تحقیق در عملیات استفاده می گردد علت بکارگیری آن ماهیت مطالعات تیمی بود که بر روی عملیات (نظامی) تحقیق می‌نمودند. دانشمندان انگلیسی رادار را اختراع کردند، اما ارتش با استفاده از این وسیله آشنا نبود. بدین منظور با گردهمایی جمعی از دانشمندان و با به کارگیری تکنیک های مؤثر ریاضی و داده‌های اطلاعاتی، توان دفاعی انگلستان تا حدود ۱۰ برابر افزایش یافت.

موفقیت این گروه انگیزه استفاده از گروه‌های مشابه را در بررسی مشاغل مختلف نظامی بیشتر کرد. نتایج ارزشمند حاصل از تحقیق در عملیات توسط تیم انگلیسی به سرعت مدیریت نظامی ایالات متحده را به فعالیت-هایی در این زمینه ترغیب نمود. نوآوری‌های موفقیت‌آمیز توسط تیم‌های آمریکایی شامل توسعه الگوهای جدید پرواز، برنامه‌ریزی در مین‌گذاری دریا، بهره‌برداری مؤثر از تجهیزات الکترونیکی می‌شد. که بالاخره گروهی از دانشمندان مامور بررسی این موضوع شدند.

مسئله اول : در چه ارتفاعی بمب‌ها رها شوند تا بیشترین صدمه را به زیردریایی بزند؟
مسئله دوم: محل استقرار رادارها در کجای شهر باشد تا با کمترین تعداد رادارها کل شهر پوشش داده شود؟
آنها دریافتند که «عمق زیردریایی» از لحاظ پرتاب بمب به وسیلهٔ هواپیما متغیر کلیدی است اگر به زیردریایی-هایی که در سطح بودند حمله می‌شد، تنظیم عمق ۵۰ فوت خیلی زیاد بود چون فاصله محل انفجار و زیردریایی به حدی بود که امکان ایجاد خسارات وجود نداشت، اما اگر حمله به زیردریایی‌هایی انجام می‌شد که بعد از دیدن هواپیما، شروع به فرورفتن می‌کردند، ۵۰ فوت می‌توانست راضی کننده باشد.
دانشمندان داده‌های عملیاتی جمع‌آوری شده را تحلیل کردند و احتمال موفقیت حمله به زیردریایی‌ها را در عمق‌های مختلف محاسبه نمودند. احتمال بسیار ضعیف بود. بنابراین افزایش احتمال، حمله به زیردریایی‌های روی سطح پیشنهاد شد.
در این رابطه گروه‌های تحقیق در عملیات مشابهی در دیگر کشورها از جمله کشورها از جمله کانادا و فرانسه مشغول به فعالیت شدند.
این گروه‌ها که معمولاً اجرای عملیاتی تعیین می‌شدند در انگلستان به نام تحقیق در عملیات شناخته شدند و نیز گاهی در آمریکا با نام‌های دیگر نظیر تحلیل عملیات، ارزیابی عملیات، تحقیق در عملیات، تحلیل سیستم‌ها، ارزیابی سیستم‌ها و تحقیق در سیستم‌ها به کار برده می‌شدند.
بررسی مسئله حمله هواپیما به زیردریایی‌های آلمان از موارد دیگری بود که دانشمندان ریاضی به آن پرداختند. در اوایل جنگ جهانی دوم، نیروهای انگلستان از بمب‌های معمولی علیه زیردریایی‌های آلمانی استفاده می‌کرد، این نحوه حمله تنها در صورتی مؤثر بود که زیردریایی‌ها مستقیماً مورد اصابت بمب قرار می‌گرفتند.
زیرا انفجار در سطح آب بود و نمی‌توانستند به بدنه زیر دریایی‌ها آسیب بزنند. مگر اینکه بمب به عرشه اصابت می‌کرد. برای تخریب بیشتر زیردریایی‌هایی که به زیر آب فرو رفته بودند، انفجار در عمق مورد استفاده هواپیما قرار می‌گرفت، ولی برای تعیین عمق مناسب انفجار اختلاف نظر وجود داشت، بعضی اسکادران‌ها بمب‌های خود را برای انفجار در عمق ۱۵۰ فوت تنظیم می‌کردند، چون فکر می‌کردند این مقدار، حداکثر عمقی است که زیردریایی مورد حمله ممکنست فرو برود، اما اسکادران‌های دیگر ۵۰ فوت را برای تنظیم انتخاب می‌کردند. چون زیردریایی‌ها در عمق ۱۵۰ فوت دیگر دیده نمی‌شوند و در نتیجه مورد حمله قرار نمی‌گیرند، لذا این گروه طرفداران تنظیم عمق و سطح انفجار اختلاف نظر وجود داشت.
سئوال کلیدی،فراوان نسبی، حمله به زیردریایی‌های روی سطح بود. تحلیل داده‌های عملیاتی نشان داد که ۴۰٪ از کل حملات به زیردریایی‌هایی بود که کاملاً روی سطح قرار داشتند و ۱۰٪ دیگر به زیردریایی‌هایی که قسمتی از آن‌ها دیده شده بود لذا تنظیم عمق ۵۰ فوت برای انفجار راضی کننده نبود و احتمال محاسبه شده نشان می-داد که تنظیم ۲۵ فوت در عمق می‌توان شانس موفقیت را سه برابر کند. توصیهٔ نهایی به عنوان یک قاعده این بود که اگر بیش از نیم دقیقه از شروع فرو رفتن زیر دریایی گذشته، حمله‌ای صورت نگیرد، توصیه‌های گروه

دانشمندان پژوهش عملیاتی بکار گرفته شده با اجرای این نظریه میزان موفقیت در حمله‌ها به سرعت دو برابر شد.

خلاصه اینکه موفقیت گروه‌های پژوهش عملیاتی موجب گسترش این گروه‌ها گردید. شاید یکی از معروف ترین آنها گروهی بود که تحت سرپرستی فیزیک‌دانی به نام بلاکت (**Blaclett**) تشکیل شد. این گروه شامل سه فیزیولوژیست، دو ریاضیدان، یک متخصص فیزیک نجومی و یک فیزیک‌دان عمومی بود.

این تیم متشکل از متخصصان علوم مختلف، در پیروزی جنگ‌های انگلستان بخصوص پیروزی جنگ دریایی آنلاتیک شمالی تأثیر زیادی داشت. تأثیرات مثبت این گروه‌ها موجب شد گروه‌های مشابهی در ارتش آمریکا ایجاد شود. این ارتش در طول جنگ جهانی دوم، گروه‌هایی از ریاضی‌دانان و متخصصان آمار و کامپیوتر را برای تحلیل عملیات گرد آورد. در این دوره جان فون نیومن(**John Von New man**) در زمینه "تئوری بازی‌ها" و جرح دانتزیک(**Georye Dantziy**) به تحقیق در زمینهٔ "روش سیمپلکس" در برنامه‌ریزی خطی اشتغال داشتند.

بعد از جنگ، تأسیسات جنگی گسترش یافت و در کارهای تحقیقاتی تعدادی از این افراد بکار گرفته شدند، اما در صنایع غیر نظامی به طور وسیع متدلوژی این صنف نادیده گرفته شد. بسیاری از ایده های پژوهش عملیاتی ماهیتاً بر محورهای نظامی استوار بود و مدیران غیرنظامی علاقه چندانی به تکنیک هایی که مربوط به مسائل آنها نبود، نداشتند. دو واقعه موجب ورود پژوهش عملیاتی به صنایع غیر نظامی شد در سال ۱۹۴۷ دانتزیگ " برنامه ریزی خطی" و " روش سیمپلکس " را ابداع کرد. این روش توانایی و کاربرد قابل ملاحظه ای در مسائل بازرگانی داشت.

دومین و مهمترین عامل، تولید کامپیوترهای الکترونیک با سرعت بالا بود، اکثر تکنیک های پژوهش عملیاتی برای جواب گویی به مسائل واقعی جهان، نیازمند محاسبات زیادی است. کامپیوتر می توانست در این راستا نقش اساسی ایفا کند و مانعی را که در بکارگیری این تکنیک ها وجود داشت از بین ببرد.

فضای مناسب بوجود آمده در قبول پژوهش عملیاتی و علم مدیریت از سوی صنایع در دهه ۱۹۵۰ موجب رشد سریع این علم گردید. انجمن های حرفه ای زیادی تشکیل شد که مهترین آنها انجمن پژوهش عملیاتی آمریکا (۱۹۵۲) "انیستیتو علم تصمیم" ۱۹۶۹ بودند.

در پایان این دهه، بسیاری از ابزارهای استاندارد پژوهش عملیاتی مانند « برنامه‌ریزی خطی» « برنامه‌ریزی پویا » « کنترل موجودی» و « تئوری صف» نسبتاً توسعه یافته‌اند.

در دهه ۱۹۶۰ کوشش‌های رسمی بیشتری حول مسائل برنامه‌ریزی تولید انجام گرفت. برنامه‌یزی آرمانی و مسائل برنامه‌ریزی خطی با چندین تابع هدف در ارتباط با مسائل تصمیمی که اهدافی متعدد و گاه متضاد داشتند توسعه یافت. در دهه‌های ۱۹۷۰، ۱۹۸۰ پژوهش عملیاتی بطور فزاینده در ارتباط با سیستم‌های اطلاعاتی مدیریت قرار گرفت، داده‌های کامپیوتری شده نقش اساسی در حمایت از مدل‌های پژوهش عملیاتی پیدا کرد. از امتزاج

پژوهش عملیاتی و سیستم‌های اطلاعاتی مدیریت نوعی خاص از سیستم های اطلاعاتی به وجود آمد که سیستم پشتیبانی از تصمیم نام گرفت.

از دیگر توسعه‌های اخیر در پژوهش عملیاتی بکارگیری هوش محاسباتی یا محاسبات نرم در مسائل تصمیم گیری است که الگو گرفته از عملکرد مغز انسان است.

اینکه در سال ۱۹۸۴ تنها تعداد اندکی نرم افزار تهیه شده بود، باید گفت در حال حاضر تعداد نرم افزارها کارآمد تحقیق در عملیات رشد فزاینده ای داشته و باعث شده است که فنون تحقیق در عملیات هر چه بیشتر از تئوری به عمل نزدیکتر شوند و دامنهٔ آنها به مؤسسات تجاری و صنعتی بیش از پیش کشیده شود.

هدف پژوهش در عملیات چیست ؟

۱- حل مسائل عملیاتی .

۲- حل مسائل عملیات سیستمهایی شامل انسان ، ماشین ، مواد ، انرژی ، اطلاعات و پول .

۳- حل مسائل تصمیم گیری .

مسائل مدیریتی در حوزه پژوهش عملیاتی

با مطالعه تاریخچه پژوهش عملیاتی انواع معینی از مسائل را می توان ملاحظه کرد که بارها پیش روی مدیران قرار گرفته اند.

مسائل تخصیص منابع

این منابع هنگامی بروز می کنند که :

۱) تعداد ی فعالیت باید انجام پذیرند. ۲) دو یا چند راه حل مختلف برای انجام این فعالیت ها وجود دارد.
۳) منابع یا تجهیزات مورد نیاز محدود یا حتی کمیاب هستند.

در مسائل تخصیص ، هدف یافتن راهی برای استفاده بهینه از منابع است ، یعنی اینکه مشخص شود چه میزان فعالیت باید انجام پذیرد تا اثر بخشی فعالیت ها به حداکثر ممکن برسد.

مسائل توزیع

انتقال یک کالا از چند مبداء به چندین مقصد با کمترین هزینه از جمله مسائل توزیع است . در چهارچوب مسائل توزیع انواع مختلفی از مسائل از قبیل مسئله زمان بندی تولید و مسئله به کار گماری مطرح می شود. در به کارگماری ، یک شخص و یا یک فعالیت به صورت متناظر به اقلام دیگری مانند تجهیزات یا خدمات اختصاص داده می شود. هدف از این کار کمینه کردن هزینه یا بیشینه کردن اثربخشی است.

مسائل شبکه

مسائل شبکه تشریح کننده جریان های گردش کالا ، فعالیت ها ، اطلاعات و منابع ، بین مکان های مختلف است. بعنوان مثال برای ساختن یک پل ، اطلاعات و منابع زیادی در گذر زمان به کار گرفته می شوندو مسئله اصلی پیدا کردن بهترین طرح برای چنین سیستم هایی است.

کنترل موجودی

تعیین میزان مناسب و سطح مطلوب موجودی مواد، پول ،کالاهای ساخته شده یا تعداد کارمندان یک اداره در بسیاری از سازمان ها مسئله مهمی است برای مثال هزینه نگهداری کالاها در انبار ها بسیار بالاست. ولی با در اختیار داشتن اطلاعاتی درباره موجودی کالا می توان به موقع کمبودها را رفع نمود. با خرید انبوه از تخفیف های قابل ملاحظه ای استفاده کرد، تغییر در سطوح تولید را از بین برد و هزینه های راه اندازی و سفارش کالا را کاهش داد.

مسائل خط انتظار

خط انتظار یا صف ، در نوبت ماندن افراد یا اشیاء برای استفاده از ماشین آلات یا تجهیزات است. هرچه تجهیزات بیشتری در اختیار باشد انجام عملیات ، بیشتر هزینه بر خواهد بود، پس باید زمان انتظار یا ارائه خدمات ، کوتاه تر شده یا از بین برود.

تعریف پژوهش عملیاتی

پژوهش عملیاتی یا علم مدیریت (manayement Science) با «علم تصمیم» و کاربرد آن در ارتباط است. علم مدیریت را می‌توان به عنوان شاخه‌ای از حوزهٔ مدیریت قلمداد کرد که رویهٔ عقلایی، منطقی، سیستماتیک و علمی را در تحلیل فرایند مدیریت و مسائل مدیریتی بکار می گیرد. در پژوهش عملیاتی، مسائل بصورت سیستمی بررسی می شوند و در عمل برای عالمان مدیریت، مدل هایی را که نتایج فعالیت های مختلف در مسیرهای گوناگون است نمایان می سازند و عناصر شانس، ریسک و عدم اطمینان را برای کمک به مدیران برای گرفتن تصمیمات منطقی و انتخاب خط مش بهینه به هم در می آمیزند.

علم مدیریت شامل مجموعه ای از دانش ها و رویه‌ای برای تجزیه و تحلیل مسائل مدیریت و رفع مشکلات مدیریتی است. تحقیق در عملیاتی تقریباً به تناسب کاربران متفاوت آن دارای تعاریف متعددی است. این علم با توصیه به نوع کاربرد آن در سازمان ها توسط افراد مختلف تعریف شده است که مهمترین تعاریف از OR (Operations Research)به شرح زیر است.

- تحقیق در عملیات به مجموعه‌ای از روش‌های علمی و فنونی گفته می شود که جهت شناخت مسائل درون سیستم بکار می‌روند و در صدد جواب بهینه برای مسائل هستند.

- تحقیق در عملیات عبارتست از کاربرد روش‌های علمی برای مطالعه و بررسی فعالیت‌ها و عملیات پیچیده در سازمان‌های بزرگ.

شاید بتوان مهمترین تعریف از تحقیق در عملیات را بصورت زیر بیان کرد :

" کاربرد روش علمی برای تحلیل و حل مسائل و تصمیمات مدیریتی ".

بطور خلاصه می توان گفت :

"پژوهش عملیاتی، عبارتست از کاربرد روش‌ها، تکنیک‌ها و ابزار علمی می‌باشد که به مدیران در جهت استفاده مؤثرتر از منابع محدود سازمان نشان یاری می‌رساند" بنابراین پژوهش عملیاتی را می‌توان یکی از ابزارها و فنون تصمیم‌گیری برشمرد که به مدیریت در هدایت بهتر منابع سازمانش (مواد، نیروی انسانی، ماشین‌آلات، زمین، ساختمان و...) یاری می‌رساند.

پژوهش عملیاتی با جمع‌آوری داده‌ها آغاز می‌شود. این داده‌ها پس از پردازش به اطلاعاتی تبدیل می‌شوند که برای تصمیم‌گیری با ارزش هستند. تبدیل داده‌ها به اطلاعات، قلب پژوهش عملیاتی است. البته در حل مسائل بایستی مدیران عوامل کیفی و کمی را نیز در نظر بگیرند با توجه به اهمیت عوامل کیفی در تصمیم گیری نقش پژوهش عملیاتی و تکنیک های کمی در تصمیم گیری می تواند متغیر باشد.

تصمیم گیری ،کانون توجه تحقیق در عملیات

چنان چه می دانیم یک تصمیم نتیجه ی انتخاب یک گزینه ی بهتر از بین دو یا چند گزینه ی متفاوت است که ما را جهت رسیدن به مقصود مان یاری می کند که این فرآیند را تصمیم گیری می نامند. در واقع باید اذعان کرد مدیریت چیزی جز "تصمیم گیری "در مراحل مختلف نیست. و برنامه ریزی برای یک سازمان نیز مجموعه ای از تصمیم گیری هاست از جمله اینکه چه کاری باید انجام شود؟چه وقت؟چگونه؟کجا؟و توسط چه کسی؟ و مهمترین کاربرد تحقیق در عملیات نیز کمک به مدیر در جهت" برنامه ریزی صحیح و سیستماتیک در سازمان" است.

ویژگی های تحقیق در عملیات

ازمهمترین ویژگی های تحقیق در عملیات می توان به موارد به زیر اشاره کرد:

تمرکز اصلی و اولیه تحقیق در عملیات بر تصمیم گیری مدیران است.

۱) بکارگیری روش های عملی در تحقیق در عملیات

۲) در تحقیق در عملیات مسائل و تصمیمات با نگاه سیستمی بررسی می شوند.

۳) رشته تحقیق در عملیات یک رشته از ترکیب چندین رشته مستقل است. به عبارت دیگر تحقیق در عملیات یک " *دانش بین رشته ای*" است.

۴) در تحقیق در عملیات از مدل های ریاضی استفاده می شود.

۵) در تحقیق در عملیات از رایانه به وفور استفاده می شود.

حال به تشریح هریک از این ویژگی ها پرداخته می شود.

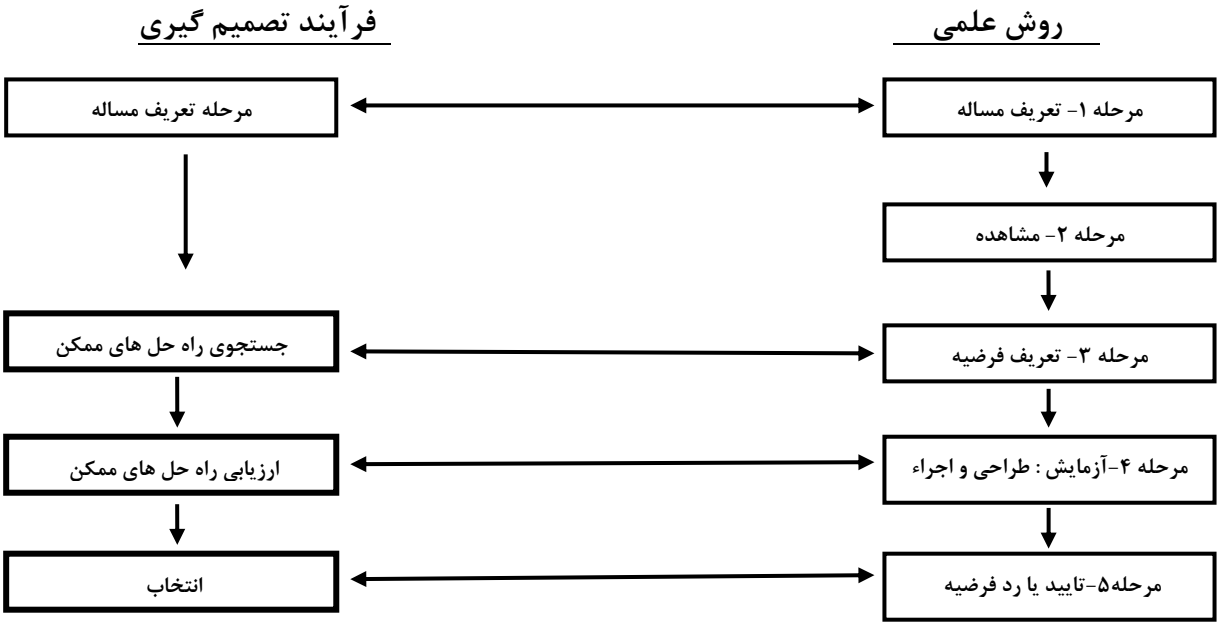
۱) بکارگیری روش های علمی در تحقیق در عملیات

تصمیم‌گیری فرآیند انتخاب یک گزینه بهتر از بین چند گزینه است. مهمترین وظیفه مدیران تصمیم‌گیری برای حل مشکل یا مساله است، تصمیم‌گیری در قالب یک فرآیند مرحله‌ای و منظم صورت می‌پذیرد.

در تحقیق در عملیات امر تصمیم‌گیری و بررسی مسائل در قالب یک فرآیند سیستماتیک مورد توجه قرار می-گیرد این فرآیند دارای مراحل زیر است:

- **تعریف مساله**
- **شناخت راه حل های ممکن = فرموله کردن فرضیه**
- **ارزیابی راه حل های ممکن = آزمون فرضیه**
- **انتخاب یک راه حل = کسب نتایج**

روابط بین رویکرد علمی و فرآیند تصمیم گیری



تعریف سیستم

شاید شما هم در گفتار روزانه خودتان از کلمه سیستم استفاده کرده باشید، مثلاً فلان شرکت اصلاً سیستم درستی نداره و مثال های دیگر...
اما تعریف صحیح و کامل سیستم چیست؟
ترتیب منظمی ازعوامل یاعناصر وابسته که باتوجه به همبستگی و تاثیراین عوامل بر یکدیگرو تبادل منابع، درجهت کارکرد و حصول نتایج ویژه ای هستند. به بیان ساده تر سیستم مجموعه منظمی از اجزای به هم پیوسته است که برای رسیدن به یک هدف با یکدیگر در تعامل هستند.

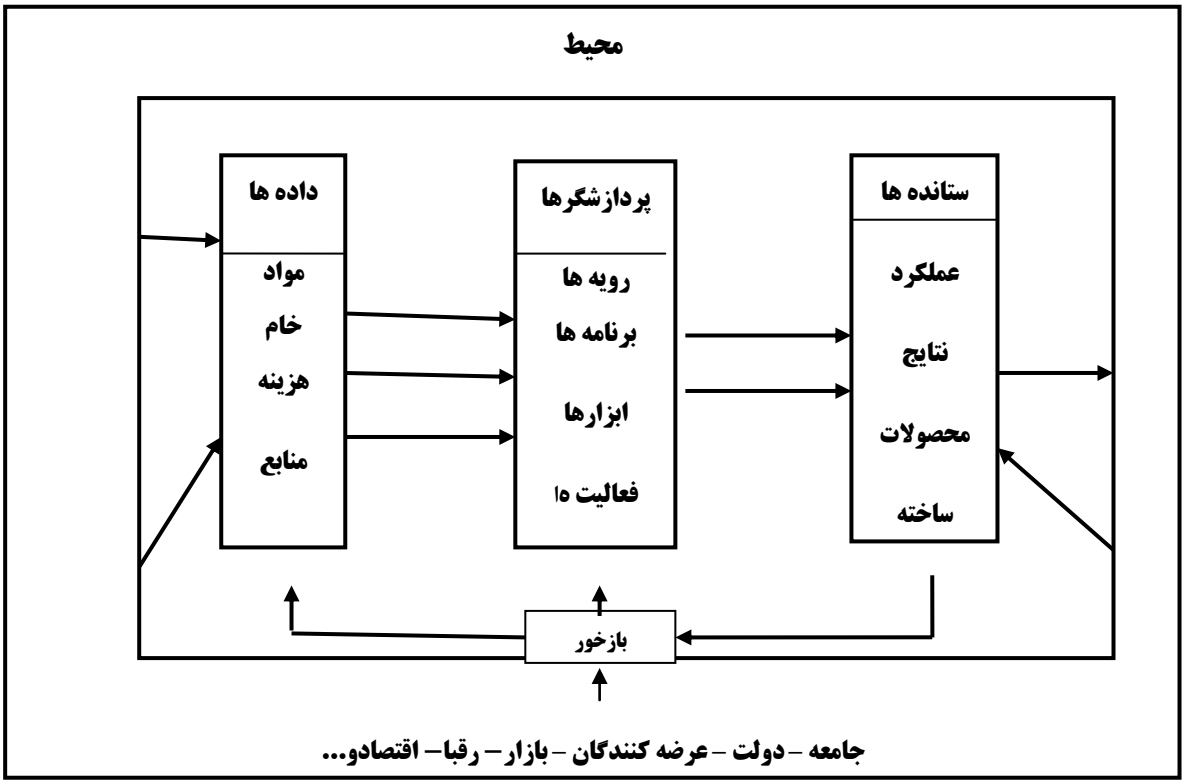
در تکمیل تعریف بالا می توان اینگونه نیز گفت که سیستم مجموعه ای از فرایندها است که در ارتباط با یکدیگر هستند و برای رسیدن به هدفی مشخص تلاش می کنند.

هر سیستم قابل تقسیم به سه بخش عمده به شرح زیر می باشد:

1) **داده ها**
2) **پردازشگر ها**
3) **ستانده ها**

اجزاء متفاوت سیستم توسط محیط خود محاصره شده اند و اغلب بوسیله مکانیسم بازخور در ارتباط با همدیگر قرار می گیرند. شکل ذیل نشان دهنده بخشهای سیستم و محیط سیستم می باشد.در هر سیستم « داده ها» شامل عناصری هستند که وارد سیستم می شوند. به عنوان مثال می توان به مواردی چون مواد خام برای یک کارخانه تولید و یا دانشجویان یک دانشگاه اشاره کرد.« پردازشگرهای» سیستم شامل عناصری است که جهت تبدیل داده ها به ستانده ها ضروری هستند. به عنوان مثال در یک دانشگاه قسمت پردازش سیستم شامل: آموزش دادن،یادگیری،امتحان و استفاده از کلاسها،آزمایشگاهها و کتابخانه خواهدبود.« ستانده ها» شامل محصولات دانشگاه بعنوان ستانده های سیستم دانشگاه یادکرد.اطلاعاتی که با بررسی ستانده های سیستم برای تصمیم گیرنده حاصل می شود، « بازخور» نامیده می شود.براساس این اطلاعات است که تصمیم گیرنده به اصلاح داده ها و یا پردازشگرها یا هر دو آنها می پردازد. عناصر فراوانی وجود دارد که نه جزء داده های سیستم به شمار می آیند و نه جزء پردازشگرها و ستانده های سیستم . ولی به شدت عملکرد سیستم را تحت تاثیر قرار می دهند و در نیل به هدف (آرمان) سیستم اثر میگذارند. این عوامل را تحت عنوان « محیط» سیستم بیان می کنند .

شکل سیستم و محیط



۲) رویکرد سیستمی

ویژگی کوشش آگـاهانه برای درک روابط متقابل بین بخش های مختلف سـازمان و نقش آنها در پشتیبانی از

پژوهش عملیاتی عملکرد کل سازمان است.

قبل از حل مسئله ای در هر حوزهٔ وظیفه ای با هر سطح سازمانی، یا هر بخش خاص سازمان، مدیر باید درکی کامل از چگونگی واکنش کل سیستم در مقابل تغییر هر جزء از آن سیستم داشته باشد.

به طور خلاصه، رویکرد سیستمی مبتنی بر این اعتقاد است که قبل از اجرای هر عمل، باید اثر نهایی آنرا بر کل سیستم سنجید، علاوه بر آن، فرآیند تعریف و فرموله کردن مسئله در سطح پایین تر سازمان، تا آن جا که ممکن است، باید در محدوده اهداف تعیین شدهٔ سطح بالاتر باشد.

۳) تحقیق در عملیات،یک دانش بین رشته ای

بسیاری از مسایل مدیریتی دارای جنبه های اقتصادی ، اجتماعی ،روانشناسی ، مهندسی ، ریاضی و ... هستند و در بیشتر مواقع تنها با تشکیل یک گروه از افراد با تخصص های متفاوت است که می توان به راه حل های نو و پیشرفته برای مسایل مختلف سازمانها دست یافت.

برآیند راه حل های مختلف و بررسیهای متعدد ، منجر به یک راه حل واقعی برای مساله خواهـد شـد. بـر ایـن اساس بسیاری از مسایل در تحقیق در عملیات توسط گروه های چند رشته ای و به طور متوسط سه نفـره مـورد

بررسی قرار می گیرند. در بسیاری از موارد که مساله از ابعاد ساده تری برخوردار است.
می توان از یک فرد متخصص که دارای اطلاعات لازم از رشته های مورد نیاز باشد نیز استفاده کرد.

۴) در تحقیق در عملیات از مدل های ریاضی استفاده می شود.

مدل نمایشی خاص از یک واقعیت است، بر « خاص» تأکید می‌کنیم زیرا مدیران بسته به علاقه و گرایش خود نسبت به مسائل ممکنست از مسائل مشابه درک متفاوتی داشته باشند.

در جهان ما بسیاری از انواع مدل‌ها با بسیاری از فعالیت‌ها همراه شده‌اند. مهندسان، مدل‌های هواپیما و طراحان شهرسازی و مدل‌های شهرها را می‌سازند. طراحان لباس، مدل‌های لباس را درست می‌کنند و مدیران صحنه، مدل‌های آنرا می‌سازند. فیزیکدان‌ها مدل هایی از جهان طبیعت، اقتصاددانان مدل هایی از اقتصاد عرضه می دارند و مدیران بازرگانی و طراحان شرکتها با مدل هایی که از محیط خودشان الهام می گیرند، پیوند می خورند. وجه مشترک مدل ها، علی رغم گوناگونی آن ها، ساده کردن «واقعیت» است.

۵) استفاده از رایانه در تحقیق در عملیات

پیشرفت رایانه منجر به تهیه نرم افزارهایی برای حل مساله پیچیده تحقیق در عملیات است، مسائل پیچیده ای که غالباً در تحقیق در عملیات به آنها سروکار داریم نیازمند انجام محاسبات فوق العاده زیادی هستند که اغلب اوقات انجام این عملیات به روش دستی امکان پذیر نیست، انواع نرم افزارهای مختلفی که برای تحقیق در عملیات ساخته شده است حل این گونه مسائل را بسیار ساده کرده است.

رویکرد ، تحقیق در عملیات برای حل مساله

ویژگی اصلی تحقیق در عملیات و نوع آن تأکید بر رویکرد سیستماتیک و منطقی در حل مسائل بود. بواسطه داشتن این ویژگی است که فنون آن را در قالب "روش علمی" معرفی می‌کنند. این رویکرد همچنانکه در شکل آمده دارای مراحل زیر است :

۱.مشاهده

اولین قدم در فرآیند تحقیق در عملیات تعریف مساله ای است که در سیستم یا سازمان وجود دارد. هر سیستم بطور مداوم در معرض مسائل و مشکلاتی است که مانع رسیدن آن سیستم به اهداف خود می شوند.

مدیر باید خود و یا متخصصانی داشته باشد تا به مشاهده عوامل سازمان و روابط در تعامل با هم پردازد تا بتواند به «آسیب شناسی» سازمانی و تعریف مساله دست یابد. بسیاری از سازمان ها سعی می کنند علاوه بر گروه های آسیب شناسی درون سازمان از مشاوران خارج از سازمان نیز استفاده کنند.

مشاوران خارج از سازمان کمک می کنند که بسیاری از مسائل را که از نظر افراد درون سازمانی جزء لاینفک عملیات محسوب می شود، شناسایی و تعریف کننده تمام تلاش مدیران و گروه های مشاور در سازمان شناسایی مساله بر اساس مشاهده به عمل آمده از فرآیند عملیات در سازمان و محیط می باشد.

۲. تعریف مساله

هر گاه مشخص شده که در سازمان مسئله ای وجود دارد باید آنرا به دقت و وضوح تعریف کرد. تعریف نادرست و نامشخص مساله می تواند موجب ساده انگاری آن گردد و منجر به جواب نامناسبی برای آن شود.
از آنجا که وجود مساله در سازمان موجب خواهد شد که هدف سازمان به خوبی حاصل نشود، پس تعریف روش حصول اهداف و آرمان های سازمانی ضروری است توجه به هدف موجب می شود که توجه به آنچه واقعاً مساله است معطوف گردد.

۳. ساختن مدل

مدل در تحقیق در عملیات بیان خلاصه از یک مساله در دنیای واقعی و سازمانی است. مدل می تواند در قالب یک شکل یا نمودار بیان گردد اما اغلب در تحقیق در عملیات مدل شامل مجموعه ای از روابط ریاضی خواهد بود. روابط ریاضی مدل در تحقیق در عملیات از اعداد و نمادها تشکیل یافته است.
بعنوان مثال فرض کنید یک موسسه تجاری کالایی را می خواهد بفروش برساند، هزینه تولید کالا ۵ ریال و قیمت فروش ۲۰ ریال می باشد. مدلی که بیانگر کل سود حاصل از فروش باشد، عبارت است از :

$$Z = 20x - 5x$$

در این مدل :

X : نشان دهنده تعداد محصولاتی است که فروش خواهد رفت.
Z : کل سود حاصل از این تجارت خواهد بود.
نمادهای x و z متغیر خوانده می شود.
علت اینکه از اصطلاح متغیر استفاده می شود این است که هیچ عدد مشخص و از قبل تعریف شده ای برای x و z در نظر گرفته نشده است. این مقدار می تواند تغییر کنند. این متغیر کاملاً از هم متمایز هستند.
متغیر z یک متغیر وابسته است زیرا مقدار آن وابسته به تعداد واحدهای فروش رفته است. متغیر x یک متغیر مستقل است زیرا تعداد واحدهای فروش رفته به هیچ چیز دیگر در این معادله وابسته نیست.
اعداد ۵ و ۲۰ ریال در معادله «پارامتر» گفته می شود. پارامترها مقادیر ثابتی هستند که عموماً ضرایب متغیرها (نمادها) در یک معادله می‌باشند. پارامترها معمولاً در طول فرآیند حل یک مساله خاص ثابت باقی می‌مانند، مقدار پارامترها از داده‌های حاصل از محیط بدست می‌آیند.
حال فرض کنید که این محصول از آهن ساخته می‌شود. و مؤسسه ۱۰۰ کیلوگرم آهن در دسترس دارد. برای تولید هر واحد محصول ۴x کیلوگرم آهن لازم است. حال ما می‌توانیم یک رابطه ریاضی دیگری برای بیان مصرف محصول از آن به صرت زیر تعریف کنیم : $4x = 100$ کیلوگرم

معادله بیانگر این واقعیت است که هر واحد محصول تولیدی ۴ کیلوگرم از ۱۰۰ کیلوگرم آهن موجود را مصرف خواهد کرد. بنابراین مدل شامل دو رابطه به صورت زیر است :

$Z = 20x - 5x$ تابع هدف

$4x = 100$ محدودیت

رابطه سود در معادله فوق "تابع هدف" خوانده می‌شود. و به رابطه مربوط به مصرف کالا از آهن یک "محدودیت" گفته می‌شود.

به عبارت دیگر، مؤسسه در تلاش است تا جایی که امکان دارد، سود خود را حداکثر کند ولی ناچار است که سود خود را تا جایی که آهن در دسترس اجازه می‌دهد، افزایش دهد، یعنی میزان افزایش در سود محدود به منابع در دسترس (۱۰۰ کیلوگرم آهن) خواهد بود. با توجه به مفاهیم بیان شده می توان دو معادله فوق را بصورت زیر نمادگذاری کنیم :

حداکثر سازی $Z = 20x - 5x \rightarrow Max\ Z = 20\ x - 5x$

به شرطی اینکه : $4x = 100 \quad \rightarrow \quad Subject\ to : 4x = 100$

از این به بعد برای نوشتن مدل بجای کلمات فارسی و یا واژه های کامل انگلیسی از خلاصه زیر استفاده می‌شود :

$Max \quad Z = 20x - 5x$

$S.T : 4x = 100$

این مدل بیانگر یک مساله مدیریتی است که درصدد تعیین تعداد تولید مؤسسه خود است، بنابراین متغیر x مقدار "تصمیم بالقوه" مدیر را بیان می‌کند و x را به عنوان متغیر تصمیم می‌شناسند. پس از تکمیل مدل، باید آنرا از نظر اینکه نشان دهند، عملیات سیستم باشند، مورد بازبینی قرار داد. مدیر باید اطمینان حاصل کند که مدل ساخته شده بیانگر رفتار واقعی سیستم است.

۴. حل مدل

مساله فرموله شده در قالب یک مدل تحقیق در عملیات باید بر اساس فنون مورد استفاده در تحقیق در عملیات حل شود. هر یک از فنون تحقیق در عملیات برای حل یک مدل خاص کاربرد دارند. بنابراین نوع مدل و فن حل مدل دو بخش مجزا در تحقیق در عملیات می باشند ما به راحتی می توانیم تشخیص دهیم که آیا مدل ساخته شده قابل حل خواهد بود یا خیر. با توجه به اینکه مدل بیانگر مساله است، پس حل آن به معنی حل مساله مورد توجه مدیریت خواهند بود.

برای مثال مدل تعریف شده در بخش قبل، یعنی :

$Max\ Z = 20x - 5x$

$S.T : 4x = 100$

با استفاده از عملیات جبری قابل حل است : $4x = 100 \quad => \quad X = 100 \div 4 \quad = 25$ واحد

جایگزین کردن مقدار ۲۵ برای x در معادله سود باعث می شود :

$Z = 20x – 5x = 20\ (25) - 5(25\ ) = >\ Z = 375$

بنابراین اگر مدیر تصمیم به تولید ۲۵ واحد از محصول بگیرد مؤسسه سودی معادل ۳۷۵ ریال کسب خواهد کرد.

توجه داشته باشید که مقدار متغیر تصمیم بیانگر تصمیم واقعی مدیر نیست بلکه به منزله اطلاعات است که مدیر را در اتخاذ تصمیم واقعی یاری خواهد داد، پس اطلاعات بیانگر داده های پرازش شده توسط مدل خطی شده می باشند.

۵. اجرای نتایج

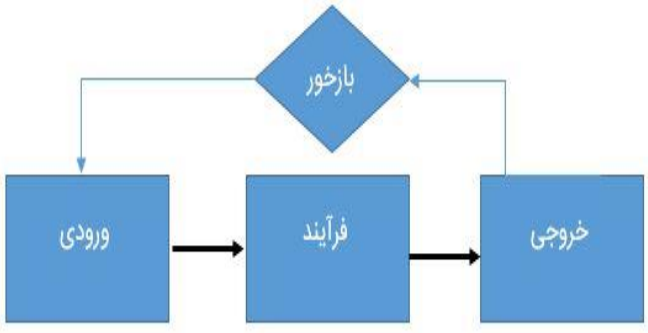
فنون حل مساله در تحقیق در عملیات فراهم کننده اطلاعاتی هستند که مدیر را در تصمیم گیری بهتر یاری می کند، البته نباید نتایج حاصل از حل مدل را بدون تفکر و تعمق مدیریتی بکار گیرد. در تصمیم گیری نهایی، مدیر باید اطلاعات حاصل از حل مدل و تجربیات خود و مشاوران را ترکیب نمایند. چنانچه مدیر اطلاعات بدست آمده از حل مدل را با استفاده از فنون تحقیق در عملیات بلا استفاده بگذارد. مطالعه علمی تا زمانیکه به مورد اجراء گذاشته نشود از روش ناچیزی برخوردار است. ارزش واقعی فرآیند مطالعه علمی به تاثیر آن بر عملکرد سیستم مورد مطالعه خواهد بود.

تکرار پذیر بودن فرآیند تحقیق در عملیات

تکمیل مراحل پنجگانه فرآیند تحقیق در عملیات ضرورتاً به معنای اکمال فرآیند نیست، چه بسا در هر مرحله از ساخت مدل، حل و اجراء ضرورت بازنگری پدید آید، به عنوان مثال در بسیاری از موارد در حین ساخت مدل ممکنست بعدی جدید از مساله روشن شود و یا اینکه در مرحله حل مدل و یا اجرای آن نیاز به تغییر ساختار مدل و یا تعریف مساله بوجود آید.

بنابراین در هر مرحله نیاز به بازخورد ضرورت پیدا می کند، همچنین اطلاعات جدید بدست آمده از محیط و آینده سازمان ممکن است تماماً ساختار مساله و مدل را تحت تاثیر قرار دهد، بنابراین با گذر زمان و روشن شدن افق مساله، فرآیند تحقیق در عملیات تکرار می شود و این تفکر برای یک مساله فقط یک مدل و یک جواب وجود دارد و لاغیر. مردود خواهد بود و همواره باید مدل را بازسازی کرد. بازنگری در هر مرحله فرآیند تحقیق در عملیات با استفاده از عامل بازخورد در سیستم و یا فرآیند حاصل می شود.

تعریف بازخورد



به سیستم هایی که با محیط خود تعامل دارند" **سیستم باز** " گفته می شود.

برای هر سیستم باز (**open system**) می توان ورودی و خروجی تعریف کرد.

ورودی : اثراتی است که سیستم از محیط می پذیرد و نیز پارامترها و اطلاعاتی که از محیط می گیرد.

خروجی : نیز اثراتی است که سیستم بر محیط می گذارد و پارامترها اطلاعات و رفتاری که توسط محیط درک و مشاهده می شود.

در تصویر بالا بازخورد مکانیزمی است که سیستم می تواند با کمک آن انحرافات فرایند را بررسی نماید و آنرا بهبود دهد. بعنوان مثال فرایند تولید شرکتی را در نظر بگیرید، ورودی این فرایند مواد اولیه، کارکنان ، دستور تولید و ابزار می تواند باشد، خود فرایند انجام فعالیت هایی روی مواد است که منجر به تولید محصول می شود و خروجی هم محصول آماده و گزارش تولیداست.

اگر بخشی از خروجی یک سیستم بر روی ورودی آن تاثیر بگذارد، اصطلاحاً می گوییم که این سیستم از محیط، " ***بازخورد یافیدبک*** *(feedback)* " می گیرد.

مدل و انواع آن در پژوهش عملیاتی

« مدل عبارت است از یک انتزاع انتخابی از واقعیت » یک هنرمند وقتی به طبیعت می نگرد نمایشی انتخابی از واقعیت را می آفریند،یک مدل ساز نیز چنین کاری را به انجام می رساند به عـنوان مثال در حوزه اقتصاد برای نشان دادن تعادل « مقدار کالا » و « قیمت » از دو منحنی عرضه و تقاضا استفاده می شود. یعنی مدل ساده ای که بطور مسلم یک نمایش انتخابی از واقعیت است و قیمت را به مقدار عرضه و تقاضا مربوط می کند. مدلی ساده و زیبا ولی غیر واقعی ، چون در عالم واقعی هیچ وقت عرضه با تقاضا برابر نمی شود و قیمت از فروشگاهی به فروشگاه دیگر یا از شهری به شهر دیگر تغییر می کند. در هر صورت مدل ها مفیدند چون تخمینی از واقعیت اند، و مبنای مطالعاتی مناسبی محسوب می شوند.

مدل ها را به شیوه های گوناگونی می توان طبقه بندی کرد، یکی از این طبقه بندی ها به شرح زیر است:

۱. مدل‌های شمایلی

۲. مدل‌های قیاسی

۳. مدل‌های ریاضی (سمبولیک)

۴. مدل های شبیه سازی

۱) مدل‌های شمایلی

نمونه‌هایی از موکت سه بعدی از هواپیما، شئی‌ها، اتومبیل‌ها، و یا شمایل مربوط به خط تولید و یا یک پل، از این نوع مدل‌ها هستند. در این مدل‌ها (شمایلی) معمولا با تغییری در اندازه و مقیاس، خاصیت‌های مربوط به یک شیء واقعی، به وسیلهٔ خود آن خاصیت‌ها نشان داده می‌شوند در نتیجه مدل‌های شمایلی بطور کلی شبیه شیء واقعی هستند که در اندازه‌هایی متفاوت حجم یافته‌اند. تغییر و دستکاری در این مدل‌ها مشکل است و برای پیش‌گویی چندان مفید نیست.

در نتیجه مدل های شمایلی بطور کلی شبیه به پدیده های واقعی هستند که در اندازه هایی متفاوت تجسم یافته اند. برخی از نمونه های متعارف برای این مدل ها عبارتند از عکس ها ، نقاشی ها، هواپیما، کشتی ها، و اتومبیل ها. مدل شمایلی خورشید و سیاره هایش نیز ، مدلی از منظومه شمسی را با مقیاس کوچکتر نشان می دهد.

۲) مدل قیاسی

مدل‌های قیاسی از بعضی خاصیت‌ها برای نشان دادن برخی دیگر از ویژگی ها استفاده می‌کنند مثلاً خط راس-های یک نقشه، قیاسی است از برآمدگی‌های زمین یا رنگ مختلف در نقشه که نشان دهندهٔ آب‌ها و صحراها و غیره فرض می‌شوند. این مدل‌ها نسبت به مدل‌های شمایلی قابلیت دستکاری بیشتری دارند. این مدل عیناً مشابه سیستم واقعی نیست ولی رفتار آن شبیه سیستم می باشد و به صورت نمودار بیان می شود این مدل در قالب نمودار سه بعدی بیان می شود مانند " نمودار سازمانی".

۳) مدل سمبولیک یا ریاضی

مدل های سمبولیک از حروف، اعداد و سمبول های دیگر برای نشان دادن متغیرها و ارتباط بین آنها استفاده می کنند و در نتیجه عمومی‌تر از مدل‌های دیگرند این مدل‌ها معمولاً بیشترین قابلیت دستکاری را دارند.
این مدل ها نسبت به سایر مدل ها ساده تر هستند و مسائل پیچیده را تنها با این مدل می‌توان تحلیل کرد و به علت مزایای زیر در تحقیق در عملیات از آن استفاده می‌شود.

۱. توانایی تعریف و تعیین موقعیت‌های پیچیده
۲. شبیه سازی زمان وقوع عملیات واقعی
۳. ساده بودن و امکان دستکاری مدل
۴. هزینه و خطای کمتر
۵. محاسبه مخاطره در تصمیم گیری
۶. امکان ایجاد زمینه یادگیری و آزمون

۴) مدل های شبیه سازی

مدل های شبیه سازی , مدل هایی هستند که در تحلیل سیستم های پیچیده به جای مدل های ریاضی بکار این مدل ها بطور آماری به اجرا درآوردن مکرر سیستم با اعداد تصادفی را آزمون کنند. گرفته می شوند مدل ها را به اعتباری می توان به دو گروه احتمالی و غیر احتمالی نیز تقسیم بندی کرد. « مدل های معین یا غیر احتمالی» مدل هایی هستند که شرایط آنها بطور کامل معین و با اطلاعات کامل فرض می شوند . برنامه ریزی خطی ، حمل و نقل و مدل تخصیص نمونه هایی از « مدل های معین » هستند. در « مدل های احتمالی » وضعیت و پیامد های فعالیت ها نامشخص بوده و بطور معین قابل پیش بینی نیستند.

تحقیق در عملیات یک رویکرد بین رشته‌ای

بسیاری از مسائل مدیریتی دارای جنبه‌های اقتصادی، روان‌شناسی، اجتماعی، مهندسی، ریاضی، فیزیکی و... هستند تنها با تشکیل یک گروه با تخصص های متفاوت است که می توان به راه حل های نو و پیشرفته برای مسائل گریبانگیر سازمان ها دست یافت و متخصص با استفاده از دانش خود می تواند زاویه ای از مسائل را مورد موشکافی قرار دهد و به یک راه حل برسد.
برآیند راه حل های مختلف و بررسی های متعدد، منجر به یک راه حل واقعی برای مساله خواهد شد بر این اساس بسیاری از مسائل در تحقیق در عملیات توسط گروه های چند رشته ای (بطور متوسط گروه های سه نفره) مورد بررسی قرار می گیرند. در بسیاری از موارد که مساله از ابعاد ساده تر برخوردار است می توان از یک فرد متخصص که دارای اطلاعات لازم از رشته های مورد نیاز می باشد نیز استفاده کرد.

مدل‌های متنوع تصمیم گیری در تحقیق در عملیات :

بمنظور بررسی مدل های تصمیم گیری و به دنبال آن بررسی تکنیک های موجود برای ارزیابی این مدل ها ، ابتدا « تصمیم گیری» را برای شرایط مختلف موجود برای آن ، طبقه بندی می نماییم. انواع « تصمیم گیری» برمبنای درجه اطلاعات موجود درباره وقوع متغیرهای غیر قابل کنترل از آن ، به قرار زیر است:

۱) **تصمیم گیری در شرایط اطمینان**

۲) **تصمیم گیری در شرایط عدم اطمینان الف) درحالت عدم اطمینان کامل ب) در حالت ریسک**

۳) **تصمیم گیری در شرایط تعارض**

معادله تصمیم

« معادله تصمیم » زیر بنای تشکیل کلیه مدل های موجود در« پژوهش عملیاتی» می باشد. معادلعه تصمیم ، یعنی :

$E = (x , y)$ نشان می دهد که در درجه بهره وری (E) حاصل از یک مدل تصمیم گیری تابعی است از متغیرهای قابل کنترل(X) و متغیر های غیر قابل کنترل(Y) . درجه بهره وری(E) ممکن است بصورت "مطلوبیت" نیز مورد اندازه گیری واقع شود.

همچنین روش های مختلف از بکارگیری متغیرهای قابل کنترل(X) منجر به تشکیل استراتژی های گوناگون درحل مشکل تصمیم گیری می شود و انتخاب مناسب ترین استراتژی (یعنی انتخاب مناسب ترین نحوه استفاده از منابع تحت کنترل). نیز به معنای گرفتن تصمیم برای حل آن مشکل است. درظاهر به نظر می رسد که یک تصمیم گیرنده برای حل یک مشکل تصمیم گیری بتواند دارای تعداد بیشماری استراتژی باشد، البته عوامل متعددی وجود دارند که تعداد استراتژی های ممکن را محدود می نمایند. این عوامل عبارتند از : قوانین و مقررات داخلی و خارجی موجود برای یک سازمان ، مقررات اجتماعی موجود ، سیاست های اجرایی برای یک سازمان و...

عنصر عمده دیگر از معادله تصمیم نیز متغیر های غیر قابل کنترل (y) است که پیش بینی برای آنها نیاز به بررسی های آماری ، استفاده از تجارب و استفاده از قوه ابتکار تصمیم گیرنده دارد. وضعیت این پیش بینی نشان دهنده شرایط مختلف تصمیم گیری است که به شرح آن خواهیم پرداخت.

۱. تصمیم گیری در شرایط اطمینان

" تصمیم گیری در شرایط اطمینان که تمامی اطلاعات در دسترس می باشد کلیه متغیرهای موجود ثابت فرض می شوند، در این گونه تصمیم گیری تصمیم گیرنده نتیجه تصمیم را می داند." برای زمانی است که کلیه متغیرهای موثر موجود در آن ثابت فرض شوند، به عبارت دیگر متغیر غیرقابل کنترل برای این شرایط از تصمیم گیری وجود ندارد. مدل سازی برای این شرایط از تصمیم گیری بیشتر براساس « مدل های ریاضی و مشخص»

استوار است مانند: تحلیل هزینه – منفعت (درحالت مشخص). مدل های کلاسیک بهینه یابی ،کنترل موجودی(درحالت مشخص)،مدل تخصیص کار(درحال مشخص)،برنامه ریزی خطی و بسیاری از مدل های مشتق شده از آن ،برنامه ریزی غیر خطی و مواردی از برنامه ریزی پویا.

۲. تصمیم گیری درشرایط عدم اطمینان کامل

" تصمیم گیری در شرایط عدم اطمینان مشکل موجود این است که یک سری عوامل موجود می باشد که غیر قابل کنترل ما می باشند، و همچنین می تواند اطلاعاتی از مسئله در اختیار ما قرار داده نشده باشد."
برای زمانی است که مشکل موجود شامل تعدای متغیر غیرقابل کنترل نیز می شود. لکن اطلاعاتی که از گذشته به منظور پیش بینی برای این متغیرها در دسترس نبوده و از این رو محاسبه احتمال وقوع برای آنها ممکن نیست. مدل سازی برای این نوع از تصمیم گیری بیشتر براساس «مدل های مشابه یا قیاسی» استوار است و از « ماتریس تصمیم گیری » برای تحلیل این شرایط استفاده می گردد.

۳. تصمیم گیری در شرایط ریسک

"برای زمانی است که مشکل موجود شامل تعدادی متغیر غیرقابل کنترل نیز می شود، که اطلاعات ازگذشته درمورد وقوع آنها دردسترس است و بنابراین محاسبه احتمال وقوع آنها ممکن خواهد بود."مدل های مورد استفاده برای این شرایط از تصمیم گیری ممکن است از نوع « مدل های مشابه و احتمالی » بوده که در این صورت این مدل ها خود به سه دسته تقسیم می گردند:

۱. « **تصمیم گیری بدون استفاده از نمونه گیری** »
۲. « **تصمیم گیری با استفاده از نمونه گیری** »
۳. « **تصمیم گیری با استفاده از منحنی های توزیع فراوانی** » ،

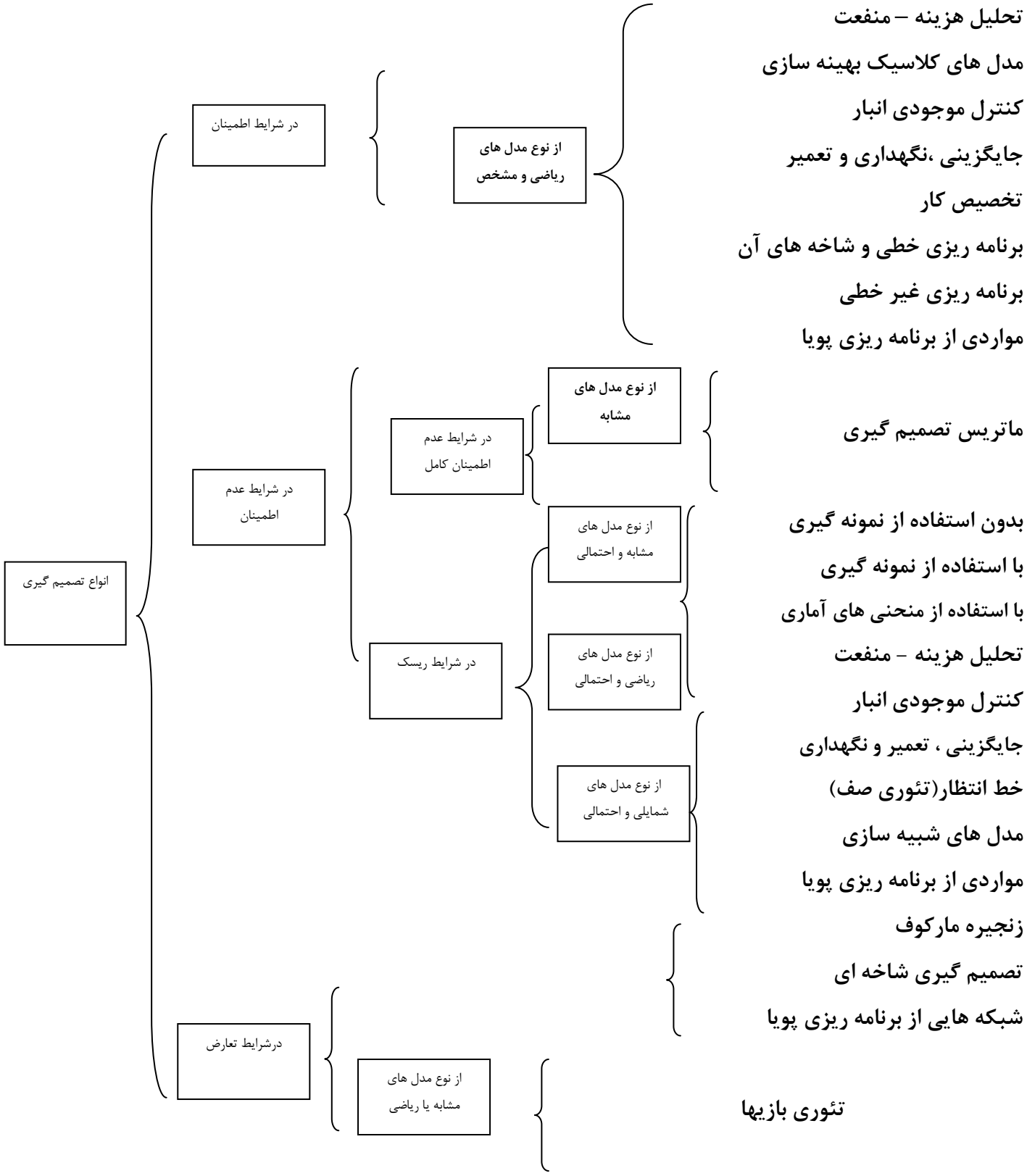
همچنین مدل های مورد استفاده برای این شرایط از تصمیم گیری ممکن است از نوع « مدل های ریاضی و احتمالی » باشند، مانند:
« تحلیل هزینه – منفعت (درحالت احتمالی)» ، « کنترل موجودی (درحالت احتمالی)» ، « مدل جایگزینی (در حالت احتمالی)» ، « خط انتظار(تئوری صف)» ، « مدل های شبیه سازی» ، مواردی از برنامه های پویا و تحیلی زنجیره مارکوف . و بالاخره مدل های مورد استفاده برای این شرایط از تصمیم گیری ممکن است از نوع «مدل های شمایلی و احتمالی» باشند، مانند تصمیم گیری شاخه ای و برخی از شبکه های موجود در برنامه ریزی پویا .

۴. تصمیم گیری در شرایط تعارض

"تصمیم گیری در تعارض که در این روش از استراتژی رقبا برای تصمیم گیری در شرایطی که متغیرها غیر قابل کنترل هستند استفاده می کنیم."

برای زمانی است که تصمیم گیرنده در یک شرایط رقابتی به تصمیم گیری می پردازد. به عنوان مثال یک کارخانه در بازار رقابت فعالیت های بازرگانی و تولیدی با پشتوانه تجربه خود جهت افزایش دامنه فروش و کسب هرچه بیشتر سود میتواند تا حدودی واکنش دیگر رقبا را در مقابل استراتژی های انتخابی خود حدس بزند، یا یک فرمانده نظامی در مقابل سپاه دشمن با پیش بینی استراتژی های منتخب آنها ، سعی در گزینش بهترین استراتژی داشته که به پیروزی سپاه خود و شکست طرف مقابل گردد و یا بازیکنان یک تیم فوتبال با توجه به واکنش های رقیب سیستمی را انتخاب می کنند که فرجام بازی را به نفع خود تمام کنند.در این حالت ها ، استراتژی های رقیب متغیرهای غیرقابل کنترل طرف دیگر محسوب می شوند. تصمیم گیری در شرایط تعارض از « تئوری بازی ها» بهره می گیرند ، در حقیقت تعارض بین منافع دو رقیب است که این شرایط تصمیم گیری را بوجود می آورند زیرا هریک از طرفین سعی دارند بیشترین سود و کمترین ضرر را نصیب خود نمایند.

مدل های متنوع تصمیم گیری در پژوهش عملیاتی



فصل دوم...

برنامه ریزی خطی « مدل سازی »

برنامه ریزی خطی « مدل سازی »

مقدمه

پیچیدگی و نا آرام بودن محیط سازمان ها باعث شده است که مدیران به آسانی تصمیم گیری نکنند. مدیران برای رسیدگی به یک هدف مشخص یا محدودیتهای بسیار چون محدودیت منابع، انرژی، نیروی انسانی، مواد، پول و... مواجه هستند. هدف اغلب مدیران و سازمانها، رسیدن به سود بیشتر ویا به عبارت دیگر حداکثر کردن سود می باشد . درضمن سازمانهایی وجود دارند که درصدد حداقل کردن هزینه، ضایعات خود هستند.

برنامه ریزی خطی به عنوان یک مدل ریاضی در زمان جنگ جهانی دوم شکل گرفت تا خرج ها و بازگشت های مالی را طوری سامان بخشد که به کاهش هزینه های ارتش و افزایش خسارت دشمن بینجامد.

این طرح تا سال ۱۹۴۷ سری باقی ماند . پس از جنگ بسیاری از صنایع به استفاده از آن پرداختند. برنامه ریزی خطی، یا همان بهینه سازی خطی ، روشی در ریاضیات است که به پیدا کردن مقدار کمینه یا بیشینه از یک تابع خطی روی یک یا چند ضلعی محدب می پردازد. این چند ضلعی محدب در حقیقت نمایش نموداری تعدادی محدودیت از نوع نامعادله روی متغیر های تابع است. به بیان ساده تر به وسیله برنامه سازی خطی میتوان بهترین نتیجه (مثلاً بیشترین سود یا کمترین هزینه) را در شرایط خاص وبا محدودیت های خاص بدست آورد .

اما در مهندسی نیز کاربرد های فراوانی دارد.در واقع برنامه ریزی خطی بخشی از تحقیق در عملیات و موسوم به علم مدیریت است که اول بار توسط نیروی هوایی ارتش آمریکا به کار گرفته شد . می توان گفت حدود یک چهارم کل محاسبات علمی که بر روی رایانه گرفته است با برنامه ریزی خطی و مشقات آن مربوط می شود.

برنامه ریزی خطی، از جمله نیرومند ترین تکنیک هایی است که مدیران می توانند در حل مسائل مختلف خود باتوجه به شرایط مساله بکار گیرند. برنامه ریزی خطی، مدل ریاضی برای جستجو وانتخاب بهترین روش کار از میان مجموعه راه های پیشرو است. برنامه ریزی خطی، با بهینه (کمینه یا بیشینه) کردن متغیر وابسته ای که به صورت خطی با مجموعه ای از متغیرهای ناوابسته، متغیرهایی هستند که مقدار آنها را تصمیم گیرنده تعیین میکند و مقدار متغیر های وابسته را که بعنوان ستاده مدل ارائه می شوند تعیین می کنند. متغیر های ناوابسته، درون زا و متغیر های وابسته بیرون زا نیز نامیده می شوند.

متغیرهای وابسته معمولا در تابع هدف که اغلب بیانگر مفاهیم اقتصادی مانند سود، هزینه، درآمد، تولید و فروش است ارائه می گردند.

متغیر های ناوابسته، در برنامه ریزی خطی به عنوان متغیرهای تصمیم شناخته میشود که مقدارشان نامشخص است وتصمیم گیرنده باید مقدار این متغیرها را بعد از حل مدل بدست آورد. هر مدل برنامه ریزی خطی سه بخش دارد:

۱- تابع هدف ۲- محدودیت ۳- متغیرهای تصمیم

۱) تابع هدف

تابع هدف را می توان بصورت تابعی خطی از متغیرهای تصمیم بیان نمود که تابعی ریاضی با متغیرهای با توان یک بدون حاصل ضریب است.تمام مساله را می توان به صورت خط های راست ، صفحات یا دیگر فضاهای هندسی مشابه بیان نمود.

۲) محدودیت

مجموعه محدودیتها را میتوان به صورت مجموعه ای از معادلات خطی بیان کرد. علاوه بر خطی بودن، شرط نامنفی بودن متغیرها هم مطرح است، یعنی منابع نمی تواند منفی باشد و بدون در نظر گرفتن این محدودیتها ، از نظر ریاضی ممکن است منابع بیش از میزان در دسترس استفاده شود که موجه نیست .

۳) متغیرهای تصمیم

تصمیم گیری اقتصادی اصولی وبهینه، تعیین عملی است که به بهترین نحو مطلوب یا هدف بینجامد. این معنای یافتن راهکاری است که مقدار تابع هدف را بهینه (بیشینه یا کمینه) می کند. چندین عامل می تواند مسائل بهینه سازی را نسبتاً پیچیده وحل آن را با دشواری روبرو سازد.

یکی از عوامل پیچیده کننده، وجود چندین متغیر تصمیم در یک مساله است. روش های نسبتا ساده ای برای تعیین میزان تولیدی که سود را بیشینه میکند، دریک کارخانه کوچک بایک محصول تولیدی وجود دارد. اما وقتی بایک کارخانه بزرگ با انواع زیاد محصول سروکار داریم. مساله پیچیده تر می شود ودر نتیجه تعیین میزان تولید هریک از محصولات برای بیشینه کردن سود، مساله دشواری است.

سه گام اساسی در بکارگیری برنامه ریزی خطی

۱- مساله باید به گونه ای تعریف شود که با استفاده از برنامه ریزی خطی قابل حل باشد.

۲- مساله باید در قالب یک مدل ریاضی فرموله شود.

۳- مساله باید با استفاده از یک تکنیک مشخص ریاضی قابل حل باشد.

نام برنامه ریزی خطی برگرفته است از این واقعیت که « روابط کارکردی» در مدل ریاضی خطی هستند و تکینک حل مدل شامل مراحل ریاضی از پیش تعیین شده بعنوان یک برنامه می باشد.

« مدل سازی» ، فرآیند تبدیل مسئله تصمیم گیری به مدل تحقیق در عملیات است. برای تعیین جواب یک مسئله واقعی ، تسلط بر تمام جوانب کار امری ناممکن است ، بنابراین نمایش خاصی از واقعیت را در نظر گرفته و برروی آن مطالعه میکنیم که به آن مدل میگوییم.

مدلهای مختلفی برای یک موضوع وجود دارد . شناخت مدل وحل آن بسیار مهم است. از جمله مدلهای مطرح در مدیریت و صنعت مدل ریاضی است که برای مسائل کمیت پذیر می رود .دراین جا به معرفی وبا مراحل مختلف ساخت آن آشنا خواهیم شد. همانطورکه قبلا بیان گردید هر مدل برنامه ریزی خطی شامل اجزا و ویژگی های مشخصی است.

برای فرموله کردن هر مساله میتوان یک چارچوب منظم را اعمال کرد ومراحل زیر برای فرموله کردن توصیه می شود.

مرحله اول: متغیرهای تصمیم را تعریف کنید.

مرحله دوم: تابع هدف را فرموله کنید.

مرحله سوم: محدویتهای مدل را فرموله کنید.

مراحل فوق به تفصیل ضمن بیان مثال هایی کاربردی تشریح خواهد شد.

مساله ترکیب تولید :

در انتخاب ترکیب محصول فرد تصمیم گیرنده می کوشد تا ترکیب محصولات را که باعث حداکثر شدن سود بدون تخطی از قیود منابع خواهد شد، تعیین کند.

در مثال زیر هدف حداکثرکردن سود می باشد.

مثال ۱ :

شرکتی میخواهد بداند که از هر یک از سه محصولش چه مقدار تولید کند تا با رعایت محدودیت منابع حداکثر سود را کسب کند.نیروی کار و مواد مورد نیاز و همچنین سهم سود هر یک از محصول در جدول زیر آمده است :

منابع مورد نیاز

منابع	محصول ۱	محصول۲	محصول۳	مقدار در دسترس
نیروی کار(ساعت / واحد)	۵	۲	۵	۲۴۰ ساعت
مواد(کیلوگرم/ واحد)	۴	۶	۳	۴۰۰ کیلو گرم
سهم سود هر واحد	۳	۵	۲	

هدف : حداکثر سازی سود

نیروی کار موجود روزانه ۲۴۰ ساعت ومواد در دسترس در هرروز ۴۰۰ کیلوگرم می باشد. هدف تعیین مقدار تولید از سه محصول است بطوری که سود حاصل از تولید آنها حداکثر شود. حال این مساله را در قالب یک مدل برنامه ریزی خطی با عنایت به چارچوب بیان شده فرموله می کنیم.

متغیرهای تصمیم مساله

سه متغیر تصمیم این مساله مقدار تولید ۳،۲،۱ است که باید در طول روز تولید شوند این مقادیر را می توان با نماد های زیر بیان نمود:

مقدار تولید محصول ۳ : X_3

مقدار تولید از محصول ۲ : X_2

مقدار تولید از محصول ۱ : X_1

تابع هدف

تابع هدف مساله، حداکثر کردن سود حاصل از تولید سه محصول است، کل سود از مجموع سود سه محصول بدست می آید. سود هر محصول از حاصلضرب سود ناشی از هریک واحد در مقدار تولید آن به دست آید . سود محصول۱، از ضرب، سود یک واحد از آن مقدار تولید آن $3X_1$ و سود محصول ۲ از ضرب سود یک واحد از آن در مقدار تولید آن $5X_2$ و سود محصول ۳، از ضرب سود یک واحد از آن در مقدار تولید آن $2X_3$ بدست آید.

بنابراین سود کل (Z) عبارتند از: $\text{Max } Z= 3X_1 + 5X_2 + 2X_3$

محدودیت های مدل

در این مساله محدودیتها شامل مقادیر محدود نیرو کارو مواد در دسترس برای تولید هستند . تولید هریک از سه محصول به نیروی کار ومواد بستگی دارد. نیروی کار لازم برای تولید هریک از واحد محصول ۱ ، ۵ساعت است ، بنابراین کل نیروی کار لازم برای تولید محصول ۱، $5X_1$ است . همینطور محصول ۲، مساوی با $2X_2$ ساعت و محصول ۳ ، مساوی با $4X_3$ ساعت نیروی کار نیاز دارد . کل موجودی نیروی کار نیز ۲۴۰ ساعت است. بنابراین محدودیت نیروی کار عبارت است از :

$5X_1 + 2X_2 + 4X_3 \leq 240$ (محدویت مربوط به نیروی کار_ ساعت)

محدودیت مواد نیز هم به همین طریق فرموله می شود .برای تولید هریک واحد محصول ، ۴کیلوگرم مواد، برای هر واحد محصول۲، ۶کیلوگرم و برای هر واحد محصول ۳، ۳کیلوگرم مواد نیاز است. پس می توان محدودیت مواد را بدین گونه نوشت :

$4X_1 + 6X_2 + 3X_3 \leq 400$ (محدودیت مربوط به مواد اولیه – کیلوگرم)

علاوه بر محدودیتهای فوق ، دسته ای دیگر از محدودیتها را باید اضافه کرد که بیان کننده « نامنفی بودن» متغیرهای تصمیم می باشند. چرا که تولید منفی از یک محصول غیر منطقی ونامفهوم است. این محدودیتها از نظر ریاضی چنین بیان میشوند: $X_1 \geq 0 \quad , X_2 \geq 0 \quad , X_3 \geq 0$

دراکثر مسائل برنامه ریزی خطی شرط نا منفی بودن متغیرها وجود دارد اما چنانچه مساله ای مستلزم استفاده از متغیرهای منفی باشد می توان روش حل مسائل برنامه ریزی خطی را بازهم بکار برد.

در فرموله کردن محدودیتهای مدل، این سوال ممکن است مطرح شود که چرا از نامساوی (≤) استفاده شده است در حالیکه شرط کوچکتر یا مساوی (≤) اجازه می دهد که اگر بهینگی (جواب نهایی) ایجاب نماید، مقداری از منابع بدون استفاده باقی بماند . در بعضی از موارد راه حلی که مقداری از منبعی را بدون استفاده باقی می گذارد، نتیجه ای بهتر یا سودی بیشتر ، در مقایسه با جوابی که تمام منابع را استفاده می کند نتیجه می دهد .نا مساوی (≤) به سادگی شرایط انعطاف پذیری برای این گونه موارد پدید می آورد.

مدل خلاصه شده مساله ترکیب تولید:

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 5X_2 + 2X_3$$

S.T:

$$5X_1 + 2X_2 + 4X_3 \leq 240$$
$$4X_1 + 6X_2 + 3X_3 \leq 400$$
$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

مثال ۲:

بخش رژیم غذایی یک بیمارستان باید برنامه صبحانه بیماران تحت رژیم را تهیه کند و میزان معینی ویتامین A و B در این برنامه بگنجاند . برنامه باید با حداقل هزینه ممکن تهیه شود. مواد اصلی صبحانه به منظور تامین ویتامین A و B ، تخم مرغ و گوشت و نان است. جدول زیر میزان ویتامین موجود در هر یک از این مواد غذایی را نشان می دهند.

ویتامین	ویتامین موجود			
	تخم مرغ	گوشت	نان	حداقل نیاز روزانه
A	۲	۴	۱	۱۶
B	۳	۲	۱	۱۲

قیمت هر تخم مرغ ۱۱ و هر ۱۰۰ گرم گوشت ۶۳ و هر نان ۳ تومان می باشد. بخش رژیم غذایی می خواهد بداند به چه میزان از این مواد در تهیه صبحانه استفاده کند تا هزینه حداقل شود.

متغیرهای تصمیم مساله

X_1: تعداد تخم مرغ های مصرفی

X_2: (میزان گوشت مصرفی هر ۱۰۰ گرم معادل ۱ واحد گوشت می باشد)

X_3: تعداد نان مصرفی

تابع هدف

محدودیت های مدل

$$\text{Min} = Z\ 11X_1 + 63X_2 + 3X_3$$

S.T:

$2X_1 + 4X_2 + X_3 \geq 16$ (محدودیت مربوط به ویتامین A)

$3X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 12$ (محدودیت مربوط به ویتامین B)

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

مسأله حمل و نقل :

مقدمه

بخش حمل و نقل از جمله بخشهای زیربنایی اقتصاد هر کشور است که فعالیتهای آن نه تنها فرآینده توسعه اقتصادی یک کشور را تحت تأثیر قرار می دهد بلکه خود نیز در جریان توسعه اقتصادی یک جامعه تغییر و تحولات کمی و کیفی فراوانی را تجربه می کند. اما تأثیر این بخش بر فرآینداز تأثیر آن از توسعه اقتصادی است. از این رو شرایط و موقعیت این بخش، یکی از شاخصهای مهم سطح توسعه یافتگی، و از جمله عوامل تعیین کننده روند تحولات آن محسوب می شود.به عبارتی حمل و نقل را پایه های پلی دانسته اند که انقلاب صنعتی بر روی آن استوار است.

باز شدن بازارهای تازه برای کالاهای تولیدی یک جامعه و یا فراهم آمدن بازارهای جدید تأمین مواد اولیه و وابسته می تواند شدیداً بر جریان رشد اقتصادی یک منطقه مؤثر باشد، که از جمله عوامل لازم برای اینکار داشتن و توجه کردن به شبکه های ارتباطی حمل و نقل می باشد.

یک شرکت حمل و نقل درصدد حمل تلویزیون های تولیدی از ۳ کارخانه به ۳ شهر است. عرضه ماهانه هر کارخانه و تعداد تقاضای ماهانه هر شهر در جداول زیر داده شده است.

کارخانه	عرضه تلویزیون/ دستگاه	شهر	تعداد تقاضا
۱. تهران	۳۰۰	A. شیراز	۱۵۰
۲. اراک	۲۰۰	B. بوشهر	۲۵۰
۳. اصفهان	۲۰۰	C. اهواز	۲۰۰

هزینه حمل هر دستگاه تلویزیون از هرکارخانه به هر شهر نسبت به مسافت و کیفیت راه تغییر می کندو به شرح جدول زیر است(هزینه حمل به تومان است).

از کارخانه	A	B	C
۱	۱۶	۱۸	۱۱
۲	۱٤	۱۲	۱۳
۳	۱۳	۱۵	۱۷

مسأله را به گونه ای فرموله کنید که ضمن تامین تقاضای هر شهر، کل هزینه حمل نیز حداقل گردد:

متغیر تصمیم

این مسأله دارای ۹ متغیر تصمیم است که بیانگر تعداد تلویزیون (دستگاه) حمل شده از هر کارخانه به هر شهر خواهد بود: یعنی تعداد تلویزیون قابل حمل از کارخانه **i** ام به **j** ام x_{ij} که در آن:

i = تهران(۱) و اراک(۲) و اصفهان(۳)

J = شیراز(**A**) و بوشهر(**B**) و اهواز (**C**) خواهد بود.

برخلاف مسائل قبلی، متغیر تعمیم در این مسأله دارای دو اندیس می باشد. اندیس اول "**i**" بیانگر نام کارخانه و اندیس دوم "**j**" نشان دهنده نام شهر خواهد بود. به عنوان مثال x_{3A} بیانگر تعداد تلویزیون است که از کارخانه شماره ۳ (اصفهان) به شهر**A**(شیراز) حمل می شود.

تابع هدف

تابع هدف عبارت است از حداقل کردن کل هزینه حمل و نقل می باشد.

بنابراین تابع هدف که از مجموع هزینه حمل تلویزیون از هر کارخانه به هر شهر بدست می آید به شرح زیر خواهد بود.

$$\text{Min } Z= 16x_{1A} + 18X_{1B}+ 11X_{1C}+ 14X_{2A}+ 12X_{2B}+ 13X_{2C}+ 13X_{3A}+15X_{3B}+17X_{3C}$$

محدودیت های مدل

محدودیت های این مسأله از تعداد تلویزیون قابل عرضه در هر کارخانه و تعداد تقاضای هر شهر ساخته می شوند. در مجموعه شش محدودیت کار کردی برای مسأله وجود دارد. یک محدودیت به ازای هر کارخانه عرضه کننده و یکی به ازای هر شهر تقاضا کننده، برای مثال کارخانه ای که در شهر تهران وجود دارد حداکثر می تواند ۳۰۰ دستگاه تلویزیون را به شهرهای متقاضی ارسال کند. بنابراین محدودیت عرضه شهر۱ به صورت زیر نوشته می شود:

عرضه کارخانه تهران- تلویزیون $X_{1A} + X_{1B} + X_{1C} \leq 300$

محدودیت عرضه، به دو دلیل باید به صورت کوچکتر یا مساوی (≤) تعریف شود.

اول اینکه: بیشتراز ۳۰۰ دستگاه قابل حمل نیست، چون کل ظرفیت کارخانه۱، ۳۰۰ دستگاه است.

دوم اینکه: اگر کمتر از ۳۰۰ دستگاه ارسال شود، هیچ مشکل پدید نمی آید، چون کل عرضه کارخانه ها ۱۰۰ واحد بیشتراز کل تقاضای شهرها می باشد. با همین استدلال محدودیتهای عرضه برای کارخانه های ۲و۳ به صورت(≤) تعریف می شوند. بدین صورت:

عرضه کارخانه اراک- تلویزیون $X_{2A} + X_{2B} + X_{2c} \leq 200$

عرضه کارخانه اصفهان- تلویزیون $X_{3A} + X_{3B} + X_{3c} \leq 200$

سه محدودیت دیگر که بیانگر تعداد تقاضای هر شهر می باشد، قابل تعریف می باشند. به طور کلی تعداد تلویزیون ارسالی از سه کارخانه به هر شهر باید تقاضای آن شهر را برآورده سازد.

محدودیت های تقاضا باید به صورت مساوی تعریف شوند. چون همه تقاضا قابل دستیابی می باشد.

بنابراین داریم:

تقاضای شهر شیراز- تلویزیون $X_{1A}+ X_{2A}+X_{3A} =$ ۱۵۰

تقاضای شهر بوشهر-تلویزیون $X_{1B}+ X_{2B}+X_{3B} =$ ۲۵۰

تقاضای شهر اهواز- تلویزیون $X_{1C}+X_{2C}+ X_{3C} =$ ۲۰۰

خلاصه مدل

با اضافه کردن محدودیت های غیر منفی، مدل کامل برنامه ریزی خطی برای مسأله حمل و نقل به صورت زیر خلاصه می شود:

$$\text{Min } Z= 16X_{1A}+ 18X_{1B}+ 11X_{1C}+ 14X_{2A}+12X_{2B}+ 13X_{2C}+ 13X_{3A}+ 15X_{3B}+17X_{3C}$$

S.T:

$$X_{1A}+ X_{1B} + X_{1C} \leq 300$$
$$X_{2A}+ X_{2B}+X_{2C} \leq 200$$
$$X_{3A}+ X_{3B}+ X_{3C} \leq 200$$
$$X_{1A}+X_{2A}+X_{3A} = 150$$
$$X_{1B}+ X_{2B}+X_{3B} = 250$$
$$X_{1C}+ X_{2C} + X_{3C} = 200$$
$$X_{ij} \geq 0 \ (\ i = 1,2,3 \quad j = A,B,C\ )$$

مسأله ترکیب محصولات کشاورزی :

کشاورزی دارای زمینی است که مساحت آن ۲۰۰۰ هکتار می باشد. زمین این کشاورز به ۳ قطعه مجزا تقسیم شده است. قطعه اول ۵۰۰ هکتار، قطعه دوم ۸۰۰ هکتار و قطعه سوم، ۷۰۰ هکتار مساحت دارد. زمین کشاورز برای کشت ذرت، پیاز و لوبیا مناسب است. حداکثر زمین قابل کشت برای هر یک از محصولات و سود حاصل از هر هکتار بر حسب نوع محصول قابل کشت در جدول زیر داده شده است.

محصول	حداکثر سطح قابل کشت(هکتار)	سود هر هکتار(ریال)
ذرت	۹۰۰	۶۰.۰۰۰
پیاز	۷۰۰	۴۵۰.۰۰۰
لوبیا	۱۰۰۰	۳۰.۰۰۰

هر یک از محصولات را میتوان در هر کدام از قطعات سه گانه کشت نمود. اما شرایط زیر باید رعایت شود:

۱- حداقل ۶۰٪ هر قطعه زمین باید زیر کشت برود.

۲- کشاورز می خواهد که در هر سه قطعه زمین نسبت مساحت زیر کشت به کل مساحت مساوی باشد .

حل مسأله را به گونه ای فرموله کنید که ضمن مشخص شدن مقدار محصول کشت شده در هر قطعه ، سود کل کشاورز حداکثر شود.

متغیرهای تصمیم

متغیرهای تصمیم این مسأله شامل هر محصول کشت شده در هر قطعه زمین است. به عبارت دیگر:

مساحت کشت شده برای محصول i در قطعه زمین j(X_{ij} = (i =1,2,3 , j=1,2,3) است.

به عنوان مثالX_{13} ، بیانگر مساحت زیر کشت محصول ذرت در قطعه سوم می باشد. بنابراین مسأله دارای ۹ متغیر خواهد بود.

تابع هدف

هدف این مسأله حداکثر کردن سود ناشی از کشاورزی است. تابع هدف از حاصلضرب سطح زیر کشت هر محصول در سود هر هکتار بدست می آید. سپس تابع هدف به صورت زیر نوشته می شود:

$$\text{Max } Z= 60.000 (X_{11}+ X_{12}+X_{13}) + 450.000 (X_{21}+ X_{22}+X_{23}) + 30.000 (X_{31}+ X_{32}+X_{33})$$

محدودیت های مسأله

محدودیت های این مسأله بیانگر محدودیت مساحت هر قطعه زمین و شرایط ذکر شده از سوی کشاورز است. مجموعه اول محدودیت ها، معرف حد بالا و پایین سطح زیر کشت در هر قطعه زمین است. حد بالا به طور طبیعی همان مساحت قطعه زمین j است و حد پایین به ۶۰٪ مساحت هر قطعه زمین محدود خواهد شد. در نتیجه محدودیت های زیر را خواهیم داشت:

برای قطعه زمین شماره ۱ $300 \le X_{11}+X_{21}+X_{31} \le 500$

برای قطعه زمین شماره۲ $480 \le X_{12}+X_{22}+X_{32} \le 800$

برای قطعه زمین شماره۳ $420 \le X_{13}+X_{23}+X_{33} \le 700$

معادلات فوق ، همگی از فرم غیر استاندارد برخوردارند. سپس تمام محدودیتهای فوق به شکل استاندارد تبدیل می شوند. یعنی همه متغیرها به سمت چپ معادلات انتقال می یابند و سمت راست شامل مقادیر ثابت خواهد بود. سپس هر یک از محدودیت های فوق به دو محدودیت خاص تبدیل می شوند. به صورت زیر:

محدودیت حداقل برای قطعه زمین شماره ۱ $X_{11}+X_{21}+X_{31} \ge 300$

محدودیت حداکثر برای قطعه زمین شماره۱ $X_{11}+X_{21}+X_{31} \le 500$

محدودیت حداقل برای قطعه زمین شماره ۲ $X_{12}+X_{22}+X_{32} \ge 480$

محدودیت حداکثر برای قطعه زمین شماره ۲ $X_{12}+X_{22}+X_{32} \le 800$

محدودیت حداقل برای قطعه زمین شماره ۳ $X_{13}+X_{23}+X_{33} \ge 420$

محدودیت حداکثر برای قطعه زمین شماره ۳ $X_{13}+X_{23}+X_{33} \le 700$

از داده های جدول مسأله مشخص شده که مساحت زیر کشت هر محصول محدود و مشخص است. پس باید سه محدودیت دیگر برای محدود نمودن مساحت زیر کشت هر محصول تعریف کرد. این دسته از محدودیت ها عبارتند از:

مساحت زیر کشت ذرت – هکتار $X_{11}+X_{12}+X_{13} \le 900$

مساحت زیر کشت پیاز – هکتار $X_{21}+X_{22}+X_{23} \le 700$

مساحت زیر کشت لوبیا – هکتار $X_{31}+X_{32}+X_{33} \le 1000$

آخرین دسته از محدودیت های این مسأله به سیاست کشاورز برمیگردد که میخواهد نسبت مساحت زیر کشت هر قطعه به کل مساحت آن برای هر سه قطعه مساوی باشد. یعنی:

$$\frac{X_{11}+X_{21}+X_{31}}{500}+\frac{X_{21}+X_{22}+X_{32}}{800}+\frac{X_{31}+X_{32}+X_{33}}{700}$$

واضح است که مدل استاندارد برنامه ریزی خطی (LP) نمی تواند محدودیت فوق را شامل شود. سپس باید آنرا به محدودیت های زیر تبدیل کرد:

$$\frac{X_{11}+X_{21}+X_{31}}{500}=\frac{X_{21}+X_{22}+X_{32}}{800}$$

$$\frac{X_{11}+X_{21}+X_{31}}{500}=\frac{X_{13}+X_{23}+X_{33}}{700}$$

$$\frac{X_{12}+X_{22}+X_{32}}{800}=\frac{X_{13}+X_{23}+X_{33}}{700}$$

گرچه محدودیت اولیه تساوی نسبت ها ، به یک فرم متعارف تبدیل شده است ولی باید آنها را به شکل استاندارد (LP) تبدیل نمود. بصورت زیر:

خلاصه مدل :

مدل کامل برنامه ریزی خطی مسأله با اضافه کردن محدودیت های غیر منفی برای مسأله فوق بدین صورت خواهد بود:

$$\text{Min } Z= 60.000 (X_{11}+ X_{12}+X_{13}) + 450.000 (X_{21}+ X_{22}+X_{23}) + 30.000 (X_{31}+ X_{32}+X_{33})$$
$$X_{11}+ X_{21}+ X_{31} \geq 300$$
$$X_{11}+ X_{21}+ X_{31} \leq 500$$
$$X_{12}+ X_{22}+ X_{32} \geq 480$$
$$X_{12}+ X_{22}+ X_{32} \leq 800$$
$$X_{13}+ X_{23}+ X_{33} \geq 420$$
$$X_{13}+ X_{23}+ X_{33} \leq 700$$
$$X_{11}+ X_{12}+ X_{13} \leq 900$$
$$X_{21}+ X_{22}+ X_{23} \leq 700$$
$$X_{31}+ X_{32}+ X_{33} \leq 1000$$
$$800 (X_{11}+ X_{21}+X_{31}) - 500 (X_{12}+ X_{22}+X_{32}) = 0$$
$$700 (X_{11}+ X_{21}+X_{31}) - 500 (X_{13}+ X_{23}+X_{33}) = 0$$
$$700 (X_{12}+ X_{22}+X_{32}) - 800 (X_{13}+ X_{23}+X_{33}) = 0$$
$$X_{ij} \geq (i= 1,2,3 \ . \ j=1,2,3)$$

مساله

۱) یک شرکت تولید کننده ،دو محصول p_1 , p_2 را می سازد، سود به ازای هر واحد در محصول به ترتیب ۴۰ و۶۰ دلار می باشد ، هر دو محصول نیازمند انجام فرآیند در ۳ ماشین می باشند.

جدول زیر بین تعداد ساعت کار ماشین در هر دو هفته و زمان مورد نیاز روی هر دستگاه برای یک واحد از p_1 , p_2 می باشد. فرموله کردن مسئله ترکیب را به شکل برنامه ریزی خطی انجام دهید ؟

ماشین	P_1	P_2	ز مان در دسترس ماشین
۱	۰	۲	۴۳۰
۲	۴	۱	۴۶۰
۳	۲	۰	۴۲۰
×	۴۰ دلار	۶۰ دلار	سود حاصله از تولید

۲) محصول مختلف در یک کارگاه کوچک تولیدی با توجه به ۳ نوع عملیات مختلف تولید می شود . مدت زمان انجام هریک از عملیات بر روی هر واحد از محصولات برحسب دقیقه و سایر اطلاعات در جدول زیر داده شده است. میزان بهینه تولید روزانه هر محصول را برای هدف حداکثر سازی سود تعیین نمائید؟

نوع عملیات	محصول ۱	محصول ۲	محصول ۳	حداکثر زمان عملیات برحسب روز / دقیقه
تراشکاری	۱	۲	۱	۴۳۰
جوشکاری	۳	۰	۲	۴۶۰
ورق کاری	۱	۴	۰	۴۲۰
×	۳۰۰۰	۲۰۰۰	۵۰۰۰	سود حاصله از تولید

۳) یک شرکت تولید کننده دو محصول P_1 و P_2 را می سازد . سود به ازای هر واحد در محصول به ترتیب$ ۶۰ و $۵۰ می باشد. جدول زیر بین تعداد ساعت کار ماشین در هر دو هفته و زمان مورد نیاز روی هر دستگاه برای هریک واحد از P_1 و P_2 می باشد.مطلوبست فرموله کردن این مسئله؟

نوع ماشین	P_1	P_2	ز مان در دسترس ماشین
۱	۲	۱	۳۰۰
۲	۳	۴	۵۰۹
۳	۴	۷	۸۱۲
×	۵۰ دلار	۶۰ دلار	سود حاصله از تولید

۴) یک موسسه تولیدی دامداران مایل است که با توجه به مواد موجود ، خوراک مورد نیاز دام ها را با حداقل هزینه تامین نمایند. میزان عناصر مغزی موجود در هر کیلو گرم از این مواد (برحسب تعداد عنصر غذایی در ماده موجود) ، مقدار از این عناصر مغزی که در روز مورد نیاز است به شرح زیر آمده است ، لذا مسئله را در قالب یک مدل برنامه ریزی خطی فرومولە کنید؟

عناصر مغزی	ذرت	مواد عالی	یونجه	حداقل احتیاجات روزانه
قند ها	۹۰	۲۰	۴۰	۳۰۰
پروتئین ها	۳۰	۸۰	۶۰	۱۸۰
ویتامین ها	۱۰	۲۰	۴۰	۱۵۰
قیمت	۲۱	۱۸	۱۵	×

۵) شرکتی می خواهد بداند که از هر سه محصول ذیل چه مقدار تولید کند تا رعایت محدودیت منابع حداکثر سود کامل نایل آید.

شرح :	محصول ۱	محصول ۲	محصول ۳	میزان منابع موجود
نیروی انسانی	۶	۲	۵	۲۰۰ نفر
مواد اولیه	۴	۵	۳	۱۵۰ کیلو گرم
میزان سود	۴۰	۳۰	۳۰	

۶) یک شرکت تولید کننده اسباب بازی سه نوع اساب بازی تولید می کند، نیروی کار مورد نیاز و هزینه واحدتولید از آنها طبق کار مورد نیاز و هزینه هر واحد تولید از آنها طبق جدول زیر تعریف شده است:

نوع اساب بازی	هزینه هر واحد / تولید	نیروی کار مورد نیاز
A	۷۰۰	۲
B	۱۰۰۰	۴
C	۵۰۰	۲

کل بودجه کارخانه ۲۰۰.۰۰۰ ریال است و کل ساعت کار کارخانه ۶۰۰ ساعت می باشد . تقاضای اسباب بازی نوع A ۲۰۰ واحد ، نوع B ۳۰۰ واحد و برای نوع C ۱۵۰ واحد می باشد. قیمت فروش هر واحد از اسباب بازی به ترتیب ۲۰۰۰،۱۲۰۰۰،۱۵۰۰۰ ریال می باشد .مسئله را به گونه ایی فرموله کنید که ضمن برآورده ساختن تقاضای هریک از اسباب بازی ها ، سود کل تولیدات حداکثر شود.

فصل سوم: بخش اول ...

روش سیمپلکس (Simplex Method)

مقدمه

در این فصل ، یک رویکرد ریاضی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی معرفی خواهدشد. این رویکرد« روش سیمپلکس» (Simplex Method) نامیده می شود .

همانطور که در روش برنامه ریزی خطی و مدل ها گفته شد از روش ترسیمی تنها برای حل مسائل برنامه ریزی خطی دو، یا حداکثر سه متغیری می توان استفاده کرد، در عمل استفاده از مدل برنامه ریزی خطی برای حل مسائل واقعی ،مستلزم بکارگیری تعداد زیادی متغیر و محدودیت است. بنابراین به روشی کاراتر بنام روش سیمپلکس نیاز است .

روش سیمپلکس که در سال ۱۹۴۷ توسط شخصی بنام جرج بی . دانتزیک (George B.Dantzig) برای حل مسائل برنامه ریزی خطی ایجاد شد . این روش یک روش الگوریتم(Algorithm) نظام مند و تکراری است , در حقیقت هر فرآیند حلی که قدم به قدم و تکراری باشد، یک الگوریتم محسوب می شود.الگوریتم ، فرآیندی است که درآن یک « رویه نظام گرا» آن قدر تکرار می گردد تا سرانجام به جواب مطلوب برسد.

روش سیمپلکس یک فن کلی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی است. در این روش ، ابتدا مدل وارد یک جدول می شود و سپس یک سری مراحل ریاضی بر روی جدول اجرا می گردد. مراحل ریاضی روش سیمپلکس به نحو اثر بخشی بیانگر فرآیند حرکت در روش ترسیمی می باشد که جهت حرکت را از یک گوشه به گوشه دیگر نشان می دهد. برخلاف روش ترسیمی که باید تمام گوشه های موجه را پیدا کردن گوشه موجه بهینه جستجو کنیم ، در روش سیمپلکس همواره از یک گوشه به گوشه ای بهتر حرکت کرده تا اینکه بهترین گوشه پیدا شود و توقف نماییم.

تبدیل مدل برنامه ریزی خطی به فرم استاندارد:

اولین قدم در حل یک مدل برنامه ریزی خطی با استفاده از روش سیمپلکس تبدیل مدل به فرم استاندارد است. فرم استاندارد مدل برنامه ریزی خطی ، عبارت است از یک مدل با تابع هدف Max و یا محدودیتهایی به فرم مساوی(=) به جای کوچکتر مساوی ($\leq$) یا بزرگتر مساوی ($\geq$).

رویه ای شناخته شده برای تبدیل محدودیت کوچکتر مساوی ($\leq$) به محدودیت مساوی (=) وجود دارد. با اضافه کردن یک متغیر جدید به هر محدودیت $\leq$ می توان به یک معادله = دست یافت.

متغیر های اضافه شده به نامعادلات کوچک تر مساوی (≤) را « متغیر کمبود» گویند. و آنها را با « S» نشان می دهند. رویه تبدیل مدل ***Max*** به فرم استاندارد را با ذکر یک مثال ادامه می دهیم و مرحله به مرحله پیش می رویم:

مساله (۱) :

مدل زیر را در نظر بگیرید :

$Max\ Z= 40X_1 + 50X_2$

S.T:

$X_1 + 2X_2 \leq 40$ محدودیت نیروی کار (نفر- ساعت)

$4X_1 + 3X_2 \leq 120$ محدودیت مواد اولیه (Kg)

X_1 و $X_2 \geq 0$

حال با اضافه کردن یک متغیر کمبود (S) به هریک از محدودیتهای مدل می توانیم ، نامعادلات را به تساوی تبدیل کنیم . در نتیجه معادلات زیر بدست می آید:

$X_1 + 2X_2 + S_1 = 40$ بنابراین S_1 بیانگر « موجودی نیروی کار »

$4X_1 + 3X_2 + S_2 = 120$ S_2 بیانگر « مواد اولیه » خواهد بود

متغیر های کمکی S_1 و S_2 باید به گونه ای به خود مقدار بگیرند که سمت چپ معادله با سمت راست آن مساوی باشد. برای مثال جواب فرضی ($X_1 = 5$, $X_2 = 10$) را درنظر بگیرید . با جای گذاری این مقدار در معادلات فوق خواهیم داشت:

$X_1 + 2X_2 + S_1 = 40$

$5 + 2(10) + S_1 = 40$

$S_1 = 15$

و

$4X_1 + 3X_2 + S_2 + 120$

$4(5) + 3(10) + S_2 = 120$

$S_2 = 70$

ضریب 40 برای X_1 و ضریب 50 برای X_2 در تابع هدف به ترتیب بیانگر سهم هر واحد از محصول ۱ و ۲ درسودآوری هستند. اما سوال مطرح می شود که سهم هرواحد از متغیرهای کمبود در ایجاد سود چقدر است؟ واقعیت این است که متغیر های کمبود « هیچ» سهمی در ایجاد سود ندارد. چون بیانگر منابع مصرف نشده است.

سود تنها در صورتی ایجاد می شود که منابع در تولید X_1 وX_2 به کار رفته باشند. بنابراین ضریب متغیرهای کمبود در تابع هدف مساوی « صفر» خواهد بود و تابع هدف را براساس آنها باید به صورت زیر نوشت:

$$MaxZ= 40X_1 + 50X_2 + 0\,S_1 + 0\,S_2$$

همچون متغیر های تصمیم ، مقدار متغیر های کمبود همواره غیر منفی(≥ 0) است. چون منبع « منفی» چیزی غیر ممکن می باشد. بنابراین برای این مدل باید نوشت:

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

براساس مفاهیم فوق ، خلاصه مدل استاندارد مثال ۱و۴ به صورت زیر در می آید.

$$Max\ Z= 40X_1 + 50X_2 + 0\,S_1 + 0\,S_2$$

S.T:

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 40$$

$$4X_1 + 3X_2 + S_2 = 120$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

واضح است که همیشه مدل برنامه ریزی خطی فقط دارای محدودیت های کوچکتر مساوی $\leq$ نخواهد بود. چنانچه مدل دارای محدودیت های بزرگتر مساوی $\geq$ باشد ، دیگر نمی توان با اضافه کردن متغیر های کمبود مدل را به فرم استاندارد تبدیل نمود. جهت اجرای رویه استاندارد این دسته از مدل ها به مثال زیر توجه نمایید.

مساله(۲)

مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$Min\ Z= 6X_1 + 3X_2$$

S.T:

$$2X_1 + 4X_2 \geq 16$$

$$4X + 3X_2 \geq 24$$

$$X_1, X_2, \geq 0$$

اولاً ، گفته شد که یک مدل استاندارد، مدلی است که دارای تابع هدف Max باشد. برای تبدیل هر تابع هدف Min به تابع هدف Max می توان از تعریف ریاضی زیر استفاده کرد:

$$\text{Min } Z = \text{Max } (-Z)$$

به بیان دیگر ، برای تبدیل یک تابع هدف **Min** به تابع هدف **Max** ، می توان طرفین تابع هدف **Min** را در ۱- ضرب کرد. چنانچه **Z** – را حداکثر کنیم، همانند آن می ماند که تابع **Z** را حداقل نموده ایم . پس برای مثال فوق داریم :

$Max(-Z) = -6X_1 - 3X_2$

S.T:

$2X_1+4X_2 \geq 16$

$4X_1+ 3X_2 \geq 24$

$X_1 , X_2, \geq 0$

برای تبدیل محدودیت های $\geq$ به تساوی ، به جای اضافه کردن یک متغیر کمبود، ناچار باید یک « متغیر مازاد » « **Surplus variable**» از آن کم کنیم . در حالیکه یک متغیر کمبود به محدودیت $\leq$ اضافه می شود، بیانگر منابع مصرف نشده است، یک متغیر مازاد که از محدودیت $\geq$ کسر می شود، بیانگر منبعی است که بیش از حداقل لازم مصرف شده است. همانند کمبود، یک متغیر مازاد با نماد « **S**» نشان داده می شود.و باید بصورت غیر منفی (≥ 0) تعریف شود.در ادبیات تحقیق در عملیات هم متغیر کمبود و هم متغیر مازاد تحت عنوان « متغیر های کمکی » نام برده می شوند.

حال با استفاده از متغیر های کمکی S_1 , S_2 هر یک از محدودیتهای مدل مساله فوق را به تساوی تبدیل می کنیم:

$2X_1+4X_2 - S_1 = 16$

$4X_1+3X_2 - S_2 = 24$

جهت درک بهتر متغیر های مازاد S_1 , S_2 به جواب آزمایشی زیر توجه کنید:

$X_1 = 0$ و $X_2 = 10$

با جایگزین کردن مقدار جواب آزمایش ، در معادلات خواهیم داشت:

$2(0) + 4(10) - S_1 = 16$

$-S_1 = 16 - 40$

$S_1 = 24$

برای تولید صفر و احد X_1 و 10 واحد X_2 به 40 واحد از منبع اول نیاز داریم . در حالیکه حداقل منبع موجود ۱۶ واحد است.بنابراین $S_1 = 24$ ، بیانگر 24 واحد منبع مصرف شده بیش از حداقل موجودی از منبع (≥ 16) به همین طریق براساس منبع دوم داریم :

$4(0) + 3(10) - S_2 = 24$

$-S_2 = 24 - 30$

$S_2 = 6$

همچون متغیر های کمبود، نقش متغیر های مازاد در ایجاد سود(هزینه) مساوی صفر است. پس آنها را با ضریب صفر در تابع هدف نشان می دهند. براساس مفاهیم بیان شده ، می توان فرم استاندارد شده مساله(۲) را به صورت زیر باز نویسی کرد:

$$MaxZ=-6X_1-3X_2+0S_1+0S_2$$

S.T :

$$2X_1+4X_2-S_1=16$$

$$4X_1+3X_2-S_2=24$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

چنانچه دریک مدل برنامه ریزی خطی محدودیت مساوی (=) وجود داشته باشد، آن محدودیت خود دارای فرم استاندارد است. بنابراین ضرورتی به استفاده از متغیر کمکی برای استاندارد کردن آن نخواهد بود. بنابراین عیناً محدودیت مساوی به عنوان یکی از محدودیت های مدل استاندارد آورده می شود.

به طور خلاصه رویه تبدیل مدل برنامه ریزی خطی به شکل استاندارد به شرح زیر تکرار می شود:

الف) اگر مدل به صورت حداکثر سازی (Max)باشد:

۱. محدودیت های کوچکتر مساوی($\leq$)را با اضافه کردن متغیر کمکی به تساوی تبدیل کنید.
۲. محدودیت بزرگتر مساوی ($\geq$) را با کسر کردن متغیر کمکی به تساوی تبدیل کنید.
۳. محدودیت مساوی (=) را عیناً بنویسید.

ب) اگر مدل به صورت حداقل سازی (Min) باشد:

۱. طرفین تابع هدف را در ۱- ضرب کنید و آن را با **Max** بنویسید.
۲. محدودیت های کوچکتر مساوی($\leq$)را با اضافه کردن متغیر کمکی به تساوی تبدیل کنید.
۳. محدودیت بزرگتر مساوی ($\geq$) را با کسر کردن متغیر کمکی به تساوی تبدیل کنید.
۴. محدودیت مساوی (=)را عیناً بنویسید.

روش سیمپلکس

روش سیمپلکس به مجموعه ای از مراحل ریاضی برای حل یک مساله برنامه ریزی خطی گفته می شود که در یک جدول که به نام « تابلوی سیمپلکس» «**Simplex Tableau**» معروف است انجام می گیرد. تابلو سیمپلکس مدل را به گونه ای سازماندهی می کند که به کارگیری مراحل ریاضی را آسانتر می سازد. مراحل سیمپلکس با استفاده از مساله زیر مورد بررسی قرار می گیرد.

مساله (۳):

مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$Max\ Z= 40X_1 + 50X_2$$

S.T:

$$X_1 + 2X_2 \leq 40$$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 120$$

$$X_1, X_2, \geq 0$$

خلاصه مدل استاندارد را خواهیم داشت :

$$Max\ Z= 40X_1 + 50X_2 + 0\ S_1 + 0\ S_2$$

S.T:

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 40$$

$$4X_1\ 3\ X_2 + S_2 = 120$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

تابلو ی اولیه سیمپلکس برای این مدل با ستونها و سطرهای مورد استفاده در جدول (۱) زیر نشان داده شده است.

متغیر های اساسی	Z X_1 X_2 S_1 S_2	مقادیر سمت راست

جدول شماره ۱

در تابلوی سیمپلکس ، همواره ستون اول با عنوان « متغیر های اساسی» نام گذاری می شودو ستون آخر آن بیانگر « مقادیر سمت راست» معادلات مدل است. ستون های مابین ستون اول و آخر بیانگر نام متغیر های مورد استفاده در مدل است.

سطر اول تابلوی سیمپلکس ، به ضرایب متغیر ها در تابع هدف اختصاص دارد و معمولاً این سطر را « سطر صفر » گویند.

برای نوشتن سطر صفر به صورت زیر عمل می شود:

الف) تابع هدف را به فرم Max تبدیل کنید.

ب) مقادیر راست تابع هدف را به سمت چپ معادله انتقال دهید تا مقدار سمت راست تابع مساوی صفر قرار گیرد.

پس در مساله (۳) خواهیم داشت:

$$Max\ Z= 40X_1 + 50X_2 + 0\ S_1 + 0\ S_2$$

$$Z - 40X_1 - 50X_2 = 0$$

بدین طریق تابع هدف به فرم یکی از معادلات استاندارد مدل درآمده است.

« قدم بعدی » برای پر کردن تابلوی سیمپلکس ، تعیین یک جواب موجه اساسی است. به عبارات دیگر ، تعیین اینکه کدام یک از متغیر ها باید دارای مقدار صفر باشد و کدامیک دارای مقدار بزرگتر از صفر خواهند بود؟ روش سیمپلکس همواره « مبدا مختصات » مدل را به عنوان جواب موجه اساسی اولیه انتخاب می کند. زیرا مقدار متغیر های تصمیم در این گوشه براحتی قابل تعریف خواهد بود. در این گوشه تمام متغیر های تصمیم مدل مساوی صفر هستند و مقدار متغیر های کمکی مساوی با مقادیر سمت راست محدودیتهای مدل است.

به عبارت دیگر این نقطه راحت ترین نقطه برای شروع روش سیمپلکس است .

در مساله فوق ($X_1 = 0$, $X_2 = 0$) و بنابراین متغیر های (S_1 , S_2) تشکیل دهنده متغیر های اساسی ما خواهند بود بنابراین:

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 40$$

$$0 + 2(0) + S_1 = 40$$

$$S_1 = 40$$

و

$$4X_1 + 3X_2 + S_2 = 120$$

$$4(0) + 3(0) + S_2 = 120$$

$$S_2 = 120$$

به عبارات دیگر ، در مبدا مختصات که هیچ تولیدی صورت نمی گیرد ، تمامی منابع بلاء استفاده هستند. بنابراین ردیفهای بعدی تابلوی سیمپلکس به محدودیتهای مدل اختصاص می یابند که در مساله فوق متغیر های معرف آنها S_1 و S_2 خواهند بود. بنابراین بخشی از جدول (۱) مشخص شده به صورت جدول (۲) درمی آید.

متغیر های اساسی	Z X_1 X_2 S_1 S_2	مقادیر سمت راست
Z_0		0
S_1		40
S_2		120

جدول (۲) نشان می دهد که در این گوشه ($X_1 = 0$, $X_2 = 0$ و $S_1 = 40$ و $S_2 = 120$) می باشند.

بنابراین هنوز تولیدی صورت نگرفته است. یعنی کلیه منابع دست نخورده باقی مانده و لذا مقدار سود حاصل از تولید مساوی صفر (سمت راست مقابل Z_0) است .

یعنی :

$$Z - 40X_1 - 50X_2 = 0$$
$$Z - 40(0) - 50(0) = 0$$
$$Z = 0$$

پس تابلوی اولیه سیمپلکس بیانگر مبدا مختصات مدل برنامه ریزی خطی است.

مرحله بعد، انتقال ضرایب متغیرها چه در تابع هدف و چه در محدودیتها به دورن تابلوی سیمپلکس است. بدین منظور یک بار دیگر فرم قابل انتقال مدل به دورن تابلوی سیمپلکس را با استفاده از توضیحات فوق برای مدل مساله (۳) باز نویسی می کنیم.

سطر صفر $Max\ Z = -40X_1 - 50X_2 + 0S_1 + 0S_2$

S.T:

سطر۱ : $X_1 + 2X_2 + S_1 = 40$

سطر ۲ : $4X_1 + 3X_2 + S_2 = 120$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

باتوجه به اینکه عناوین متغیرهای مدل در سطر اول بین ستون « متغیر های اساسی» و ستون « مقادیر سمت راست» « ***Right – Hand – Side*** » ذکر شده است. پس سطر صفر (z_0) شروع کرده و ضرایب هر یک از متغیر ها را از معادله مربوط به تابع هدف استخراج کرده و در ذیل نام آن می نویسیم . به همین طریق ضرایب متغیر ها در سطر ۱و۲ به ترتیب از محدودیتها استخراج می شودو به درون تابلو انتقال می یابد . حاصل جدول (۳) خواهدشد.

تابلوی اولیه سیمپلکس برای مساله (۳)

متغیر های اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	1	- 40	-50	0	0	متغیر غیر اساسی (تصمیم) 0
S_1	0	1	2	1	0	متغیر اساسی (کمکی) 40
S_2	0	4	3	0	1	متغیر اساسی (کمکی) 120

از مفاهیم بیان شده تا اینجا در می یابیم که در یک جواب موجه اساسی ، متغیر های مساوی صفر را «متغیر های غیر اساسی » «*Non- basic variables*» و متغیر های بزرگتر از صفر را « متغیر های اساسی » « *Basic variables*» .

بنابراین در تابلوی سیمپلکس

اگر مدل از نوع *Max* با محدودیت های کوچکتر مساوی ($\leq$) باشد، همواره متغیر های اساسی (غیر صفر) متغیر های کمکی خواهند بود.و متغیر های غیر اساسی (مساوی صفر) متغیر های تصمیم هستند.

۱) انتخاب متغیر ورودی : (تعیین ستون لولا – تعیین ستون ورودی)

چگونگی تعیین متغیر ورودی براساس ضرایب سطر صفر (Z_0) انجام می گیرد.از آنجا که مقادیر سمت راست تابع هدف به سمت چپ انتقال یافته است، پس آن متغیری برای ورودی انتخاب می شود که دارای « منفی ترین » ضریب در ردیف (Z_0) باشد. و در اینجا جدول شماره (۳) معلوم می شود که X_2 نسبت به سایر متغیرهای غیر اساسی دارای بیشترین ضریب منفی یعنی (50-) است. بنابراین X_2 به عنوان متغیر ورودی انتخاب می شود.و این ستون را« ستون لولا» « pivot column » نامیده و آنرا علامت گذاری می کنیم .

شکل جدول شماره (۴) انتخاب متغیر ورودی

ورودی

متغیر های اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	1	- 40	-50	0	0	0
S_1	0	1	2	1	0	40
S_2	0	4	3	0	1	120

ستون لولا

تذکر : یعنی از بین دو متغیر X_1 و X_2 که غیر اساسی هستند یکی را باید بعنوان متغیر ورودی جهت تبدیل از حالت غیر اساسی به اساسی باید انتخاب کنیم. منطق سیمپلکس برای انتخاب متغیر ورودی به شکلی است که اگر تابع هدف ***Max*** باشد منفی ترین ضریب از بین ضرایب متغیر های غیر اساسی در سطر ***Z*** تابع هدف انتخاب می شود.و اگر تابع هدف ***Min*** باشد مثبت ترین ضریب از بین ضرایب متغیر های غیر اساسی در سطر ***Z*** تابع هدف انتخاب می گردد.

متغیر مربوط به آن ضریب را متغیر ورودی و ستون مربوط به آن متغیر را ستون یا ستون لولا یا چرخشی می نامند.(اگر منفی ترین ضریب منحصر به فرد نباشد و یا مثبت ترین ضریب منحصر به فرد نباشد یکی را به دلخواه انتخاب می کنیم).

۲) انتخاب متغیر خروجی (تعیین سطر خروجی – سطر چرخشی یا سطر لولا)

برای انتخاب متغیر خروجی اعداد سمت راست را نظیر به نظیر بر اعداد مثبت ستون لولا تقسیم می کنیم ، در نتیجه کوچکترین مقدار را انتخاب کرده و متغیر مربوط به آن را متغیر خروجی می نامیم، سطری را که متغیر خروجی درآن قرار دارد، سطر لولا می نامیم ، عدد محل تلاقی سطر و ستون لولا را عدد لولا می نامیم.

متغیر های اساسی که باید از پایه خارج بشود:

متغیرهای اساسی		مقادیر سمت راست	
S_1	⟵	$40 \div 2 = 20$	کوچکتر
S_2		$120 \div 3 = 40$	

طبق این قاعده برای مساله فوق S_1 بعنوان متغیر خروجی انتخاب می شود. بنابراین خواهیم داشت :

ورودی

متغیر های اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	1	- 40	-50	0	0	0
S_1	0	1	2	1	0	40
S_2	0	4	3	0	1	120

خروجی

سطر لولا

ستون لولا

عنصرلولا

لولا ، سطر لولا و ستون لولا همگی ابزارهای مناسب و کارآمدی در تهیه تابلوی بعدی سیمپلکس خواهند بود.حال همه چیز مهیای تهیه تابلوی دوم سیمپلکس و یک جواب « بهتر» است.

۳) به روز رسانی کردن مسئله « *Update*»

تهیه یک تابلوی جدید سیمپلکس

جدول شماره (۵) زیر بیانگر تابلوی سیمپلکس با جواب موجه اساسی جدید است . یعنی S_2 و X_2 می باشد. مقادیر مختلف ردیف ها براساس فرمول های مختلف سیمپلکس بدست میآیند . اولاً ، عناصر ردیف X_2 ، که « ردیف لولای جدید» نامیده می شود، با تقسیم نمودن هر یک از عناصر ردیف لولای قدیم (تابلوی اولیه) بر عنصر لولا بدست می آیند.

فرمول محاسبات به شرح زیر است:

$$\text{(سطر لولای جدید)} = \frac{\text{سطر لولای قدیم}}{\text{عدد لولا}}$$

جدول (۵)

متغیر های اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0						
X_2	*0*	1/2	1	1/2	0	20
S_2						

برای محاسبه سایر سطرها به جز سطر لولای جدید از رابطه زیر بدست می آید:

مقادیر = (ضریب مربوط در ستون لولا)– (مقادیر قدیم) ×مقادیر مربوط به لولای جدید

براساس فرمول فوق برای محاسبه ضرایب ردیف های باقیمانده هم به ضرایب سطر مربوطه در تابلوی قدیم نیاز داریم و هم به ضرایب بدست آمده در تابلوی جدید. برای نمونه به جدول شماره (۶) که جهت محاسبه ضرایب S_2 در تابلوی دوم بکار رفته است دقت نمایید.

جدول (۶) چگونگی محاسبه ضرایب S_2 در تابلوی دوم (جدید)

ستون	– مقادیر ردیف قدیم	× ضریب مربوط درستون لولا)	(مقادیر مربوط به ردیف لولای جدید	=	مقادیر ردیف جدید
Z	0 -	(3 ×	0)	=	0
X_1	4 -	(3 ×	1/2)	=	5/2
X_2	3-	(3 ×	1)	=	0
S_1	0 -	(3 ×	1/2)	=	-3/2
S_2	1-	(3 ×	0)	=	1
سمت راست	-120	(3 ×	20)	=	60

این مقادیر در تابلوی سیمپلکس در جدول (۸) وارد شده است . به همین طریق مقادیر ردیف Z_0 در تابلوی جدید سیمپلکس محاسبه شده است.

چگونگی محاسبه ضرایب جدید Z_0 به شرح زیر جدول (۷) آمده است:

جدول (۷) چگونگی محاسبه ضرایب Z_0 در تابلوی دوم (جدید)

ستون	– مقادیر ردیف قدیم	× ضریب مربوط درستون لولا)	(مقادیر مربوط به ردیف لولای جدید)	=	مقادیر ردیف جدید
Z	1-	(- 50×	0)	=	1
X_1	-(40)-	(- 50×	1/2)	=	-15
X_2	-(50)-	(- 50×	1)	=	0
S_1	0 -	(- 50×	1/2)	=	25
S_2	0 -	(- 50×	0)	=	0
سمت راست	120 -	(- 50×	20)	=	1000

بدین طریق تابلوی سیمپکلس بدست می آید . براساس تابلوی زیر متغیر های اساسی شامل (S_2 وX_2) است و متغیر های غیر اساسی شامل X_1 و S_1 می باشد. پس در این جواب موجه اساسی ، مقدار متغیر های تصمیم و کمکی به صورت زیر است:

$$S_1 = 0 \,,\; S_2 = 60 \,,\; x_1 = 0 \,,\; X_2 = 20$$

جدول (۸) تابلوی دوم سیمپلکس

متغیر های اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	1	- 15	0	25	0	1000
X_2	0	1/2	1	1/2	0	20
S_2	0	5/2	0	-3/2	1	60

نتیجه براساس جواب بدست آمده در این جدول به ازای تولید ۲۰ واحد از کالای نوع دوم ، منبع نیروی کار مصرف شده و ۶۰ واحد از مواد اولیه همچنان بلا استفاده می باشد . البته به ازای مصرف این مقدار از منابع سودی معادل ۱۰۰۰ واحد عاید خواهدشد.

۴) تابلوی بهینه سیمپلکس

مراحلی که برای بدست آوردن تابلوی دوم سیمپلکس گفته شد، برای بدست آوردن سومین تابلوی سیمپلکس براساس تابلوی دوم مجدداً تکرار می شود.

اولاً ستون لولا یا متغیر یا متغیر ورودی براساس منفی ترین مقدار ردیف Z_0 مشخص می شود. براساس این قاعده متغیر ورودی X_1 خواهد بود. چون دارای ضریب ۱۵- در ردیف Z_0 است و تنها متغیر منفی نیز می باشد.

ثانیاً متغیر خروجی یا سطر لولا را براساس این قاعده متغیر خروجی S_2 خواهد بود:

متغیرهای اساسی	مقادیر سمت راست	
x_2	$20 \div {}^{1}/_{2} = 40$	
S_2	$60 \div {}^{5}/_{2} = 24$	⟵ متغیر خروجی

ستون لولا، سطر لولاو عددلولا در جدول (۹) تعیین شده است.

متغیر های اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	1	- 15	0	25	0	1000
X_2	0	1/2	1	1/2	0	20
S_2	(0	5/2	0	-3/2	1	60)

ستون لولا عدد لولا سطر لولا

برای تشکیل تابلوی سوم سیمپلکس مجدداًبه فرمول های سیمپلکس برای ضرایب سطر جدید لولا و ضرایب سایر ردیف های تابلوی جدید برگردید. ضرایب سطر جدید لولا درتابلوی سوم با تقسیم نمودن کلیه ضرایب سطر S_2 در تابلوی دوم بر عدد لولا یعنی عدد $5/2$ بدست می آید . ضرایب جدید مربوط به تابلوی سوم در جدول (۱۰) بطور کامل آمده است. جهت روشن تر شدن نحوه محاسبات به جدول (۱۱و۱۲) مراجعه کنید.

جدول (۱۰) تابلوی سیمپلکس

متغیر های اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	1	0	0	16	6	1360
X_2	0	0	1	4/5	-1/5	8
X_1	0	1	0	-3/5	2/5	24

« شرط بهینگی » یک تابلوی سیمپلکس آن است که تمام مقادیر سطر صفر Z_0 « غیر منفی» باشند. یعنی اینکه افزایش در هیچ یک از متغیر های غیر اساسی ، منجر به افزایش سود نمی شود. طبق این قاعده ، تابلوی سوم سیمپلکس برای مسئله فوق از شرط بهینگی برخوردار است. پس مساله به گوشه بهینه رسیده است و جواب مساله در این گوشه عبارتست از :

$x_1 = 24$, $X_2 = 8$, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ $Z^* = 1360$

جدول (۱۱) چگونگی محاسبه ضرایب Z_0 در تابلوی سوم سیمپلکس

ستون	– مقادیر ردیف قدیم	× ضریب مربوط درستون لولا)	(مقادیر مربوط به ردیف لولای جدید	=	مقادیر ردیف جدید
Z	1-	(- 15 ×	0)	=	1
X_1	- (15)-	(- 15 ×	1)	=	0
X_2	(0)-	(- 15 ×	0)	=	0
S_1	(25)-	(- 15 ×	-3/5)	=	16
S_2	(0)-	(- 15 ×	2/5)	=	6
سمت راست	*(1000)* -	(- 15 ×	24)	=	1360

جدول (۱۲) چگونگی محاسبه ضرایب x_2 در تابلوی سوم سیمپلکس

ستون	– مقادیر ردیف قدیم	× ضریب مربوط درستون لولا)	(مقادیر مربوط به ردیف لولای جدید	=	مقادیر ردیف جدید
Z	0-	(1/2 ×	0)	=	0
X_1	1/2 -	(1/2 ×	1)	=	0
X_2	1 -	(1/2 ×	0)	=	1
S_1	1/2 -	(1/2 ×	−3/5)	=	$^4/_5$
S_2	0 -	(1/2 ×	2/5)	=	$^{-1}/_5$
سمت راست	20	(1/2 ×	24)	=	8

مسئله۱ - سیمپلکس زیر را حل کنید؟ (حداکثر سازی)

$Max\ Z= 3X_1 + 9X_2$

S.T:

$X_1+4X_2 \leq 8$

$X_1+2X_2 \leq 4$

$X_2, X_1 \geq 0$

مسئله۲- سیمپلکس زیر را حل کنید؟

$Max\ Z= 4X_1 + 3X_2 + 6X_3$

S.T:

$3X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 30$

$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 40$

X_1 و $X_2 \geq 0$

مسئله۳– سیمپلکس زیر را حل کنید؟

$Max\ Z= 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$

S.T:

$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 430$

$3X_1 + 2X_3 \leq 460$

$X_1 + 4X_2 \leq 420$

X_1 و $X_2, X_3 \geq 0$

مسئله۴– سیمپلکس زیر را حل کنید؟

$Max\ Z= 3X_1 + 5X_2$

S.T:

$X_1 \leq 4$

$2X_2 \leq 12$

$3\ X_1 + 2\ X_2 \leq 18$

X_1 و $X_2 \geq 0$

روش سیمپلکس برای حل مسائل حداقل سازی (Min سازی)

در بخش‌های قبلی فصل، روش سیمپلکس برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی از نوع «حداکثرسازی» توضیح داده شد. بطور کلی مراحل روش سیمپلکس قابل استفاده برای حل هر نوع مساله برنامه‌ریزی خطی می‌باشد. با این وجود در حل مسائل «حداقل سازی» باید اندک تغییراتی در فرآیند طبیعی سیمپلکس داد. در این بخش ضمن ارائه یک مثال از نوع **Min** روش سیمپلکس را برای حل این نوع مدل‌ها تشریح خواهیم کرد.

مثال : مدل زیر را در نظر بگیرید :

$$\text{Min } Z= 6x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.t :}$$
$$2x_1 + 4x_2 \geq 16$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 24$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

به یاد داریم که فرم استاندارد مدل **Min** به صورت زیر انجام می‌گرفت :

$$\text{Max } (- Z) = -6x_1 – 3x_2 + 0\ S_1 + 0S_2$$
$$\text{s.t :}$$
$$2x_1 + 4x_2 - S_1 = 16$$
$$4x_1 + 3x_2 - S_2 =24$$
$$x_1 , x_2 , S_1 , S_2 \geq 0$$

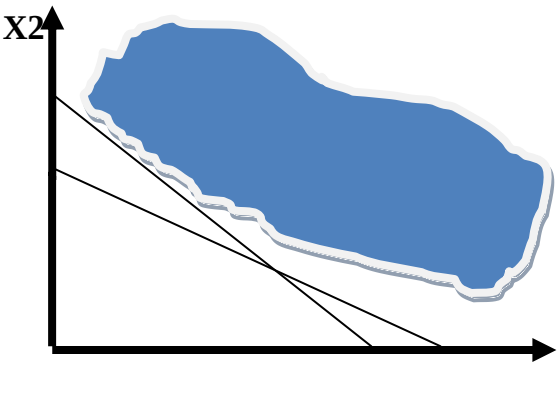
گفته شد که روش سیمپلکس همواره جواب اساسی اولیه خود را از مبداء مختصات آغاز می‌کند، جایی که $x_1 =$ **0** و $X_2 =$ **0** باشد. در بررسی این جواب برای مدل فوق داریم :

$$2x_1 + 4x_2 - S_1 = 16$$
$$2(0) + 4(0) – S_1 = 16$$
$$S_1 = -16$$

منفی شدن متغیر کمکی یک پدیدهٔ غیر منطقی و بی معنی است. ظاهراً در حل مدل **Min** ، متغیرهای کمکی در پیدا کردن جواب اولیه غیرکارآمد هستند. دلیل غیر کارآمد بودن متغیرهای مازاد (S_1 و S_2) در شکل زیر نشان

داده شده است. جواب در مبداء مختصات خارج از ناحیه موجه قرار گرفته است. به عبارت دیگر مبداء مختصات یک جواب نقض کنندهٔ محدودیت‌های مدل است.

شکل : نمایش هندسی مثال فوق



محدودیت اول $X_1 = 0$ $X_2 = 4$ $X_2 = 0$ $X_1 = 8$

محدودیت دوم $X_1 = 0$ $X_2 = 8$ $X_2 = 0$ $X_1 = 6$

به منظور رفع این مشکل و داشتن یک جواب در مبداء مختصات، ما ناچاریم «متغیر مصنوعی» به معادلهٔ مربوطه اضافه کنیم. متغیرهای مصنوعی را در این کتاب همواره با R نشان می دهیم. پس برای محدودیت اول داریم :

$$2x_1 + 4x_2 - S_1 + R_1 = 16$$

متغیر مصنوعی R، نه معنای متغیر کمبود می‌دهد و نه متغیر مازاد، بلکه باعث می‌شود «ناحیه موجه مساله آنقدر بزرگتر شود که مبداء مختصات به عنوان یک جواب موجه اساسی تلقی شود». و شرط غیر منفی بودن متغیرها در مسالهٔ برنامه ریزی خطی رعایت شود. به عبارت دیگر ما به «طور مصنوعی یک جواب مواجه اساسی» ایجاد می‌کنیم. حال به بررسی جواب ($X_1 = 0$ ، $X_2 = 0$ و $S_1 = 0$) در محدودیت اول می‌پردازیم

پس :

$$2x_1 + 4x_2 - S_1 + R_1 = 16$$
$$2(0) + 4(0) - 0 + R_1 = 16$$
$$R_1 = 16$$

برخلاف متغیرهای کمکی، متغیرهای مصنوعی، هیچ گونه معنای فیزیکی و واقعی ندارند. بلکه به طریق ساختگی کمک می‌کنند که روش سیمپلکس از مبدا مختصات حرکات انتقالی خود را آغاز کند. با توجه به غیر واقعی بودن این دسته از متغیرها، باید تلاش شود که در اولین فرصت آنها را از جواب مساله حذف کرد. چون بزرگ شدن منطقهٔ موجه، این احتمال را بوجود می آورد که جواب بهینه بر روی یکی از نقاط گوشه‌ای که در منطقه موجه ناشی از اضافه شدن R قرار دارد، واقع گردد. بدیهی است این جواب چون در ناحیهٔ موجه مساله اصلی قرار ندارد جوابی غیر موجه برای مساله خواهد بود. برای جلوگیری از قرار گرفتن جواب بهینه روی یکی از نقاط گوشه منطقه موجه ناشی از اضافه شدن متغیر مصنوعی، از تابع هدف استفاده کرده و با بستن جریمه ای معادل M به متغیر مصنوعی در تابع هدف (M عددی بسیار بزرگ است) این کار صورت می‌گیرد. جریمه با کم کردن مقدار MR از سمت راست تساوی تابع هدف Max و (و یا اضافه کردن MR به سمت راست تساوی تابع هدف

Min) بسته می شود. از آنجا که اساسی شدن متغیر مصنوعی در تابلوی بهینهٔ سیمپلکس برخلاف خواستهٔ تابع هدف مساله موجب کاهش (افزایش) Z به میزانی معادل M برابر مقدار متغیر اساسی مصنوعی می‌گردد. لذا جریمه تخصیص یافته از اساسی شدن R در تابلوی بهینه به شدت جلوگیری می کند. با صفر شدن مقدار R ناحیه موجه مسالهٔ گسترده شده به حالت اصلی خود برگشته (کوچک می‌شود) و جواب بهینه بدست آمده بر روی یکی از نقاط گوشه ای ناحیه موجه اصلی مساله قرار خواهد گرفت.

بر اساس مفاهیم فوق فرم استاندارد (گسترده شده) و قابل انتقال یک مساله Min با محدودیت‌های ≥ (مثال) به صورت زیر خواهد بود :

$$\text{Max } (-Z) = -6x_1 - 3x_2 - MR_1 - MR_2$$

$$\text{Max } (-Z)\ 6x_1 + 3x_2 + MR_1 + MR_2 = 0$$
$$2x_1 + 4x_2 - S_1 + R_1 = 16$$
$$4x_1 + 3x_2 - S_2 + R_2 = 24$$
$$x_1, x_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$$

تابلوی اولیه سیمپلکس برای مساله فوق به کمک R_1 و R_2 به جای S_1 و S_2 به عنوان جواب موجه اساسی (مبداء مختصات مدل) تشکیل می شود. پس داریم :

تابلوی مقدماتی سیمپلکس

متغیرهای اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	مقادیر سمت راست
Z_0	-۱	۶	۳	۰	۰	M	M	۰
R_1	۰	۲	۴	-۱	۰	۱	۰	۱۶
R_2	۰	۴	۳	۰	-۱	۰	۱	۲۴

با مراجعه به تابلوی سیمپلکس در مثالهای قبل در می‌یابیم که هر تابلوی سیمپلکس باید دارای دو ویژگی اساسی باشد :

اوّل : ضریب متغیرهای اساسی آن در ردیف Z_0 مساوی صفر باشد.

دوّم : ضرایب متغیرهای پایهٔ آن (اساسی آن) در محدودیتهای تشکیل ماتریس واحد (I) بدهد.

در جدول فوق ویژگی دوم برقرار است ولی ضریب متغیرهای اساسی (R_1 و R_2) در سطر صفر (Z_0) غیرصفر است. بنابراین این تابلو، تابلوی اوّل سیمپلکس مسالهٔ نیست بنابراین عملاً تابلوی «مقدماتی» نامیده شده است.

برای تبدیل تابلوی مقدماتی (جدول فوق) به تابلوی اول سیمپلکس باید با استفاده از «عملیات ردیفی» ضرایب R_1 و R_2 را در سطر صفر به عدد صفر تبدیل کرد. بدین منظور ردیف مربوط به R_1 در M- و ردیف مربوط به R_2 نیز در M- ضرب شده و مجموع آنها ضرایب ردیف Z_0 جمع می‌شود. بر این اساس تابلوی اول سیمپلکس در جدول فوق بدست می‌آید. همچنانکه واضح است. جدول فوق از ضرایب جدید ردیف Z_0 (حاصل عملیات جبری

فوق) و ضرایب R_1 و R_2 در جدول۱ تشکیل شده است .

جدول ۲. تابلوی اول سیمپلکس مساله

متغیرهای اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	مقادیر سمت راست
Z_0	-۱	۶-۶M	۳-۷M	M	M	۰	۰	-۴۰M
R_1	۰	۲	۴	-۱	۰	۱	۱	۱۶
R_2	۰	۴	۳	۰	-۱	۰	۰	۲۴

حال کلیهٔ شرایط برای اجرای روش سیمپلکس فراهم شده است، در این راستا از کلیهٔ مفاهیم و فرمول‌های محاسباتی سیمپلکس استفاده میشود. از آنجائیکه تمام ضرایب ردیف Z_0 در تابلوی چهارم غیر منفی هستند، پس تابلوی بهینه و نهایی است. جواب بهینه مساله عبارتند از :

(X_1=0 X_2= 8 S_1= 16 R_1 = 0 R_2= 0)

۲ ۱ ۳

	X_b	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	RHS
	Z_0	-۱	۶-۶M	۳-۷M	M	M	۰	۰	-۴۰M
۱	R_1	۰	۲	۴	-۱	۰	۱	۰	۱۶
	R_2	۰	۴	۳	۰	-۱	۰	۱	۲۴
	Z_0	-۱	$\frac{9}{2}-\frac{5}{2}M$	۰	$\frac{3}{4}-\frac{3}{4}M$	M	$-\frac{3}{4}+\frac{7}{4}M$	۰	-۱۲-۱۲M
	X_2	۰	$\frac{1}{2}$	۱	$-\frac{1}{4}$	۰	$\frac{1}{4}$	۰	۴
۲	R_2	۰	$\frac{5}{2}$	۰	$\frac{3}{4}$	-۱	$-\frac{3}{4}$	۱	۱۲
	Z_0	-۱	۰	۰	$-\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{3}{5}+M$	$-\frac{9}{5}+M$	$\frac{-168}{5}$
	X_2	۰	۰	۱	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
	X_1	۰	۱	۰	$\frac{3}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{24}{5}$
	Z_0	-۱	۲	۰	۰	۱	M	-۱+M	-۲۴
	X_2	۰	$\frac{4}{3}$	۱	۰	$-\frac{1}{3}$	۰	$\frac{1}{3}$	۸
	S_1	۰	$\frac{10}{3}$	۰	۱	$-\frac{4}{3}$	-۱	$\frac{4}{3}$	۱۶

در نتیجه Z^* = -24 شده است. تابع هدف مدل مساله فوق در اصل از نوع Min است . برای بدست آوردن

مقدار واقعی باید جواب بدست آمده را در ۱- ضرب کنیم یعنی :

Min Z = Max (-Z) = - (-24) = 24

عملیات روش سیمپلکس به روش حداقل سازی

X_1 سطر R_2 به ستون $\longrightarrow 4-3\times\frac{1}{2}=4-\frac{3}{2}=\frac{8-3}{2}=\frac{5}{2}$

S_1 سطر R_2 به ستون $\longrightarrow 0-3\times-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

S_2 سطر R_2 به ستون $\longrightarrow -1-3\times 0=-1$

R_1 سطر R_2 به ستون $\longrightarrow 0-3\times\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$

تابلوی دوم

سطر R_2

Rhs سطر R_2 به ستون $\longrightarrow 24-3\times 4=24-12=12$

X_1 سطر Z_0 به ستون $\longrightarrow$ 6-6M – $(3-7M)\times\frac{1}{2}=6-6M-(\frac{3}{2}+\frac{7}{2}M)$

$6-\frac{3}{2}=\frac{12-3}{2}=\frac{9}{2}$ $=-6M+\frac{7}{2}M=\frac{-12M+7M}{2}=\frac{-5}{2}M$

تابلوی دوم

سطر Z.

S_1 سطر Z_0 به ستون $\rightarrow M-(3-7M)\times\left(-\frac{1}{4}\right)=M-\left(\frac{3}{4}-\frac{7}{2}M\right)=M-\frac{7}{4}$ M = $\frac{4M-7M}{4}=\frac{-3M}{4}$

S_2 سطر Z_0 به ستون $\longrightarrow M-(3-7M)\times 0=M$

$+\frac{7}{4}M$ $\longrightarrow$

R_1 سطر Z_0 به ستون $\longrightarrow 0-(3-7M)\times\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$

Rhs سطر به ستون $\longrightarrow -40M-(3-7M)\times 4=-40M(-12+28M)=-12-12M$

S_1 سطر Z_0 به ستون $\longrightarrow \frac{3}{4}-\frac{3}{4}M-\left(\frac{9}{2}-\frac{5}{2}M\right)\times(\frac{3}{10})=$

$\frac{3}{4}-\frac{3}{4}M-\frac{27}{20}+\frac{15}{20}M$ $=\frac{3}{4}-\frac{27}{20}=\frac{15-27}{20}=\frac{-12}{20}=\frac{-3}{5}$

$-\frac{3}{4}M-\frac{15}{20}M=\frac{15M-15M}{20}=\frac{0}{20}=0$

تابلوی سوم

سطر Z.

S_2 سطر Z_0 به ستون $\longrightarrow M-\left(\frac{9}{2}-\frac{5}{2}M\right)\times\left(-\frac{2}{5}\right)=M+\frac{9}{5}$ - M = $\frac{9}{5}$

R_1 سطر Z_0 به ستون $\longrightarrow -\frac{3}{4}+\frac{7}{4}M-\left(\frac{9}{2}-\frac{5}{2}M\right)\times\left(-\frac{3}{10}\right)=$

$=-\frac{3}{4}+\frac{7}{4}M-\left(\frac{27}{20}-\frac{3}{4}M\right)$ $=-\frac{3}{4}+\frac{27}{20}=\frac{-15+27}{20}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$ $\frac{7}{4}M-\frac{27}{4}M=\frac{4}{4}M=+M$

R_2 سطر به ستون Z_0 سطر $\longrightarrow 0-\left(\frac{9}{2}-\frac{5}{2}M\right)\times\left(-\frac{3}{10}\right)=-\frac{9}{5}+M$

Rhs ستون به Z_0 سطر $\longrightarrow -12-12M-\left(\frac{9}{2}-\frac{5}{2}M\right)\times\frac{24}{5}=$ $-12-12M-\frac{108}{5}+12M=$

$-12-\frac{108}{5}=\frac{-60-108}{5}=-\frac{168}{5}$ $-12M+12M=0$

تابلوی سوم

سطر X_2

S_1 ستون به X_1 سطر $-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}\right)$ $-\frac{1}{4}=\frac{3}{20}$ $=\frac{-5-3}{20}=\frac{-8}{20}=\frac{-2}{5}$

S_2 ستون به X_2 سطر $\longrightarrow$ $0-\left(\frac{1}{2}\times\frac{-2}{5}\right)=+\frac{1}{5}$

R_1 ستون به X_2 سطر $\longrightarrow\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{10}\right)\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{20}=\frac{5+3}{20}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

R_2 ستون به X_2 سطر $\longrightarrow 0-\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=-\frac{1}{5}$

Rhs ستون به X_2 سطر $4-\left(\frac{1}{2}\times\frac{24}{5}\right)=4-\frac{12}{5}=\frac{20-12}{5}=\frac{8}{5}$

تابلوی چهارم

سطر Z.

X_1 ستون به Z_0 سطر $0-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(\frac{10}{3}\right)=+\frac{6}{3}=2$

X_2 ستون به Z_0 سطر $0-\left(-\frac{3}{5}\right)\times 0=0$

X_2 ستون به Z_0 سطر $\frac{9}{5}-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{9}{5}-\frac{4}{5}=\frac{5}{5}=1$

R_1 ستون به Z_0 سطر $\frac{3}{5}+M-\left(-\frac{3}{5}\right)\times(-1)=\frac{3}{5}+M-\frac{3}{5}=M$

R_2 ستون به Z_0 سطر $-\frac{9}{5}+M-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{9}{5}+M+\frac{4}{5}=-\frac{9}{5}+\frac{4}{5}=-\frac{5}{5}=-1+M$

RHS ستون به Z_0 سطر $-\frac{168}{5}-\left(-\frac{3}{5}\right)\times 16=\left(-\frac{168}{5}+\frac{48}{5}\right)=\frac{120}{5}=-24$

تابلوی چهارم

سطر X_2

X_1 ستون به X_2 سطر $0-\left(-\frac{2}{5}\right)\times\left(\frac{10}{3}\right)=+\frac{4}{3}$

X_2 ستون به X_2 سطر $1-\left(-\frac{2}{5}\right)\times 0=+1$

S_2 ستون به X_2 سطر $\frac{1}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{5}-\frac{8}{15}=\frac{3-8}{15}=-\frac{5}{15}=-\frac{1}{3}$

R_1 ستون به X_2 سطر $\frac{2}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)\times(-1)=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}=0$

R_2 ستون به X_2 سطر $\frac{1}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)\times\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{1}{5}+\frac{8}{15}=-\frac{3+8}{15}=-\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

RHS ستون به X_2 سطر $\frac{8}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)\times(16)=\frac{8}{5}+\frac{32}{5}=\frac{40}{5}=8$

فصل سوم

بخش دوم ...

سیمپلکس « روش M بزرگ یا روش متغیر مصنوعی»

سیمپلکس « روش M بزرگ یا روش متغیر مصنوعی»

در روش حل مسائل غیر استاندارد از دو روشM بزرگ و روش دوفازی (دومرحله ایی) استفاده می گردد. که در هر دوی آنها متغیر مصنوعی نقش اساسی را ایفاء می نمایند.

حال در ابتدا نقش متغیر مصنوعی را توضیح می دهیم و سپس روش حل M بزرگ و بعد از آن روش دو مرحله ایی را با مثال مورد بررسی قرار می دهیم.

متغیر مصنوعی

متغیر مصنوعی متغیر های غیر منفی هستند که با R نمایش داده می شود.

۱ . از سمت چپ هر محدودیت های بزرگتر مساوی $\geq$ یک متغیر کمکی کم و یک متغیر مصنوعی R اضافه شده است و به عنوان متغیر اساسی این محدودیت ها مورد استفاده قرار می گیرد.

۲ . به سمت چپ هر محدودیت مساوی = یک متغیر مصنوع R اضافه می کنیم.

مساله : مجموعه محدودیت های زیر را در نظر بگیرید :

$3X_1 + 2X_2 = 14$

$2X_1 - 4X_2 \geq 2$

$4X_1 + 3X_2 \leq 9$

X_1 و $X_2 \geq 0$

محدودیت های مساله بعد از تاثیر متغیرهای کمکی و مصنوعی به صورت زیر خواهد شد.

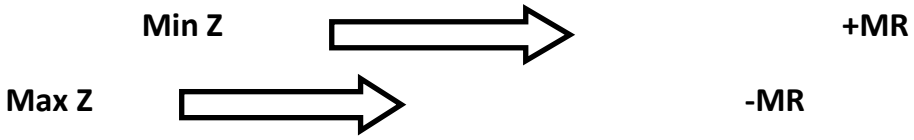
$3X_1 + 2X_2 + R_1 = 14$

$3X_1 + 2X_2 - S_2 + R_2 = 2$

$4X_1 + 3X_2 + S_3 = 9$

X_1 و $X_2, S_1, S_2, S_3, R_1, R_2 \geq 0$

به ازای هر R (متغیر مصنوعی) موجود در هر محدودیت ها از سمت راست تابع هدف در صورت تابع هدف Max بودن یک MR کم می کنیم ، و درصورتیکه تابع هدف Min باشد، یک MR بعنوان جریمه اضافه می کنیم. مثلاً:



۳- مسئله را مانند فرم استاندارد وارد جدول کرده ، و بعد از یکه نمودن بردارهای متغیر مصنوعی آنرا به روش سیمپلکس ساده حل می کنیم.

برای تبدیل تابع Min به Max و اینکه حداقل کردن Z به مفهوم حداکثر نمودن (Z-) می باشد. میتوان تابع هدف را در (۱-) ضرب کنیم . در جدول های سیمپلکس عدد منفی زیر ستون Z و در سطر صفر ، بیانگر تبدیل تابع هدف و سطر صفر ، بیانگر تبدیل تابع هدف (Min به Max) است. بعد از تبدیل تابع هدف به Max و انتقال متغیر های سمت راست تابع هدف به چپ ، جدول ابتدایی مسئله را تهیه می نمائیم . طبق مسئله به صورت زیر ادامه می دهیم:

مساله با ترکیبی از محدودیت ها

در بخش های قبلی صرفاً مسائلی مورد بحث روش سیمپلکس قرار گرفت که با نوع Max بودند. با محدودیت های کوچکتر مساوی (≤) و یا از نوع Min با محدودیت های بزرگتر مساوی (≥)در این بخش سعی میشود , نوع خاصی از مدل های خطی را با روش سیمپلکس حل کنیم ، که دارای آمیخته ایی از محدودیتهای ≥=≤ هستند. برای مثال به نمونه ای زیر توجه کنید:

مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$Max\ Z = 400X_1 + 200X_2$$

S.T:

$$X_1 + X_2 = 30$$

$$2X_1 + 8X_2 \geq 80$$

$$X_1 \leq 20$$

$$X_1 \text{ و } X_2 \geq 0$$

برای حل با استفاده از روش سیمپلکس ، اولین قدم آن است که نامعادلات را به معادله تبدیل کنیم ، اولین محدودیت مساوی (=) است. بنابراین خود یک معادله است که به هیچ نوع متغیر کمبود یا مازاد نیاز ندارد و نیاز به یک متغیر مصنوعی برای اجرای روش سیمپلکس دارد .پس با توجه به نوع تابع هدف از قاعده جریمه M

استفاده می کنیم و یعنی چنانچه تابه هدف از نوع Max باشد، جریمه MR– را به تابع هدف اضافه می کنیم و اگر از نوع Min باشد ،جریمه + MR را به تابع هدف اضافه خواهیم کرد.

$X_1 + X_2 + R_1 = 30$

محدودیت دوم مساله نیز از نوع بزرگتر مساوی (≥) است.پس با استفاده از متغیر کمکی آنرا به معادله تبدیل می کنیم و سپس برای اجرای روش سیمپلکس یک متغیر مصنوعی R به آن اضافه خواهیم کرد پس:

$2X_1 + 8X_2 \geq 80$

$2X_1 + 8X_2 - S_2 + R_2 = 80$

محدودیت سوم مساله نیز از نوع کوچکتر مساوی (≤)است که با استفاده از متغیر کمکی S_3 به فرم استاندارد تبدیل می شود.یعنی :

$X_1 + S_3 = 20$

حال مدل قابل استفاده برای اجرای روش سیمپلکس به صورت زیر بازنویسی می شود.

$Maz\ Z = 400\ X_1 + 200\ X_2$

S.T

$X_1 + X_2 = 30$

$2X_1 + 8X_2 \geq 80$

$X_1 \leq 20$

$X_1, X_2 \geq 0$

$Maz\ Z = 400\ X_1 + 200\ X_2 - MR_1 - MR_2$

$Maz\ Z - 400\ X_1 - 200\ X_2 + MR_1 + MR_2 = 0$

S.T

$X_1 + X_2 + R_1 = 30$

$X_1 + 8X_2 - S_1 + R_2 = 80$

$X_1 + S_3 = 20$

با تبدیل تابع هدف به فرم معادله ای با مقدارسمت راست صفر می توان تابلوی مقدماتی سیمپلکس را تهیه کنیم و مسئله رابر اساس اطلاعات قبلی حل می نماییم.

۲ ۱ ۳

Xb	Z	X_1	X_2	R_1	S_2	R_2	S_3	RHS
Z_0	۱	−۴۰۰	−۲۰۰	M	۰	M	۰	۰
R_1	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۳۰
R_2	۰	۲	۸	۰	−۱	۱	۰	۸۰
S_3	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۲۰
Z_0	۱	−۴۰۰−۳M	−۲۰۰−۹M	۰	M	۰	۰	−۱۱۰M
R_1	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۳۰
R_2	۰	۲	۸	۰	−۱	۱	۰	۸۰
S_3	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۲۰
Z_0	−۱	$-۳۵۰-\frac{3}{4}M$	۰	۰	$-۲۵-\frac{1}{8}M$	$۲۵+\frac{9}{8}M$	۰	۲۰۰۰−۲۰M
R_1	۰	۳/۴	۰	۱	۱/۸	−۱/۸	۰	۲۰
X_2	۰	۱/۴	۱	۰	−۱/۸	۱/۸	۰	۱۰
S_3	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۲۰
Z_0	۱	۰	۰	۰	$-۲۵-\frac{1}{8}M$	$۲۵+\frac{9}{8}M$	$۳۵۰+\frac{3}{4}M$	۹۰۰۰−۵M
R_1	۰	۰	۰	۱	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	۵
X_2	۰	۰	۱	۰	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	۵
X_1	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۲۰
Z_0	۱	۰	۰	۲۰۰۰+M	۰	M	۲۰۰	۱۰۰۰۰
S_2	۰	۰	۰	۸	۱	−۱	−۶	۴۰
X_2	۰	۰	۱	۰	۰	۰	−۱	۱۰
X_1	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۲۰

-M

۱

۲

۳

$Z^* = 10000$ $X_1 = 20$ $X_2 = 10$ $S_2 = 40$

$Maz\ Z = 400\ X_1 + 200\ X_2$

$4000(20) + 200\ (10) = 10000$

مسئله سیمپلکس زیر را با استفاده از روش M بزرگ حل کنید؟

$Max\ Z = 2X_1 + 3X_2$

S.T:

$X_1 + 2X_2 \leq 4$

$X_1 + X_2 = 3$

X_1 و $X_2 \geq 0$

$Max\ Z = 5X_1 + 2X_2$

S.T:

$X_1 + X_2 \leq 10$

$X_1 = 5$

X_1 و $X_2 \geq 0$

$Maxz = 3X_1 + 2X_2$

S.T:

$2X_1 + X_2 \leq 4$

$X_1 + 2X_2 \geq 6$

X_1 و $X_2 \geq 0$

فصل سوم

بخش سوم ...

روش دوفازی یا دو مرحله ایی

روش دوفازی یا دو مرحله ایی

روش دو مرحله ایی یا دوفازی دقیقاً همانند روش M بزرگ است . با این تفاوت که در روش M با جریمه بستن به متغیر های مصنوعی در تابع هدف سعی می شود در یک گوشه غیر موجه توقف نکنیم ولی در روش دوفازی با حداقل کردن متغیر های مصنوعی آنها را به صفر شدن (غیر اساسی شدن) سوق می دهیم.

همیشه تابع هدف فاز اول برابر است با مجموع متغیر های مصنوعی اضافه شده به محدودیت ها.

$\text{Min } R_0 = \sum Ri$

❖ محدودیت ها را استاندارد می کنیم و به ازای هر متغیر منفی کمکی (S ها) یک متغیر مصنوعی اضافه می کنیم.

❖ به محدودیت ها یا شرط هایی که در مساله برنامه ریزی خطی علامت تساوی دارند نیز یک متغیر مصنوعی اضافه می کنیم (در روش M بزرگ نیز در این حالت متغیر مصنوعی اضافه می کنیم).

❖ در روش دوفازی با اضافه کردن متغیر مصنوعی به محدودیت های مساوی و بزرگتر($\geq$) ، فضای موجه اصلی مساله به گونه ایی گسترش پیدا می کند که مبداء مختصات مدل به صورت مصنوعی جزو ناحیه موجه تلقی می شود،تا بدین وسیله بتوان مراحل سیمپلکس را برای حل مدل شروع کرد.

❖ بلافاصله تلاش می شود متغیر های مصنوعی از پایه خارج شوند با خروج متغیر های مصنوعی و غیر مصنوعی و غیر اساسی شدن آنها کم کم به ناحیه موجه اصلی مساله نزدیک می شویم .

❖ همانند روش M در جدول مقدماتی سطر تابع هدف باید به گونه ایی تعریف شود که شرایط لازم برای متغیر های اساسی فراهم شود.

❖ فرایند مرحله یا فاز اول را تا زمانیکه تمام ضرایب سطر Z صفر یا منفی بشوند و همچنین مقدار Z برابر با صفر شود. ادامه میدهیم.

❖ در جدول آخر سیمپلکس فاز اول باید دقت کنیم که متغیر های مصنوعی از ستون متغیر های اساسی خارج شده باشند یا اگر هستند مقدارشان در RHS (مقادیر سمت راست) برابر با صفر شوند.در غیر اینصورت امکان حل مساله در فاز دوم وجود ندارد، و به اصطلاح می گوئیم مساله فاقد جواب اساسی شدنی است.

❖ قبل از شروع به حل فاز دو ابتدا باید تابع هدف اصلی مساله را بنویسیم .

❖ در جدول فاز دو ، همانطور که گفته شد تابع هدف مساله تابع مد نظر است، و همچنین متغیر های مصنوعی که از ستون اول (متغیر های اساسی)حذف می کنیم، زیرا با اتمام مرحله اول متغیر های مصنوعی غیر اساسی شده اند و دیگر نیازی به آنها نداریم.

❖ اولین جدول در فاز دو مانند اولین جدول در فاز یک نیز اولین جدول در روش M ، جدول مقدماتی است زیرا متغیرهای اساسی آنها دارای ضریب غیر صفر در سطر تابع هدف هستند. پس ابتدا باید جدول مقدماتی فاز دو را اصلاح نمود و سپس به اجرای مراحل معمول سیمپلکس پرداخت.

حال با توجه توضیحات فوق به حل یک مساله خواهیم پرداخت:

ـــــ مساله برنامه ریزی خطی زیر را به روش دوفازی (دومرحله ای) حل کنید؟

$$\text{Min } Z = X_1 + X_2 + X_3$$

S.T:

$$2X_1 - X_2 + X_3 = 2$$

$$4X_1 + 2X_2 + X_3 = 6$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

حل : تابع فاز اول .

$$\text{Min } R_0 = R_1 + R_2$$

S.T:

$$2X_1 - X_2 + X_3 + R_1 = 2$$

$$4X_1 + 2X_2 + X_3 + R_2 = 6$$

$$X_1, X_2, X_3, R_1, R_2 \geq 0$$

پس ابتدا باید جدول مقدماتی فاز دو را اصلاح نموده و سپس به اجرای مراحل معمول سیمپلکس پرداخت.

جدول مقدماتی فاز اول :

X_b	X_1	X_2	X_3	R_1	R_2	RHS
R_1	۲	-۱	۱	۱	۰	۲
R_2	۴	۱	۱	۰	۱	۶
R	۰	۰	۰	-۱	-۱	۰
R_0	۶	۰	۲	۰	۰	۸

جدول اولیه سیمپلکس در فاز اول :

X_b	X_1	X_2	X_3	R_1	R_2	RHS
R_1	۲	-۱	۱	۱	۰	۲
R_2	۴	۱	۱	۰	۱	۶
R_0	۶	۰	۲	۰	۰	۸

تابع هدف مینیمم سازی است، بنابراین در سطر تابع هدف مثبت ترین به عنوان متغیر ورودی در نظر گرفته می شود و برای متغیر خروجی تست مینیمم نسبت را انجام میدهیم.

جدول دوم سیمپلکس در فاز اول :

۱

X_b	X_1	X_2	X_3	R_1	R_2	RHS
X_1	۱	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۱
R_2	۰	۳	-۱	-۲	۱	۲
R_0	۰	۳	-۱	-۳	۰	۲

۱

جدول سوم سیمپلکس در فاز اول :

X_b	X_1	X_2	X_3	R_1	R_2	RHS
X_1	۱	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{3}$
X_2	۰	۱	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
R_0	۰	۰	۰	-۱	-۱	۰

همانطور که ملاحظه می کنید در جدول سوم فاز اول در سطر Z تمام اعداد صفر و منفی هستند و مقدار تابع هدف (R_0) صفر شده است و نیز متغیر های مصنوعی از پایه خارج شده اند بنابراین می توانیم وارد فاز دوم شویم .

تابع هدف در فاز دوم تابه هدف اصلی مساله است:

$$\text{Min } Z = X_1 + X_2 + X_3 \longrightarrow \text{Min } Z - X_1 - X_2 - X_3 = 0$$

X_b	X_1	X_2	X_3	RHS
X_1	۱	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
X_2	۰	۱	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Z	-۱	-۱	-۱	۰
Z_0	۰	۰	-۱	۲

جدول مقدماتی را اصلاح نموده و مقدار Z_0 را با توجه به $Min\ Z = X_1 + X_2 + X_3$ بدست آورده و مشاهده نمودیم که عدد مثبتی در سطر تابع هدف موجود نیست بنابراین مقدار Z_0 مقدار بهینه است.

$Z^* = 2$ $\qquad X^*_1 = \frac{4}{3}$ $\qquad X^*_2 = \frac{2}{3}$

حالت های خاص در جداول سیمپلکس:

بهینه چندگانه :

الف) اعداد سمت راست در محدودیت ها هیچ وقت منفی نمی شوند.

ب) در جداول سیمپلکس هیچ گاه مقدار z بدتر نمی شود یا ثابت می ماند یا بهتر می شود.

ج) متغیرهای اساسی در تمامی جداول باید در سطر خود (عددی که زیر متون متغیر x_i و مقابل سطر x_i تراز دارد)ضریب یک ودر بقیه سطرها ضریب صفر داشته باشد. در جداول ابتدایی روش M بزرگ و جداول اول مرحله اول و دوم روش دومرحله ای باید عملیات یکه کردن صورت پذیرد.

د) هرگاه با محدودیتی به صورت بزرگتر و مساوی مواجه شدید از سمت چپ آن یک متغیر کمکی S کم و یک متغیر مصنوعی R اضافه نمایید تا نامعادله به معادله تبدیل شود. در این وضعیت متغیر مصنوعی اضافه شده در جدول سیمپلکس، متغیر اساسی این محدودیت را تشکیل می دهد.

و) هرگاه با محدودیت تساوی مواجه شدید فقط یک متغیر مصنوعی R به سمت چپ نامعادله اضافه کرده در این حالت متغیر مصنوعی اضافه شده در جدول سیمپلکس متغیر اساسی این محدودیت را تشکیل می دهد.

ه) در محدودیت های کوچکتر و مساوی، نیازی به استفاده از متغیر مصنوعی R نمی باشد و فقط یک متغیر کمکی S به سمت چپ نامعادله اضافه و آنرا به تساوی تبدیل کنید در این وضعیت متغیر کمکی اضافه شده متغیراساسی این محدودیت در جدول سیمپلکس می باشد.

ن) به ازای تعداد محدودیت ها متغیر اساسی شروع مسئله داریم.

مثال حالت های خاص در جداول سیمپلکس:

جواب چند گانه :

$\max(z) = 10x_1 + 20x_2$

S.t:

$2x_1 + 4x_2 \leq 12$

$2x_1 + 2x_2 \leq 8$

$x_1, x_2 \geq 0$

تابلوی نهائی:

Xb	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs / B
Z	0	0	5	0	60
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	3
s_2	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	0

هرگاه ضریب یک متغیر غیر اساسی در سطر Z جدول نهایی صفر باشد نشانه چندگانه بودن جواب بهینه است(چون $x_1 = 0$است و در سطر Z، x_1 صفر است پس در جدول سیمپلکس بالا دارای جواب چند گانه هستیم).

جواب تبهگن:

وجود عدد صفر در سمت راست به جزء سطر تابع هدف نشان دهنده جواب تبهگن است.

تابلوی نهایی:

xb	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs / B
Z	0	0	5	0	60
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	3
s_2	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	2

هرگاه جواب یک متغیر اساسی صفر باشد، دارای حالت خاص تبهگن هستیم. اگر تابلو نهایی باشد تبهگن ها، تبهگن دائم است و در تابلوهای ناقص تبهگن ها، تبگهن موقتی است.

فاقد منطقه موجه:

هرگاه در جدول سیمپلکس، یک یا چند متغیر مصنوعی با مقدار غیر صفر در جدول بهینه مسئله وجود داشته باشد، مسئله دارای حالت خاص، فاقد منطقه موجه است.

$\max(z) = 4x_1 + 3x_2$

S.t:

$x_1 + x_2 \leq 3$

$2x_1 - x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

تابلوی نهائی:

Xb	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R_3	rhs / B
Z	0	0	$\frac{m+10}{3}$	$\frac{m+1}{3}$	0	0	-2m-11
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	1
x_2	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	2
R_3	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	1	2

منطقه موجه نامحدود { جواب بهینه محدود / جواب بهینه نا محدود

جواب بهینه نامحدود:

$\max(z) = 6x_1 - 2x_2$

S.t : $2x_1 - x_2 \leq 2$

$x_1 \leq 4$

$X_1, X_2 \geq 0$

تابلوی نهایی:

Xb	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs / B
Z	-6	+2	0	0	0
s_1	2	-1	1	0	2
s_2	1	0	0	1	4
Z	0	0	2	2	12
x_1	1	0	0	1	4
x_2	0	1	-1	2	6

تابلوی مقدماتی

تابلوی نهایی

وجود ستون منفی یا صفر برای یک متغیر غیراساسی در تابلوی مقدماتی نشانه نامحدود بودن ناحیه موجه است. هرگاه در جدول سیمپلکس عدد منفی در سطر Z وجود داشته باشد ولی امکان متغیر خروجی به دلیل منفی یا صفر بودن ستون اول وجود نداشته باشد مسئله دارای حالت خاص منطقه موجه نامحدود، جواب بهینه نامحدود است. و هرگاه در جدول سیمپلکس عدد منفی در سطر Z نداشتیم ولی اعداد صفر و منفی در ستون ها باشد(ستون منفی) مسئله دارای حالت خاص منطقه موجه نامحدود، جواب بهینه محدود است.

فصل چهارم...

تصمیم گیری در شرایط اطمینان

" تصمیم گیری در شرایط اطمینان"

کلیات

تصمیم گیری در شرایط اطمینان شامل تحلیل هزینه – منفعت (در حالت مشخص) ، تعریف نقطه سربه سر ، پیش بینی منفعت حاصل از تولید یک کالا ، مقایسه دو یا چند پروژه ، تحلیل نقطه سر به سر، محاسبه نقطه سربه سر براساس چند محصول از جمله مباحث این فصل می باشد .

مقدمه

تحلیل هزینه – منفعت ، صرف نظر از محدودیت های آن , دارای کاربرد وسیعی در بررسی راه حل های مختلف در تصمیم گیری است.بطوریکه به کمک این تکنیک می توان اثر تغییر هزینه های ثابت و متغیر را برسود تعیین نمود.شرکت هایی که دارای ماشین آلات و تاسیسات مختلف ، محصولات متنوع و مناطق فروش چندگانه می باشند، می توانند به کمک این تکنیک، آثار تغییر در مقادیر ، قیمت ها و کوشش های فروش را مورد تحلیل قرار دهند. این روش تحلیل می تواند برمبنای اطلاعات تاریخی، عملیات یا فروش های گذشته و یا هزینه های آتی انجام شود. ***« تحلیل هزینه ـ منفعت » یک مدل ریاضی و مشخص بوده که می توان توسط دو مدل پیش بینی منفعت حاصل از تولید یک کالا و تحلیل نقطه سربه سر مورد بحث قرار داد.***

« تعریف نقطه سربه سر »

نقطه سربه سر در اقتصاد و خصوصاً در محاسبه ی هزینه ، به نقطه ای گفته می شود که هزینه های کلی و درآمد کلی با هم برابر باشند .(TC=TR) و ازآن نقطه به بعد ، می توان به سود دهی رسید. تا قبل از رسیدن به نقطه سربه سر، سود وزیانی حاصل نشده است و فقط هزینه هایی که برای تجارت مورد نظر انجام گرفته اند،جبران می شوند و سرمایه ی اولیه بر می گردد. به طور خلاصه ، تمامی هزینه های انجام شده برگشت داده می شوند ولی هنوز سود برابر با صفر است. « نقطه سر به سر» یکی از رایج‌ترین مفاهیم در تحلیل مالی است و تنها در اقتصاد کاربرد ندارد، بلکه می‌تواند توسط کارآفرینان، حسابداران، برنامه‌ریزان مالی، مدیران و حتی بازاریابان

مورد استفاده قرار بگیرد. نقطه سر به سر در تمامی قسمت‌های تجارت مفید است، زیرا به کارمندان اجازه می‌دهد به سمت اهداف شرکت حرکت کنند.

نقطه سر به سر، یک ارزش کُلی نیست و برای هر تجارتی متفاوت خواهد بود. بعضی از فعالیت‌های تجاری ممکن است نقطه سر به سر بالاتر یا پایین‌تری داشته باشند، با این حال، نکته‌ی مهم این است که هر واحد تجاری باید نقطه سر به سر را برای خود محاسبه کند، زیرا این کار به آنها نشان می‌دهد تعداد واحدهایی که باید بفروشند تا بتوانند هزینه‌های ثابت و متغیر صورت گرفته را جبران کنند چقدر است.

چگونه سرمایه‌گذاری کنیم؟

به عنوان مثال، کسب‌وکاری که در حوزه فروش میز فعالیت می‌کند، باید سالانه ۲۰۰ میز به فروش برساند تا بتواند به نقطه سر به سر برسد. در حال حاضر، این شرکت کمتر از ۲۰۰ میز می‌فروشد و در نتیجه در حال زیان دیدن است. برای اینکه این شرکت بتواند هزینه‌های ثابت و متغیرش را جبران کند باید بیشتر از ۲۰۰ میز در سال به فروش برساند.

اگر برآورد شرکت این است که نمی‌تواند تعداد میزی که برای رسیدن به سوددهی مورد نیاز است را به فروش برساند، باید موارد زیر را انجام دهد:

« کاهش هزینه‌های ثابت » : **این کار می‌تواند به روش‌های مختلفی صورت بگیرد، به عنوان مثال پرداخت اجاره‌ی کمتر، یا مدیریت صحیح صورت‌حساب‌ها و قبوض یا کاهش دیگر هزینه‌های مرتبط با فعالیت تجاری.**

« کاهش هزینه‌های متغیر» **: به عنوان مثال خرید میز از یک تولیدی جدید با قیمت پایین‌تر. افزایش کیفیت میزها. هر کدام از این گزینه‌ها این قابلیت را دارند که نقطه سر به سر را کاهش دهند. این یعنی، واحد تجاری می‌تواند حتی با فروش میزهای کمتر هم هزینه‌های ثابت را کاهش دهد .**

هدف اصلی از تحلیل نقطه سر به سر

« هدف اصلی از تحلیل نقطه سر به سر» ، تعیین حداقل خروجیِ ممکن برای رسیدن به سود دهی است. همچنین این کار بر بازاریابی هم تأثیر می‌گذارد. هر شرکتی باید بتواند بهترین میزان خروجی (ایده‌آل خود) را محاسبه کند تا بتواند میزان فروش و درآمدی که برای رسیدن و عبور کردن از نقطه سر به سر نیاز دارد را برای اطمینان از بقای کسب‌وکار خود به دست آورد. اگر شرکتی نتواند به این سطح برسد، معمولا نمی‌تواند به کارش ادامه دهد.

نقطه سر به سر، مورد خاصی در فروش درآمد هدف، زمانی است که درآمد هدف صفر است. این نکته برای تحلیل‌های مالی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است زیرا، هر فروشی که بعد از نقطه سر به سر اتفاق می‌افتد منجر به سوددهی می‌شود.

تحلیل نقطه سر به سر، همچنین می‌تواند اطلاعات مفیدی در اختیار بخش بازاریابی قرار دهد، زیرا اهداف مالی را برای بازاریابان جهت تلاش در افزایش فروش فراهم می‌کند.

تحلیل نقطه سر به سر نه تنها از نظر مالی مفید است، بلکه می‌تواند فرصتی برای بخش‌های دیگر فعالیت تجاری فراهم کند تا متوجه شوند در کدام قسمت‌ها باید هزینه‌ها را کاهش دهند و در عین حال بتوانند بهترین نتیجه را از منابع موجودشان به دست آوردند. این کار می‌تواند در بلند مدت کاری کند که بازدهی تجاری افزایش پیدا کرده و سوددهی بیشتر شود. در بسیاری از موارد، برای شروع یک کسب‌وکار، تحلیل نقطه سر به سر به کارآفرینان اطلاع می‌دهد که کدام کسب‌وکار و در چه نقاطی مناسب رشد و ترقی است.

پیش بینی منفعت حاصل از تولید یک کالا:

به منظور گسترش یک مدل در این زمینه ، فرض می کنیم که : با فرض روابط خطی بین متغیرها، خواهیم داشت:

F	هزینه ثابت تولید یک کالا	Fixed Cost
V	هزینه متغیر تولید یک واحد کالا	Variable Cost
Q	سطح تولید – حجم فروش (واحدکالا)	Quantity
P	قیمت فروش برای هر واحد کالا	Price
N	منفعت حاصل از فروش	Benefit from sales
Tc	مجموع هزینه تولید	Total Production cost
TR	مجموع درآمد حاصل از فروش	Total proceeds
BEP	نقطه سربه سر	Break Even Point

مجموع هزینه تولید $TC = F + VQ$

منفعت حاصل از فروش $N = TR - TC$

$N = PQ - (F + VQ) \Longrightarrow N = -F + (P - V)Q$

بنابراین خواهیم داشت :

اگر $M = P - V$ ، باشد داریم :

منفعت حاصل از فروش $N = -F + MQ$ **رابطه (۱–۴)**

این مدل به منظور پیش بینی عملی بودن یک یا چند پروژه پیشنهادی مورد استفاده قرار می گیرد.

مثال: داده های زیر را که برای فروش یک کالا ، طی یک دوره معین، پیش بینی شده است در نظر بگیریم:

V = ./75 P هزینه متغیر تولید 75 درصد قیمت فروش

F = 5 (میلیون تومان) = هزینه ثابت تولید

TR = PQ = 16 (میلیون تومان) مجموع درآمد حاصل از فروش

به منظور مطالعه عملی بودن این پروژه ، خواهیم داشت:

M = P – V = P - ./75 P = ./25 قیمت فروش حاشیه فروش

بنابراین داریم :

MQ = ./25 (PQ) = ./25 (16) = 4 (میلیون تومان)

بدین ترتیب خواهیم داشت :

N = - F + MQ = - 5 + 4 = - 1 منفعت قابل پیش بینی

بدان معنی که پروژه پیشنهادی عملی نبوده و منجر به یک میلیون تومان ضرر خواهد شد، ولی درصورتی که درآمد حاصل از فروش به ۲۴ میلیون افزایش یابد، پروژه عملی خواهد بود ، ودر صورتی که درآمد حاصل از فروش به ۲۰ میلیون افزایش یابد پروژه در نقطه سر به سر قرار می گیرد. بدین ترتیب برای مدل

N = - F + (P – V) Q می توان حساسیت N را نسبت به تغییر هریک از متغیر های آن مورد بررسی قرار داد.

مقایسه دو یا چند پروژه :

با استفاده از مدل « پیش بینی منفعت » می توان دو یا چند پروژه پیشنهادی را از نقطه نظر عملی بودن با یکدیگر مقایسه و مورد بررسی قرارداد.

مثال : فرض کنیم دو طرح به قرار زیر به منظور تولید یک کالا پیشنهاد شده باشد:

طرح شماره (۱)

هزینه توسعه طی دوره معین = $F_1 = 50000$ (تومان)

هزینه متغیر = $V_1 = 150$ (تومان)

قیمت فروش = $P_1 = 250$ (تومان)

طرح شماره (۲)

هزینه توسعه طی دوره معین = $F_2 = 80000$ (تومان)

هزینه متغیر = $V_2 = 100$ (تومان)

قیمت فروش = $P_2 = 250$ (تومان)

به منظور مقایسه دو پروژه مزبور با یکدیگر و انتخاب مناسب ترین آنها ، ابتدا معادلات موجود از « پیش بینی منفعت» را برای هریک تشکیل می دهیم، خواهیم داشت:

$$N_1 = -F_1 + (P - V_1)Q = -50000 + (250 - 150)Q = 100Q - 50000$$

$$N_2 = -F_2 + (P - V_2)Q = -80000 + (250 - 100)Q = 150Q - 80000$$

حال با مساوی هم قرار دادن منفعت حاصل از این دو طرح خواهیم داشت:

$$N_1 = N_2 \quad \Longrightarrow \quad N_2 - N_1 = 0$$

$$150Q - 80000 - 100Q + 50000 = 0$$

$$50Q - 30000 = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q_b = 600$$

ملاحظه می شود که حجم تولید در نقطه سر به سر برابر با ۶۰۰ واحد کالا است. این بدان معنی است که قبول هریک از طرح های فوق در سطح تولید ۶۰۰ واحد بی تفاوت است.

بنابراین قبول طرح شماره (۲) در صورت تولید بیشتر از ۶۰۰ واحد بر قبول طرح شماره (۱) در صورت تولید کمتر از ۶۰۰ واحد مناسب تر خواهد بود.

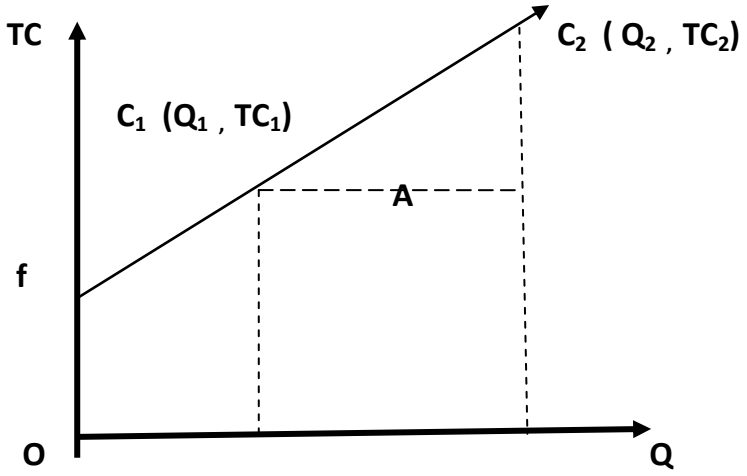
تذکر : برای برخی از مسائل تولیدی ممکن است F , V هر دو مجهول باشند ، اما حسابدار قسمت می تواند مجموع هزینه تولید را به ازای دو سطح مختلف از تولید پیش بینی نماید. به منظور ارزیابی این گونه مسائل خواهیم داشت :

$TC = F + VQ$ مجموع هزینه تولید

می دانیم که رابطه هندسی تابع هزینه با مشتق آن را می توان به صورت نمودار زیر نمایش داد. ضریب زاویه خط TC برابر با V است و از روی شکل نیز خواهیم داشت:

$$\text{ضریب زاویه خط} = v = \frac{TC2 - TC1}{Q2 - Q1} \qquad \text{رابطه (۱-۴)}$$

نمودار (۱-۴) رابطه هندسی تابع هزینه ومشتق آن



مثال : چنانچه برای یک کالای تولیدی داشته باشیم :

TC_1 (تومان) 100000 = هزینه تولید به ازای تولید ۱۰۰۰ واحد Q_1

TC_2 (تومان) 110000 = هزینه تولید به ازای تولید ۱۵۰۰ واحد Q_2

بنابراین خواهیم داشت : $= \frac{TC2-TC1}{Q2-Q1}$

$$V = \frac{110000-100000}{1500-1000} = 20$$

بدان معنی که هزینه متغیر برای تولید هر واحد از کالای پیشنهادی در فوق برابر با ۲۰ تومان خواهد بود و بنابراین برای هزینه ثابت آن داریم :

$F + 20\,(1000) = 100000 \Longrightarrow$ هزینه ثابت (تومان) $F = 80000$

تحلیل نقطه سربه سر :

« نقطه سربه سر» برابر با سطحی از تولید یک کالا خواهد بود که به ازای آن ، مجموع درآمد حاصل از فروش برابر با مجموع هزینه حاصل از تولید آن باشد، یعنی $TR = TC$ بنابراین خواهیم داشت :

$PQ = F + VQ \Longrightarrow Q\,(P - V) = F$

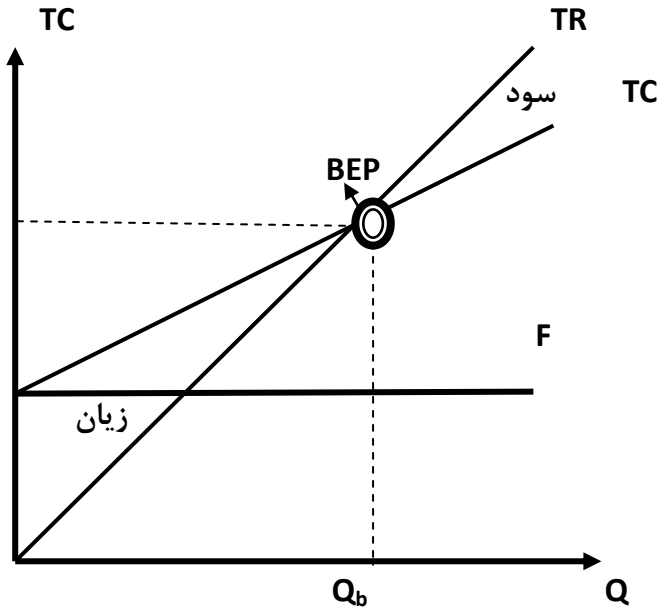
رابطه (۱-۴) $Q_b = \frac{F}{p-v} = \frac{F}{M}$	حجم تولید در نقطه سر به سر

به همین ترتیب برای محاسبه مبلغ فروش در نقطه سربه سر نیز خواهیم داشت:

رابطه (۱-۴)

$$Sb = S_b = \frac{F}{1-\frac{V}{P}}$$ در فروش مبلغ در نقطه سر به سر

نمودار(۲-۴) نمایش هندسی نقطه سربه سر



فرض های مورد نظر در تحلیل نقطه سر به سر

۱- هزینه ثابت با حجم تولید تغییر نمی کند.
۲- درآمد فروش هر محصول ثابت است.
۲- هر محصول تولید شده ، به فروش می رسد.
۴- هزینه متغیر برای هر واحد ثابت است.

مثال : اگر مفروضات زیر طی یک دوره معین ، برای تولید یک کالا پیش بینی شده باشند برای تعیین نقطه سر به سر خواهیم داشت:

هزینه ثابت ۲۲۵۰۰ ، هزینه متغیر ۳۰ و قیمت فروش ۱۸۰ تومان .

$$Q_b = \frac{F}{P-V} = \frac{22500}{(180-30)} = 150 \text{ (واحد کالا)}$$

$$S_b = \frac{22500}{1-\frac{30}{180}} = \frac{22500}{./83} = 27108 \approx 27000 \text{ (تومان)}$$

با توجه به تحلیل نقطه سر به سر می توان برای رسیدن به تحلیل هزینه – منفعت از رابطه (۱- ۵) استفاده نمود.

روشن است که منفعت N را می توان به ازای تولید یک سطح مشخص Q طوری که $Q > Q_b$ باشد، از رابطه زیر بدست آورد:

$N = (Q - Q_b) M$	رابطه (۲ – ۴)

که در آن Q_B تولید یا فروش در نقطه سر به سر و Q تولید یا فروش در یک سطح مشخص است. اگر برای فوق Q = 200 فرض شود ، منفعت حاصل از فروش ، عبارت است از :

منفعت حاصل از فروش N = (200 – 150) (180 – 30) = 7500 (تومان)

محاسبه نقطه سر به سر برای چند محصول:

گاه یک سازمان چند محصول خود را با هم و به صورت یک سبد به فروش می رساند . در چنین شرایطی نمی توان برای تک تک محصولات ، نقطه سربه سر جداگانه محاسبه نمود.

بنابراین تعداد فروش در نقطه سر به سر برای سبد محصولات و مبلغ فروش آن به شرح زیر قابل محاسبه می باشند:

رابطه (۳-۴)

$$Q\,b = \frac{F}{CMU} = \frac{\text{هزینه ثابت}}{\text{میانگین حاشیه فروش سبد محصولات}}$$

رابطه (۴-۴)

$$S\,b = \frac{F}{CMR} = \frac{\text{هزینه ثابت}}{\text{میانگین نسبت حاشیه فروش سبد محصولات}}$$

رابطه (۵- ۴)

$$CMU = \frac{\sum \text{حاشیه فروش} \times \text{ترکیب در سبد محصول}}{\text{مجموع ترکیب در سبد}}$$

رابطه (۶- ۴)

$$CMR = \frac{\sum \text{ترکیب در سبد هر محصول} \times \text{نسبت حاشیه فروش هر محصول}}{\text{مجموع ترکیب در سبد}}$$

رابطه (۷- ۴)

سود (زیان) = هزینه ثابت - (تعداد فروش × CMU)

به عبارت بهتر در رابطه مقدار و مبلغ نقطه سربه سر ، بجای محاسبه حاشیه فروش یک محصول ، میانگین وزنی حاشیه فروش سبد محصولات ، مورد استفاده قرار می گیرد و برای محاسبه مبلغ فروش در نقطه سربه سر ،

میانگین وزنی نسبت حاشیه فروش سبد محصولات در محاسبه لحاظ می شود. به عبارت دیگر کل سبد محصولات به منزله یک محصول مستقل در نظر گرفته خواهد شد.

مساله: یک شرکت تولیدی سه محصول **A.B.C** را تولید و به همراه یکدیگر به فروش می رساند ، هزینه های ثابت ۷۳۵۰۰ ریال مربوط به محصول **A.B.C** به طور مستقل قابل محاسبه نیست. با توجه به داد ه های زیر:

محصول	هزینه متغیر	قیمت	ترکیب در سبد
A	۱۴۰۰	۲۰۰۰	۳
B	۱۰۰۰	۱۵۰۰	۳
C	۶۰۰	۱۰۰۰	۴

مطلوب است محاسبه :

۱. میانگین وزنی حاشیه فروش و نسبت حاشیه فروش سبد محصولات.

۲. مقدار و مبلغ فروش سبد محصولات در نقطه سربه سر.

۳. مقدار سود با فروش ۲۰۰ واحد از سبد محصولات .

۴. اگر در یک دوره محدودیت فقط امکان تولید و فروش یکی از محصولات تا سقف ۲۵۰۰ ریال باشد، بهتر است کدام محصول تولید شود؟

حل : (۱)

$$CMU = \frac{3(2000-1400)+3(1500-1000)+4\,(1000-600)}{10} = 490$$

$$CMR = \frac{\left(\frac{2000-1400}{2000}\times 3\right)+\left(\frac{1500-1000}{1500}\times 3\right)+\left(\frac{1000-600}{1000}\times 4\right)}{10} = ./35$$

حل : (۲)

$$Qb = \frac{F}{CMU} = \frac{73500}{490} = 150 \qquad Sb = \frac{F}{CMR} = \frac{73500}{./35} = 210000$$

و

سود $(490\times200) - 73500 = 24500$

حل : (۳)

محصول **C** با نسبت حاشیه فروش بیشتر انتخاب می شود :

$$CMR\,a = \frac{600}{2000} = ./3$$

$$CMR\,b = \frac{500}{1500} = ./33$$

$$CMR\,c = \frac{400}{1000} = ./4$$

مساله (۱) : یک شرکت تولیدی در نظر دارد یک دستگاه جدید برای خط تولید خریداری نماید ، با این کار هزینه متغیر ۲۰ ٪ کاهش و هزینه ثابت به اندازه ۷۵.۰۰۰ واحد پولی افزایش خواهد یافت . سایر اطلاعات از وضع موجود به شرح زیر آمده :

(Q)مقدار تولید کالا جهت فروش ۲۰.۰۰۰ واحد پولی ، (F) هزینه ثابت ۲۵۰.۰۰۰ واحد پولی ، (V)هزینه متغیر ۴۰ واحد پولی و (P) قیمت هر واحد فروش ۶۵ واحد پولی

بررسی کنید آیا خرید دستگاه جدید به صلاح شرکت هست ؟

مساله (۲) : با توجه به اطلاعات داده شده مقدار و مبلغ فروش در نقطه سر به سر را محاسبه کنید؟

(F) هزینه ثابت ۴۰۰ واحد پولی ، (V)هزینه متغیر۴ واحد پولی و (P) قیمت هر واحد فروش ۹ واحد پولی ، میزان سود در حجم ۲۰۰ واحد و میزان زیان در حجم ۵۰ واحد را نیز محاسبه کنید؟

مساله (۳) : هزینه تولید (Q) ۴.۰۰۰ واحد کالای برابر با ۹۰.۰۰۰ واحد پولی و هزینه تولید(Q) ۸.۵۰۰ واحد کالای برابر با ۱۲۶.۰۰۰ واحد پولی می باشد ، مطلوبست محاسبه هزینه ثابت و متغیر این کالا؟

مساله (۴): داده های مربوط به تولید در یک شرکت نشان میدهد که در مقابل ۱.۰۰۰.۰۰۰ ریال واحد پولی فروش(P) ، هزینه های ثابت(F) ۵۰۰.۰۰۰ واحد پولی ، و هزینه های متغیر (V) ۶۰۰.۰۰۰ واحد پولی می باشد. مبلغ فروش در نقطه سربه سر را برای این شرکت محاسبه کنید؟

مساله (۵) : دو طرح به قرار زیر به منظور تولید یک کالا پیشنهاد شده است ، بررسی کنید کدام طرح را می توان پذیرفت:

طرح شماره (۱)	طرح شماره (۲)
واحد پولی F_1= 70.000	واحد پولی F_2= 100.000
واحد پولی V_1 = 200	واحد پولی V_2 = 170
واحد پولی P_1= 350	واحد پولی P_2= 350

فصل پنجم ...

تخصیص کار (واگذاری)

تخصیص کار (واگذاری)

مقدمه

« مدل تخصیص کار» « Assignment model» از سری تصمیم‌های تحت شرایط اطمینان کامل بوده که عوامل نامطمئن در آن نقش ندارند. این مدل از ساده‌ترین مسائل توزیع و تعیین سهمیه می‌باشد، در این مدل K فعالیت و K وسیله مفروض است، که هر فعالیتی می‌تواند به تصادف توسط هر وسیله انجام شود. بنابراین مسئله شامل چگونگی واگذاری هر فعالیت به یک وسیله است، اما از آنجایی که کارآیی و بهره‌وری وسایل در انجام هر یک از فعالیت‌ها متفاوت می‌باشد، می‌بایست واگذاری به نحوی انجام گیرد که مناسب‌ترین نتیجه با سود عاید گردد. به عنوان نمونه می‌توان مثال‌هایی در مورد واگذاری همزمان کارهای فنی مشابه به دستگاه‌های خودکار، واگذاری مشاغل به کارمندان و بعضی از مسائل مدیریت حمل و نقل را بیان نمود.

تکنیک حل مسائل تخصیص کار

بطور کلی مسائل تخصیص کار را می‌توان از :

۱. روش کلاسیک شمارش
۲. روش بسط ماتریس‌ها

حل کرد. هر یک از این تکنیک‌ها را در قالب مثال‌های زیر مورد بحث قرار خواهیم داد:

مثال: فرض کنیم که K=3 باشد یعنی دارای سه فعالیت و سه وسیله هستیم که هر فعالیت باید به یک وسیله واگذار شود. وسایل ممکن است دستگاه خودکار، کارخانه، ماشین‌آلات و یا کارمند در نظر گرفته شود. واگذاری باید به نحوی صورت گیرد که هزینه در کمترین مقدار ممکن خود باشد. هر یک از فعالیت‌های ۱و۲ و یا ۳ ممکن است به هر یک از وسایل c,b,a واگذار شود، اما هزینه هر واگذاری خاص خود بوده و با هزینه نوع دیگری از واگذاری متفاوت است.

جدول زیر هزینه واگذاری‌های گوناگون را مشخص می‌کند:

وسیله / فعالیت	A	b	C
۱	۴	۷	۱
۲	۳	۶	۵
۳	۲	۹	۴

به عنوان مثال در این ماتریس اگر فعالیت شماره ۱ به وسیله **a** واگذار شود هزینه آن ۴ تومان می‌باشد، اما اگر به وسیله **b** یا **c** واگذار گردد هزینه به ترتیب ۷ و یا ۱ تومان خواهد بود. و یا اگر فعالیت شماره ۳ به وسیله **b** واگذار شود هزینه آن ۹ تومان خواهد بود. همچنین به جای هزینه در ماتریس تخصیص کار می‌توان ساعت کار و یا هر معیار دیگری را قرار داد.

۱- حل به روش شمارش

استراتژی	وسیله			هزینه هر استراتژی
	a	b	c	
S_1	۱	۲	۳	٤+۶+٤=١٤
S_2	۱	۳	۲	٤+۹+۵=١٨
S_3	۲	۱	۳	۳+۷+٤=١٤
S_4	۲	۳	۱	۳+۹+۱=١٣

در این روش با استفاده از اصل شمارش در آنالیز ترکیبی، شش استراتژی مختلف به شرح زیر در واگذاری سه فعالیت به سه وسیله را می‌توان بر شمرد:

بطوری که ملاحظه می‌شود در بین هزینه‌های محاسبه شده برای هر استراتژی در ستون آخر، هزینه S_6 (یعنی ۹ تومان) از همه کوچکتر بوده و در نتیجه S_6 مناسب‌ترین نحوه واگذاری فعالیت‌ها به وسایل را معلوم می‌سازد. در مثال فوق تعداد استراتژی‌های واگذاری سه فعالیت به سه وسیله را از روش تبدیل سه عدد، (۶= ۱×۲×۳=**!۳**) به دست آوردیم. چنانچه دارای ۵ فعالیت و ۵ وسیله باشیم، آنگاه استراتژی‌های ممکن عبارت از ۱۲۰=**!۵** استراتژی خواهد بود هر چه مسئله بیشتر جنبه عملی و واقعی بخود گیرد. مقدار **K** زیادتر شده و محاسبه استراتژی‌ها مشکل و حتی گاهی غیر ممکن می‌گردد. به عنوان مثال اگر تعداد وسایل و همچنین فعالیت‌های واگذاری برابر (۱۰= **K**) باشد، از روش شمارش تعداد ۳۶۲۸۸۰۰=**!۱۰** استراتژی خواهیم داشت که محاسبه و مقایسه هزینه

آنها به طریق جبری غیر ممکن است. به این منظور باید روش بسط ماتریس‌ها که دستاورد پیشرفت‌های جدید در ریاضیات است را در حل مسائلی از این قبیل بکار گرفت.

۲– حل از روش بسط ماتریس‌ها :

اساس کار روش بسط بر این پایه است که چنانچه عدد ثابتی را از عناصر یک بردار افقی با بردار ستونی در ماتریس هزینه‌ها کم کنیم، هزینه هر یک از **!K** استراتژی‌ها درست به اندازه همان عدد ثابت کاهش می‌یابد.

برای مثال اگر در ماتریس هزینه مسئله قبل عدد ۱ را از کلیه اعداد ردیف اول جدول کسر کنیم، نتیجه بسط جدول و همچنین محاسبه هزینه جدید استراتژی‌ها به قرار زیر است :

$$\begin{bmatrix}4 & 7 & 1\\3 & 6 & 5\\2 & 9 & 4\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{عدد یک را از اعداد ردیف اول کم می کنیم}]{} \begin{bmatrix}3 & 6 & 0\\3 & 6 & 5\\2 & 9 & 4\end{bmatrix}$$

استراتژی	وسیله			هزینه هر استراتژی
	a	B	C	
S_1	۱	۲	۳	۳+۶+۴=۱۳
S_2	۱	۳	۲	۳+۹+۵=۱۷
S_3	۲	۱	۳	۳+۶+۴=۱۳
S_4	۲	۳	۱	۳+۹+۰=۱۲
S_5	۳	۱	۲	۲+۶+۵=۱۲
S_6	۳	۲	۱	۲+۶+۰=۸

دیده می‌شود که هزینه جدید هر یک از استراتژی‌ها به اندازه ۱ تومان کاهش پیدا کرده است، اما مناسب‌ترین استراتژی که کمترین هزینه را موجب می‌گردد همواره همان S_6 است. به طریق مشابه چنانچه عددی از یک ردیف با ستون دیگر ماتریس کم شود، هزینه استراتژی‌ها به اندازه آن عدد کاهش می‌یابد. باید خاطر نشان نمود که بسط ماتریس‌ها به این روش در مناسب‌ترین استراتژی تغییری ایجاد نکرده، بلکه به علت کسر اعداد ثابت طی مراحل بسط، هزینه مناسب‌ترین واگذاری‌ها را به صفر کاهش می‌دهد. از این‌رو کسر اعداد ثابت از ردیف‌ها و ستون‌ها باید تا جایی ادامه پیدا کند که حداقل هزینه یکی از استراتژی‌های واگذاری برابر صفر شود.

اکنون قدم‌های حل مسئله تخصیص کار به روش بسط ماتریس‌ها را بصورت زیر خلاصه می‌کنیم:

قدم اول: کوچکترین عدد هر ردیف ماتریس هزینه را از سایر اعداد آن ردیف کم نمایید.

قدم دوم : کوچکترین عدد هر ستون را از سایر اعداد آن ستون کم کنید (می‌توان تقدم قدم‌های اول و دوم را جا به جا نمود.)

قدم سوم: صفرهای پیدا شده در ماتریس حاصل را توسط خطوط افقی و عمودی بپوشانید.

در رسم خطوط برای پوشاندن صفرها باید توجه کرد که:

(۱) کلیه صفرها در ماتریس پایانی پوشانده شوند.

(۲) خطوط ترسیمی فقط افقی یا عمودی نباشند.

(۳) با خطوطی کمتر از آنچه رسم شده است نتوان صفرها را پوشاند.

* چنانچه حداقل خطوط افقی و عمودی ممکن که کلیه صفرهای ماتریس را می‌پوشانند برابر با بعد ماتریس (K) شود، در این مرحله مسئله حل شده است و می‌بایست درصدد پیدا کردن مناسب‌ترین استراتژی بود.

** چنانچه خطوط افقی و عمودی برای پوشش صفرهای ماتریس پایانی، کمتر از بعد ماتریس باشد به جواب نرسیده‌ایم و باید به بسط ماتریس ادامه دهیم، زیرا برای رسیدن به جواب مسئله باید هزینه مناسب‌ترین استراتژی در ماتریس پایانی (بعد از کسر کوچک‌ترین اعداد از ردیف‌ها و ستون‌ها) برابر صفر شود.

*** اگر حداقل خطوط افقی و عمودی بیشتر از بعد ماتریس شود، در رسم خطوط دچار اشتباه شده‌ایم، پس باید فرآیند قدم سوم یعنی پوشش صفرها به نحو درست تکرار گردد.

قدم چهارم: چنانچه حداقل خطوط افقی و عمودی ممکن که صفرها را می‌پوشانند، کمتر از بعد ماتریس (k) باشد، بسط ماتریس باید ادامه پیدا کند. برای این منظور کوچک‌ترین عدد موجود در ماتریس پایانی را که توسط خطوط افقی و عمودی پوشیده نشده انتخاب و ابتدا آن را از کلیه اعداد پوشیده نشده (توسط خطوط) کم می‌کنیم، سپس مقدار این کوچک‌ترین عدد انتخاب شده را، به اعداد واقع در محل‌های برخورد خطوط افقی و عمودی اضافه می‌نماییم.

قدم پنجم : برای پیدا کردن مناسب‌ترین استراتژی (در صورتی که به ماتریس پایانی جواب مسئله رسیده باشیم) ابتدا ستون‌ها و یا ردیف‌هایی را در نظر بگیرید که فقط دارای یک صفر هستند، هر صفر قسمتی از واگذاری را در مناسب‌ترین استراتژی تعیین می‌نماید، سپس با بقیه واگذاری‌ها را از بین سایر صفرهای موجود در ماتریس پایانی که مناسب در تشکیل جواب مسئله باشند، انتخاب کنید.

حال با توجه به آنچه گفته شد، مثال را به کمک این روش حل می‌نماییم.

ماتریس ابتدایی هزینه

$$\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\begin{bmatrix}4 & 7 & 1\\3 & 6 & 5\\2 & 9 & 4\end{bmatrix}$$

قدم اول: کسر کوچکترین عدد هر ردیف از اعداد همان ردیف

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix}3 & 6 & 0\\0 & 3 & 2\\0 & 7 & 2\end{bmatrix}$$

قدم دوم: کسر کوچکترین عدد هر ستون از اعداد همان ستون

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix}3 & 3 & 0\\0 & 0 & 2\\0 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

قدم سوم : پوشاندن صفرها توسط خطوط افقی و عمودی

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix}3 & 3 & 0\\0 & 0 & 2\\0 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

ماتریس پایانی جواب مسئله

ملاحظه می‌شود که در ماتریس پایانی کلیه صفرها توسط سه خط افقی و عمودی پوشانده شده‌اند.

(یعنی ۳ = بعد ماتریس = حداقل خطوط افقی و عمودی) و در نتیجه این ماتریس جواب مسئله است. اکنون برای پیدا کردن مناسب ترین استراتژی بر اساس قدم پنجم اقدام می‌کنیم. ردیف سوم و ستون سوم دارای یک صفر هستند، در نتیجه فعالیت ۱ باید به وسیله **c** و فعالیت ۳ به وسیله **a** واگذار شوند. حال اگر فعالیت ۲ به وسیله **b** واگذار شود، مناسب‌ترین استراتژی به صورت واگذاری فعالیت ۳ به **a**، ۲ به **b** و ۱ به **c** مشخص می‌شود. این استراتژی همان S_6 است که با روش شمارش به عنوان مناسب‌ترین استراتژی انتخاب شد.

برای بدست آوردن مناسب ترین استراتژی از راه بسط ماتریس ها مراحل ذیل را باید درنظر داشت:

- ✓ در هر سطر کمترین مقدار را از کلیه اعداد همان سطر کسر کنیم.
- ✓ در جدول بدست آمده جدید از هر ستون کمترین مقدار را از کلیه اعداد همان ستون کسر می کنیم.
- ✓ صفرها را با کمترین خط افقی یا عمودی پوشش می دهیم.
- ✓ اگر تعداد خطها با تعداد سطرها یا ستونها برابر بود می توانیم جواب بهینه را بدست بیاوریم. در غیر اینصورت ، کمترین مقدار عددی که پوشش نیافته را از سایر اعداد پوشش نیافته کم می کنیم و به اعداد دوبار پوشش یافته اضافه می کنیم و سایر اعداد را همانطور می نویسیم.

✓ و در ادامه مجدداً صفرها را با کمترین خط افقی یا عمودی پوشش می دهیم، و اگر تعداد خطوط پوششی برابر تعداد سطر ها بود جواب را استخراج می کنیم در غیر اینصورت مجدداً به گام های قبلی می رویم.

✓ صفر ها در جدول نهایی نشان دهنده جواب هستند بنابراین باید صفرها را بگونه ای انتخاب نمود که در هر سطر و در هر ستون فقط یک صفر لحاظ شده باشد. در اینصورت بهتراست همیشه اول صفرهایی انتخاب شوند که در سطر یا ستون خود تنها صفر هستند.

✓ با پیدا کردن تنها صفر در ستون ⟵ سطر و ستون آن حذف می شود.

✓ با پیدا کردن تنها صفر در سطر ⟵ سطر و ستون آن حذف می شود.

فصل ششم ...

مدل کنترل موجودی (در حال مشخص)

مدل کنترل موجودی (در حال مشخص)

مقدمه

سازمان‌های تولیدی برای تولید کالا و ارائه خدمت به مواد اولیه و قطعات نیاز دارند که از عرضه کنندگان آنها تأمین می‌نمایند. هدف اصلی از مدیریت مواد اولیه و قطعات مورد نیاز، آن است که در هنگام نیاز کالاها و قطعات به میزان مورد نظر موجود باشند، همچنین مقدار کالاها و قطعات به اندازه مناسب در دسترس باشند یعنی نه به میزان زیاد که هزینه انبارداری فوق‌العاده‌ای را بر سازمان تحمیل و فضای دیگر کالاها را اشغال نمایند و نه آن قدر کم باشند که خط تولید متوقف شود. به عبارت دیگر، منافع ناشی از دارا بودن موجودی بیش از هزینه‌های کمبود آن باشد.

منظور از « موجودی» «Inventory» تنها مواد اولیه و قطعات نیست، بلکه به کالاهای نیمه ساخته، ماشین‌آلات، ابزارآلات تولیدی، لوازم و کالای ساخته شده نیز گفته می‌شود.

در سیستم‌های نوین تولید، سازمان‌ها به دنبال کاهش میزان موجودی و نگهداری آن در حداقل ممکن هستند، به گونه‌ای که مواد اولیه هنگام نیاز وارد سیستم شده و کالای تکمیل شده برای مشتریان فرستاده شده. بنابراین سازمان‌ها با بکارگیری مدیریت زنجیره عرضه و ایجاد روابط بلند مدت با مشتریان و تهیه کنندگان مواد اولیه، به میزان چشمگیری موفق به کاهش میزان موجودی شده‌اند. اما هنوز بسیاری از سازمان‌ها، مطابق سیستم سنتی تولید انبوه فعالیت می‌کنند و ناگزیر از دارا بودن انبار و کنترل موجودی‌ها و برنامه‌ریزی برای تهیه آنها هستند. بدین ترتیب می‌توان گفت که مدیریت موجودی مستلزم شناخت انواع موجودی‌ها، هزینه و منفعت آنهاست تا بتوان مطابق اهداف تعریف شده، میزان موجودی‌ها را برنامه‌ریزی و کنترل نمود.

اهمیت کنترل و موجودی

نگهداری درست و به اندازه موجودی در انبار به عنوان عامل تعیین کننده‌ای در میزان سود یک مؤسسه، از سال ۱۹۱۵ میلادی مورد توجه قرار گرفت. موجودی انبار یکی از پر هزینه‌ترین و مهم‌ترین دارایی‌ها در برخی از شرکت‌ها بوده و در حدود ۴۰ ٪ کل سرمایه شرکت را تشکیل می‌دهد. مدیران سال‌هاست که به جدی‌بودن مسئله کنترل موجودی کالاها پی برده‌اند. در این راستا مدل‌های ریاضی کنترل موجودی، مدیریت را کمک می‌کنند تا همواره مناسب‌ترین سطح موجودی را تعیین نمایند. ناگفته نماند که امروزه در کشورهایی مانند ژاپن

«موجودی انبار» مسئله حل شده‌ای است. برای مثال کالایی مانند خودرو (تویوتا) در کمتر از دو ساعت یا پیشرفته‌ترین آدم‌واره‌ها روی هم سوار شده و در زمانی کمتر از یک ساعت بدست مصرف کننده‌اش می‌رسد.

هر سازمان نوعی سیستم برنامه‌ریزی و کنترل موجودی دارد. یک بانک روش‌هایی برای کنترل موجودی پول نقد، و یک بیمارستان روش‌هایی را جهت کنترل عرضه کنندگان خون و دیگر اقلام مهم بکار می‌برد. حکومت‌ها، مدارس و در نهایت هر تولید کننده و سازمان تولیدی، به برنامه‌ریزی و کنترل موجودی توجه دارند. مطالعه چگونگی کنترل موجودی سازمان‌ها درست مثل مطالعه چگونگی تحقق اهداف آنها توسط عرضه کالاها و خدمات به مشتریان آنهاست.

بدین ترتیب، از یک طرف شرکت‌ها باید سعی کنند تا با کاهش سطوح موجودی کالای در دسترس، هزینه‌ها را کاهش دهند، و از طرف دیگر مشتریان با عدم موجودی روبرو نشوند بنابراین همواره تعادل بین سطوح کم و زیاد برقرار کنند. در بدست آمدن این تعادل، کمترین هزینه، عامل تعیین کننده‌ای می‌باشد.

از طریق برنامه‌ریزی موجودی کالا، سازمان مشخص می‌کند که چه کالاها یا خدماتی باید تولید شوند و چه کالاهایی باید از تولیدکنندگان دیگر تهیه گردند. برای برنامه ریزی موجودی کالاها، ابتدا لازم است کالاها را بر اساس میزان ارزش و حجم آنها طبقه بندی نمود. بطور کلی کالاها را می‌توان در سه دسته **A,B,C** دسته‌بندی نمود. بررسی‌ها نشان می‌دهد که اغلب ۲۰ درصد اقلام موجودی، ۷۰ تا ۸۰ درصد ارزش کل موجودی‌ها را تشکیل می‌دهند. این دسته از کالاها را «گروه **a** نامیده‌اند. دسته دوم کالاهایی هستند که در حدود ۳۰ درصد اقلام موجودی انبار را در برگرفته و از نظر ارزش فقط ۱۵ درصد ارزش کل موجودی‌ها را به خود اختصاص می‌دهند. این دسته از کالاها را «گروه **B** گویند و دسته سوم ۵۰ الی ۶۰ درصد اقلام انبار را تشکیل داده و ۵ تا ۱۰ درصد ارزش کل موجودی‌ها را به خود اختصاص می‌دهند و «گروه **C**» نام دارند. بیشترین توجه مدیریت مواد باید ابتدا به دست **A** معطوف باشد و گروه‌های بعدی از اولویت کمتری برخوردار هستند زیرا عدم کنترل دقیق و صحیح اقلام دسته **A** هزینه گزافی به دنبال خواهد داشت. شکل زیر دسته‌بندی کالاها را بر اساس طبقه‌بندی **ABC** نشان می‌دهد.

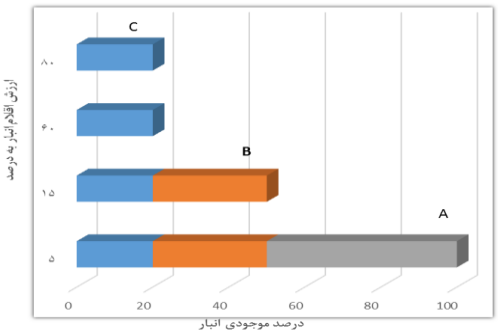
نمودار دسته‌بندی کالاها بر اساس طبقه‌بندی ABC

مدل‌های کنترل موجودی تحت شرایط اطمینان کامل به شرح زیر می‌باشند :

۱. **مدل میزان اقتصادی سفارش(EOQ (Economic Order Quantity Model**

۲. مدل تخفیف در خرید کلی (Quantity Discount Model)

۳. مدل دریافت تدریجی کالا (میزان اقتصادی تولید) (POQ (Production Order Quantity

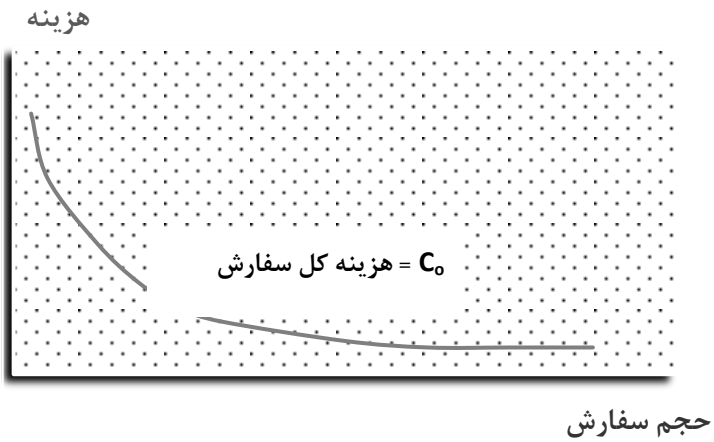


قبل از شروع بحث درباره مدل‌های کنترل موجودی ابتدا به معرفی و طبقه‌بندی هزینه‌های مورد بحث در این مدل‌ها خواهیم پرداخت. از یک دیدگاه کلی در مدیریت کنترل موجودی، هزینه‌ها به سه دسته به شرح زیر تقسیم شده است :

هزینه‌های سفارش

به کلیه هزینه‌هایی که از زمان درخواست کالا تا دریافت آن ایجاد می‌شوند، «هزینه سفارش» گویند. که تغییرات آن بر اساس میزان سفارش، مطابق شکل زیر است. هر چه میزان سفارش بیشتر شود، هزینه کل سفارش کمتر می‌شود. هزینه‌های تهیه فرم درخواست خرید، ارسال فرم به فروشنده، هزینه حمل و نقل تا دریافت کالا، عوارض گمرکی و سایر هزینه‌هایی که سازمان برای سفارش و دریافت کالا از فروشنده، در هر بار سفارش متحمل می‌شود، از جمله هزینه‌های سفارش هستند، این هزینه‌ها شامل هزینه‌های ثابت و متغیر بوده که در مدل کنترل موجودی، فقط هزینه‌های متغیر مورد نظر است.

نمودار هزینه کل سفارش :



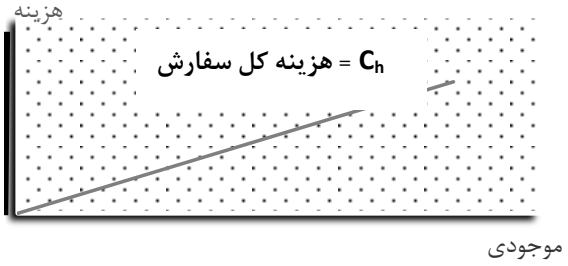
هزینه نگهداری

« Cost of Holding» هزینه‌های حفظ و نگهداری کالا در انبار «هزینه‌های نگهداری» نامیده می‌شوند. نظیر هزینه‌های عملیاتی انبار، کنترل و جابه‌جا نمودن کالا در انبار، استهلاک کالا در انبار، مفقود شدن کالا در انبار، از مد افتادن کالای موجود در انبار، بیمه انبار و مهم‌تر از همه هزینه انباشته (بلوکه) شدن سرمایه به صورت کالا،

که به عنوان هزینه فرصت از دست رفته سرمایه در انبار محسوب می‌شود.

این هزینه‌ها نیز به صورت ثابت و متغیر هستند که در مدل کنترل موجودی فقط هزینه‌های متغیر مدنظر است. هر چه میزان موجودی افزایش یابد به همان نسبت هزینه نگهداری نیز افزایش می‌یابد. شکل زیر نمودار هزینه-های کل نگهداری را نشان می‌دهد.

نمودار هزینه کل نگهداری :



هزینه کمبود

«Cost of Shortage»هزینه‌هایی که به علت نداشتن کالا و مواد، در زمان مورد نیاز، حاصل می‌شوند، «هزینه-های کمبود» می‌باشند. هزینه از دست دادن مشتری، عدم تحقق سود حاصل از فروش کالاهایی که به علت کمبود موجودی، تولید نگردیده و از دست دادن اعتبار در بازار، مثال‌هایی در این زمینه هستند. محاسبه هزینه کمبود، به علت وسعت ابعاد آن، نسبت به سایر هزینه‌ها پیچیده‌تر است.

مدل میزان افتصادی سفارش (EOQ) یا مدل میزان سفارش ثابت

این مدل تحت شرایط اطمینان کامل بوده و فرضیه‌های آن به شرح زیر است:

۱. برای هر محصول یا کالا باید به طور مستقل میزان اقتصادی سفارش یا EOQ محاسبه شود.

۲. تقاضای سالیانه مشخص و معلوم است.

۳. نرخ فروش یا مصرف کالا در طول سال به صورت یکنواخت و ثابت است.

۴. هر سفارش به صورت یک‌جا تحویل داده می‌شود.

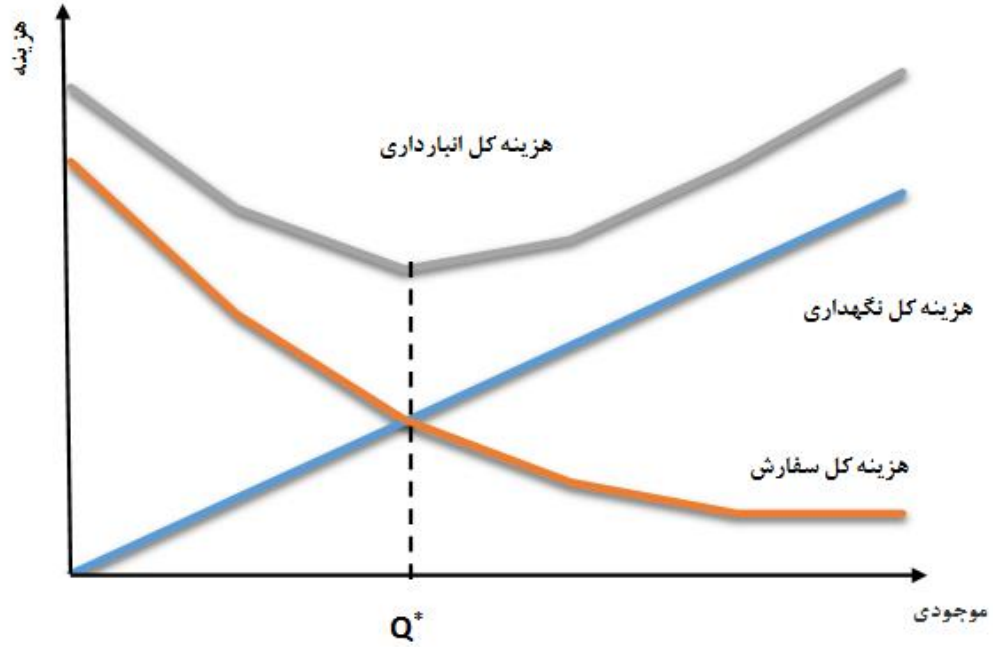
۵. قیمت ثابت است و هیچ‌گونه تخفیفی در خریدهای عمده وجود ندارد.

در این مدل هزینه کل انبارداری عبارت است از :

رابطه ۱ : هزینه کل انبار داری = هزینه کل سفارش + هزینه کل نگهداری

شکل زیر منحنی هزینه کل انبارداری را با توجه به هزینه‌های سفارش و نگهداری نشان می‌دهد.

نمودار هزینه کل انبارداری:



ملاحظه می‌شود که در نقطه Q^* میزان هزینه کل سفارش و هزینه کل نگهداری با هم برابر و هزینه کل در حداقل است. این نقطه «میزان اقتصادی سفارش» نام دارد. چنانچه بر طبق آن، میزان موجودی مورد نیاز سفارش داده شود حاصل جمع هزینه‌های کل سفارش و نگهداری یا هزینه کل انبارداری کمینه می‌گردد، اکنون به محاسبه ریاضی Q^* خواهیم پرداخت :

می‌دانیم که هزینه کل سفارش عبارت است از :

رابطه ۲ : هزینه کل سفارش = $\frac{D}{Q}C_O$

که در آن D تقاضای سالیانه، Q میزان سفارش و C_O هزینه هر بار سفارش است.

هزینه کل نگهداری نیز عبارت است از :

رابطه ۳ : هزینه کل نگهداری = $\frac{Q}{2}C_h$

که در آن C_h هزینه نگهداری هر واحد، و منظور از $\frac{Q}{2}$ متوسط موجودی در سال بوده و از رابطه $\frac{Q_{max}+Q_{min}}{2} \times L_i$ قابل محاسبه خواهد بود، I_i درصد زمان‌هایی است که در طی آن انبار فاقد موجودی باشد. حاصل ضرب متوسط موجودی در سال یا هزینه نگهداری هر واحد کالا در سال، هزینه کل نگهداری سالیانه را مشخص می‌نماید.

رابطه ۴ : $TC = \frac{D}{Q}C_O + \frac{Q}{2}C_h$

برای یافتن حداقل هزینه کل باید از رابطه فوق نسبت به Q مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم، بدین ترتیب

خواهیم داشت :

$$\frac{\partial TC}{\partial Q} = \frac{-DC_O}{Q^2} + \frac{C_h}{Q^2} = 0 \Rightarrow \frac{DC_O}{Q^2} = \frac{C_h}{Q^2} \Rightarrow Q^2 C_h = 2D\,C_O \Rightarrow Q^2 = \frac{2DC_O}{C_h}$$

$$\Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2DC_O}{C_h}} = EOQ$$ رابطه ۵ :

که در آن $Q^* = EOQ$ میزان اقتصادی سفارش خواهد بود.

هزینه کل بهینه انبارداری نیز عبارت است از :

$$TC^* = \frac{DC_O}{Q^*} + \frac{Q^*}{2} C_h$$ رابطه ۶ :

مثال:

اگر تقاضای سالیانه محصولی ۷۲۰۰۰ واحد و هزینه هر بار سفارش ۶۴۰۰ و هزینه سالیانه نگهداری هر واحد ۱۰۰ واحد پولی باشد مطلوب است محاسبه میزان اقتصادی سفارش و هزینه کل انبارداری بهینه.

حل : میزان اقتصادی سفارش :

$$EOQ = Q^* = \sqrt{\frac{2DC_O}{C_h}} = \sqrt{\frac{2\times 72000\times 6400}{100}} \approx 3036$$

هزینه کل بهینه انبارداری :

$$TC^* = \frac{DC_O}{Q^*} + \frac{Q^*}{2} C_h = \frac{72000\times 6400}{3036} + \frac{3036}{2} \times 100 = 303578/6$$

با توجه به اطلاعات فوق و در نظر گرفتن ۳۶۰ روزکاری در سال تعداد تکرار سفارش در سال، فاصله زمانی بین دو سفارش، متوسط موجودی و بیشترین موجودی را محاسبه نمایید.

حل : تعداد تکرار سفارش ۲۴ بار در طول سال

$\frac{D}{Q^*} = \frac{72000}{3036} = 23/7 = 24$ برای محاسبه فاصله زمانی بین دو سفارش از تقسیم تعداد روزهای کاری در سال بر تعداد تکرار سفارش خواهیم داشت :

یعنی هر ۱۵ روز یکبار باید سفارش داده شود.

$\frac{360}{24} = ۱۵$ روز

در طول سال به طور متوسط ۱۵۱۸ واحد کالا در انبار موجود است .

$$\frac{Q^*}{2} = \frac{3036}{2} = 1518$$

چون در هر بار سفارش به اندازه Q^* کالا دریافت می‌شود و مصرف کالا ثابت و یکنواخت است، بنابراین بیشترین موجودی در انبار به اندازه $Q^* = 3036$ می‌باشد.

نقطه سفارش مجدد : « **Reorder Point (ROP)**» اغلب از زمان سفارش کالا تا زمان دریافت آن مدت زمانی

تأخیر وجود دارد که به آن «دوره تأخیر تا دریافت سفارش»« Lead time» گویند، پس باید میزان موجودی کالا به اندازه‌ای برسد که بیانگر سفارش مجدد محصول باشد. به این مقدار «نقطه سفارش مجدد» گویند که از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

رابطه ۷ : $ROP = d.LT + M$

که در آن d تقاضای روزانه برای یک کالا، LT دوره تأخیر تا دریافت سفارش و M «ذخیره احتیاطی» یا مقدار کالایی است که باید در انبار نگهداری شود تا در صورت بروز نوسان در تقاضا مشکلی ایجاد نگردد. همان طور که ملاحظه می‌گردد تقاضای روزانه در LT (دوره تأخیر تا دریافت سفارش) ضرب و یا میزان ذخیره احتیاطی جمع می‌شود تا در زمان دریافت کالا، هیچ‌گونه کمبودی احساس نگردد.

مثال : اگر تقاضای سالیانه برای کالایی ۷۲۰۰۰، تعداد روزهای کاری ۳۰۰ روز در سال، زمان تأخیر تا دریافت سفارش ۳ روز و میزان ذخیره احتیاطی صفر باشد، نقطه سفارش مجدد عبارت است از :

$ROP = (۷۲۰۰۰ \div ۳۰۰)\ ۳ + ۰ = ۷۲۰$

یعنی سفارش مجدد، زمانی صورت می‌گیرد که موجودی کالا به ۷۲۰ واحد برسد.

مثال: یک شرکت تولیدی، خرید و نگهداری یکی از قطعات فلزی مورد نیاز خود را تحت بررسی قرار داده است. این شرکت در سال به ۲۵۰۰۰ واحد از این قطعه نیاز داشته که ارزش خرید هر واحد آن ۳۰۰۰ واحد پولی است. اگر هزینه‌های سفارش خرید برای هر بار ۳۷۰۰ واحد پولی و هزینه نگهداری هر واحد آن در انبار برابر ۱۹٪ ارزش خرید باشد، مطلوب است :

الف. مقدار با صرفه سفارش هر بار و کل هزینه بهینه انبارداری

ب. مناسب‌ترین فاصله بین دو سفارش و مناسب‌ترین تعداد تکرار سفارش در سال.

ج. نقطه سفارش مجدد اگر تعداد روزهای کاری در سال ۳۰۰ روز و زمان تأخیر تا دریافت سفارش یک هفته و ذخیره احتیاطی ۱۱۷ واحد کالا باشد.

حل :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\times 25000\times 3700}{\%19\times 3000}} = 569.7 \approx 570$$ واحد کالا

$$TC^* = \frac{25000\times 3700}{570} + \frac{570}{2}(\%19\times 3000) \approx 324731$$ تومان

تعداد تکرار سفارش = $\frac{D}{Q^*} = \frac{25000}{570} = 43.859 \approx 44$ بار در سال

یعنی هر هفته یک بار سفارش انجام می‌شود $\frac{300}{44} = 6.8 \approx 7$ = فاصله زمانی بین دو سفارش

$ROP = (۲۵۰۰۰ \div ۳۰۰)\ ۷ + ۱۱۷ = ۷۰۰$

هرگاه موجودی کالا به ۷۰۰ واحد برسد، سفارش مجدد انجام می‌شود.

تحلیل حساسیت مدل EOQ: برخی اوقات واحدهای تولیدی یا خدماتی بجای میزان Q^*، میزان بیشتر یا کمتری سفارش می‌دهند. در این صورت بین هزینه کل ناشی از در نظر گرفتن Q^* به عنوان مقدار با صرفه سفارش و هزینه کل میزانی که مدیریت مایل به سفارش است یعنی Q، باید مقایسه‌ای صورت گیرد.

روشن است که هر چه میزان سفارش کمتر یا بیشتر از Q^* باشد، هزینه کل بیشتر خواهد شد. تحلیل حساسیت این موضوع، از رابطه ۸ صورت می‌پذیرد.

رابطه ۸ : $\frac{TC}{TC^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^*}{Q} + \frac{Q}{Q^*}\right)$

مقدار این رابطه همیشه بزرگتر از یک است.

مثال : شرکت پویا قراردادی برای تولید ۱۵۰۰۰۰ واشر بسته است. این شرکت مواد اولیه مورد نیاز برای ۳۰۰۰۰ واشر را یک‌جا سفارش می‌دهد. هزینه هر بار سفارش ۴۰۰۰، هزینه نگهداری ۲۰٪ قیمت کالا و قیمت کالا ۱۵ واحد پولی است. مدیران شرکت مایلند بدانند نحوه تنظیم سفارش آنها تا چه حد از تعداد اقتصادی سفارش فاصله دارد و از این بابت به چه میزان ضرر می‌کنند؟

حل:

$$EOQ = Q^* = \sqrt{\frac{2DC_O}{C_h}} = \sqrt{\frac{2 \times 150000 \times 3000}{\%20 \times 15}} = 20000$$

$$\frac{TC}{TC^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^*}{Q} + \frac{Q}{Q^*}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{20000}{40000} + \frac{40000}{20000}\right) = 1.25$$

بنابراین هزینه کل انبارداری بهینه برابر است با :

$$TC^* = \frac{DC_O}{Q^*} + \frac{Q^*}{2} C_h = \frac{150000}{20000} \times 4000 + \frac{20000}{2} \times \%20 \times 15 = 60000$$

به عبارت بهتر، در صورت سفارش ۲۰۰۰۰ واحد کالا، میزان هزینه کل ۶۰۰۰۰ واحد پولی است.

هزینه انبارداری در صورت سفارش ۴۰۰۰۰ واحد کالا ۱/۲۵ × ۶۰۰۰۰ =۷۵۰۰۰

بدین ترتیب زیان سالیانه برابر است با : ۷۵۰۰۰ – ۶۰۰۰۰ = ۱۵۰۰۰

فصل هفتم ...

تصمیم گیری در شرایط عدم اطمینان کامل

تصمیم گیری در شرایط عدم اطمینان کامل

مقدمه

شرایط عدم اطمینان کامل، شامل نوعی از معامله تصمیم $E= f(x,y)$ است، که در برگیرنده تعدادی متغیر غیر قابل کنترل (y) بوده اما داده‌های موجود از گذشته برای پیش‌بینی وضعیت این متغیرها در آینده بسیار ناچیز است. شرایط این نوع از تصمیم‌گیری در بیشتر مواقع قابل تبدیل به معادلات ریاضی نبوده و بنابراین برای ارزیابی آن از «ماتریس تصمیم‌گیری» به عنوان یک مدل قیاسی، استفاده می‌شود. از جمله مسائلی که در حوزه این نوع تصمیم‌گیری قرار می‌گیرند عبارتند از : تصمیم‌گیری برای تولید یک محصول جدید، توسعه ظرفیت تولید و انتشار سهام یا اوراق قرضه.

تصمیم‌گیری در قالب این مدل را طی دو مثال نمونه از طریق معیارهای مختلف، دنبال خواهیم کرد:

مثال: فرض کنیم چهار استراتژی در مقابل سه متغیر غیر قابل کنترل، به منظور جایگزین نمودن یک محصول جدید به جای یک محصول موجود به قرار زیر ارائه شده باشد :

استراتژی یکم: تولید محصول جدید و متوقف نمودن تولید محصول موجود	S_1
استراتژی دوم: ادامه تولید محصول موجود با ایجاد تغییرات قابل ملاحظه در آن	S_2
استراتژی سوم: ادامه تولید محصول موجود با ایجاد تغییرات جزیی در آن	S_3
استراتژی چهارم: ادامه تولید محصول موجود بدون هیچ گونه تغییر	S4
متغیر غیر قابل کنترل یکم: پیش بینی رونق اقتصادی برای آینده	Y_1
متغیر غیر قابل کنترل دوم : پیش‌بینی ثبات اقتصادی برای آینده	Y_2
متغیر غیر قابل کنترل سوم: پیش‌بینی رکود اقتصادی برای آینده	Y_3

اگر سود طی یک دوره زمان، حاصل از انتخاب هر استراتژی در مقابل وقوع هر متغیر غیر قابل کنترل پیش‌بینی شده باشد، مدلسازی این مسئله بصورت «ماتریس تصمیم‌گیری» زیر خواهد بود.

ماتریس تصمیم‌گیری:

Y_i / S_i	Y_1	Y_2	Y_3
S_1	۸۰۰۰	۵۰۰۰	−۱۰۰۰
S_2	۶۰۰۰	۴۰۰۰	−۵۰۰
S_3	۴۰۰۰	۲۰۰۰	۰
S_4	۳۰۰۰	۲۰۰۰	۱۵۰۰

اعداد داخل ماتریس نشان دهنده سود حاصل از هر یک از شرایط تصمیم‌گیری (یعنی انتخاب یک استراتژی در مقابل یک متغیر غیر قابل کنترل) می‌باشند ملاحظه می‌شود که عدم دسترسی به داده‌های گذشته موجب عدم توانایی در محاسبه احتمال ریاضی برای وقوع هر یک از متغیرهای غیر قابل کنترل شده است.

معیارهای موجود برای ارزیابی مدل قیاسی تشکیل شده فوق عبارتند از :

معیار بدبینی، خوش‌بینی، ضریب خوش‌بینی، فرصت از دست رفته و برابری احتمال وقوع

۱. **معیار بدبینی :** «Technique of pessimidm» "Max Min"

این معیار توسط «آبراهام والد» پیشنهاد شده و به معیار «ماکسی مین» یا «بهترین بدترین‌ها» معروف است. این معیار بیشتر توسط یک تصمیم گیرنده بیش از حد بدبین بکار برده می‌شود و عبارت از انتخاب بیشترین بازده از میان کمترین بازده‌های موجود از استراتژی‌های مختلف است. در اینجا یک تصمیم‌گیرنده بدبین فرض می‌نماید که کمترین بازده (بدترین نتیجه ممکن) از انتخاب هر استراتژی به وقوع خواهد پیوست و سپس وی بهترین نتیجه را از بین بدترین نتایج انتخاب خواهد نمود.

این معیار را برای انتخاب مناسب‌ترین استراتژی از مثال فوق مورد استفاده قرار می‌دهیم، بنابراین :

متغیر غیر قابل کنترل / استراتژی	Y_1	Y_2	Y_3	بدترین نتایج
S_1	۸۰۰۰	۵۰۰۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰۰
S_2	۶۰۰۰	۴۰۰۰	−۵۰۰	−۵۰۰
S_3	۴۰۰۰	۲۰۰۰	۰	۰
S_4	۳۰۰۰	۲۰۰۰	۱۵۰۰	۱۵۰۰

بنابراین S_4 توسط یک تصمیم گیرنده بدبین انتخاب خواهد شد.. اگر مقیاس رتبه‌ای برای سنجش مطلوبیت نتایج حاصل از استراتژی‌های موجود در مسئله مورد استفاده قرار گیرد، این معیار تنها معیار قابل دفاعی است که میتوان در این شرایط از تصمیم‌گیری بکار برد.

۲. معیار خوش‌بینی : «Technique of Optimism » "Max Max"

این معیار توسط « هورویس» پیشنهاد شده و به معیار « ماکسی ماکس» یا « بهترین بهترین‌ها » معروف می-باشد. این معیار برعکس معیار بدبینی است بدان معنی که یک تصمیم‌گیرنده بیش از حد خوش‌بین در این شرایط فرض می‌کند که بیشترین بازده (یا بهترین نتیجه ممکن) از انتخاب هر استراتژی به وقوع خواهد پیوست و سپس وی بهترین نتیجه را از بین بهترین نتایج انتخاب خواهد کرد. کاربرد این معیار برای مثال فوق به قرار زیر است :

متغیر غیر قابل کنترل / استراتژی	Y_1	Y_2	Y_3	بهترین نتایج
S_1	۸۰۰۰	۵۰۰۰	−۱۰۰۰	۸۰۰۰
S_2	۶۰۰۰	۴۰۰۰	−۵۰۰	۶۰۰۰
S_3	۴۰۰۰	۲۰۰۰	۰	۴۰۰۰
S_4	۳۰۰۰	۲۰۰۰	۱۵۰۰	۳۰۰۰

بنابراین S_1 توسط یک تصمیم‌گیرنده خوش‌بین به منظور حل مسئله فوق انتخاب خواهد شد.

۳. معیار ضریب خوش‌بینی: « Technique of Coefficient of Optimism »

این معیار نیز توسط «هورویس» پیشنهاد شده و بر این اصل مبتنی است که یک تصمیم‌گیرنده منطقی نمی‌تواند خوش بین کامل و یا بدبین کامل باشد، بلکه درصد خوش‌بینی یک تصمیم‌گیرنده ممکن است بیش از درصد بدبینی او باشد در حالی که این امر می‌تواند برای یک تصمیم‌گیرنده دیگر بصورتی دیگر حقیقت داشته باشد. به عنوان مثال، اگر درصد خوش‌بینی یک تصمیم‌گیرنده برای حل مسئله مورد بحث، برابر با ۶۰٪ باشد، درصد بدبینی وی برابر با ۴۰ ٪ خواهد بود. ابتدا این درصدها را به ترتیب به احتمال وقوع بهترین نتیجه و بدترین نتیجه حاصل از هر استراتژی نسبت داده و سپس «ارزش مورد انتظار» ممکن را برای هر استراتژی محاسبه می-نماییم. کاربرد این معیار برای حل مسئله موجود بصورت زیر است:

ماتریس تصمیم‌گیری:

Y / S	Y_1	Y_2	Y_3	درصد خوش-بینی برای بهترین نتایج $P_1=0/6$	درصد بدبینی برای بدترین نتایج $P_2=0/4$	(ارزش مورد انتظار) $Ey=\sum_i X_iP_i$
S_1	۸۰۰۰	۵۰۰۰	-۱۰۰۰	۸۰۰۰	-۱۰۰۰	۸۰۰۰(۰/۶) -۱۰۰۰(۰/۴) =۴۴۰۰
S_2	۶۰۰۰	۴۰۰۰	-۵۰۰	۶۰۰۰	-۵۰۰	۶۰۰۰(۰/۶) -۵۰۰۰(۰/۴) =۳۴۰۰
S_3	۴۰۰۰	۲۰۰۰	۰	۴۰۰۰	۰	۴۰۰۰(۰/۶) +۰ (۰/۴)= ۲۴۰۰
S_4	۳۰۰۰	۲۰۰۰	۱۵۰۰	۳۰۰۰	۱۵۰۰	۳۰۰۰(۰/۶) +۱۵۰۰(۰/۴) =۲۴۰۰

ملاحظه می‌شود که «ارزش مورد انتظار» موجود برای S_1 در جدول بیشتر از ارزش‌های مورد انتظار سایر راه‌حل-ها بوده و بنابراین استراتژی‌ها یاد شده، به عنوان مناسب‌ترین استراتژی انتخاب خواهد شد.

۴. **معیار فرصت از دست رفته :** « Technique of Opportunity Loss»

این معیار توسط یک محقق به نام «ساویج» پیشنهاد شده و بر مبنای استفاده از تعریف «فرصت از دست رفته» استوار است. «فرصت از دست رفته» عبارت از زیان وارده به علت عدم انتخاب مناسب‌ترین استراتژی در یک تصمیم‌گیری است. این معیار را معیار «زیان فرصتی» و یا معیار « تأسف» نیز می‌نامند. بر اساس این معیار ابتدا فرصت‌های از دست رفته را برای وقوع هر متغیر غیر قابل کنترل از یک ماتریس تصمیم‌گیری به طور جداگانه محاسبه نموده و سپس کمترین فرصت از دست رفته از بین بیشترین فرصت‌های از دست رفته موجود را با استفاده از معیار «مینی ماکس» انتخاب می‌نماییم.

استفاده از این معیار به منظور حل مثال فوق به قرار زیر است:

ماتریس تصمیم‌گیری:

Y_i / S_i	Y_1	Y_2	Y_3
S_1	۸۰۰۰	۵۰۰۰	-۱۰۰۰
S_2	۶۰۰۰	۴۰۰۰	-۵۰۰
S_3	۴۰۰۰	۲۰۰۰	۰
S_4	۳۰۰۰	۲۰۰۰	۱۵۰۰

به منظور استفاده از این معیار برای حل یک مسئله باید علاوه بر «ماتریس تصمیم‌گیری یک ماتریس دیگر به نام «ماتریس فرصت‌های از دست رفته» تشکیل شود و سپس مناسب‌ترین استراتژِی با گزینش کمترین بازده از بین بیشترین بازده‌ها، انتخاب گردد.

برای محاسبه فرصت‌های از دست رفته در هر ستون از ماتریس بزرگترین عدد ستون را انتخاب و سایر اعداد آن ستون (و حتی خود آن عدد) را از عدد انتخاب کم می‌نماییم.

(تک تک نتایج آن ستون) - (بهترین نتیجه موجود در آن ستون) = فرصت از دست رفته برای یک ستون

به عنوان مثال به منظور محاسبه فرصت از دست رفته برای بازده ۶۰۰۰ از ستون اول « ماتریس تصمیم‌گیری» فوق داریم : ۲۰۰۰= ۶۰۰۰ -۸۰۰۰۰ = فرصت از دست رفته برای نتیجه ۶۰۰۰

ماتریس فرصت‌های از دست رفته:

Y_i / S_i	Y_1	Y_2	Y_3	بیشترین فرصت از دست رفته
S_1	۰	۰	۲۵۰۰	۲۵۰۰
S_2	۲۰۰۰	۱۰۰۰	۲۰۰۰	۲۰۰۰
S_3	۴۰۰۰	۳۰۰۰	۱۵۰۰	۴۰۰۰
S_4	۵۰۰۰	۳۰۰۰	۰	۵۰۰۰

کمترین فرصت از دست رفته

ملاحظه می‌شود که فرصت از دست رفته ۲۰۰۰ در آخرین ستون از «ماتریس فرصت‌های از دست‌رفته»کمترین مقدار بوده، و بنابراین استراتژی S_2 به عنوان مناسب‌ترین تصمیم، انتخاب می‌گردد.

۵. معیار برابری احتمال وقوع :

این معیار با نام « لاپلاس» « **Laplace**» مشهور بوده و فرض اساسی آن این است که احتمال وقوع کلیه متغیرهای غیر قابل کنترل با یکدیگر برابر می‌باشد، بدین ترتیب ارزش مورد انتظار استراتژی‌های موجود از یک مسئله محاسبه و بهترین آنها نشان دهنده مناسب‌ترین استراتژی جهت انتخاب خواهد بود.

در مثال فوق از آنجایی که با سه متغیر غیر قابل کنترل مواجه هستیم، پس احتمال رخداد هر کدام از آنها، بر اساس این معیار، برابر با $\frac{1}{3}$ می‌باشد، بنابراین :

ماتریس تصمیم‌گیری :

احتمال وقوع	1/3	1/3	1/3	ارزش مورد انتظار
Y_i / S_i	Y_1	Y_2	Y_3	
S_1	۸۰۰۰	۵۰۰۰	-۱۰۰۰	(8000 + 5000 – 1000) * 1/3 = 4000
S_2	۶۰۰۰	۴۰۰۰	-۵۰۰	(6000 + 4000 – 500) * 1/3 = 3167
S_3	۴۰۰۰	۲۰۰۰	۰	(4000 + 2000 + 0) * 1/3 = 2000
S_4	۳۰۰۰	۲۰۰۰	۱۵۰۰	(3000 + 2000 + 1500) * 1/3 = 2167

استراتژی S_1 تحت چنین شرایطی با بیشترین ارزش مورد انتظار، مناسب‌ترین راه‌حل است.

فصل هشتم...

تصمیم گیری در شرایط ریسک (از نوع مدل‌های قیاسی و احتمالی)

تصمیم گیری در شرایط ریسک (از نوع مدل‌های قیاسی و احتمالی)

مقدمه

تصمیم‌گیری در شرایط ریسک حالت دوم از تصمیم‌گیری تحت شرایط عدم اطمینان است. متغیرهای غیر قابل کنترل، تحت شرایط ریسک، از قوانین موجود برای توابع احتمالی گسسته یا پیوسته پیروی نموده و بنابراین می‌توان از معیارهای معتبر ریاضی برای تحیل آنها استفاده نمود.

در توابع احتمالی گسسته یا پیوسته، برای تحلیل، از داده‌های گذشته در مورد وقوع این متغیرها استفاده می‌شود. برای مدل‌سازی شرایط ریسک می‌توان، از مدل‌های قیاسی و احتمالی، یا از مدل‌های ریاضی و احتمالی و یا از مدل‌های شمایلی و احتمالی استفاده نمود.

در این مبحث به تشریح مدل‌های «قیاسی و احتمالی» و برخی از مدل‌های «ریاضی و احتمالی» تصمیم‌گیری در شرایط ریسک، مبادرت خواهیم نمود. مدل‌های قیاسی در این مرحله نیز بیشتر بر اساس استفاده از «ماتریس تصمیم‌گیری» استوار هستند. بدان معنی که این شرایط تصمیم‌گیری مانند حالت عدم اطمینان کامل، قابل تبدیل به معادلات ریاضی نیست.

تصمیم‌گیری در شرایط ریسک، با استفاده از مدل‌های قیاسی و احتمالی به سه دسته عمده تقسیم می‌گردد که عبارتند از:

۱) تصمیم‌گیری بدون استفاده از نمونه‌گیری
۲) تصمیم‌گیری با استفاده از نمونه‌گیری
۳) تصمیم‌گیری با استفاده از منحنی‌های آماری

الف) تصمیم‌گیری بدون استفاده از نمونه‌گیری :

داده‌های موجود برای تشکیل ماتریس تصمیم‌گیری در این شرایط از نوع تجربی و اولیه بوده و برای توسعه و دقیق‌تر کردن آنها از نمونه‌گیری استفاده نمی‌شود.

تصمیم‌گیری در این روش مستلزم طی سه مرحله است. ابتدا باید ماتریس تصمیم‌گیری را بر اساس شرایط مسئله تشکیل داده، سپس با استفاده از یک روش مناسب محاسبات مدل را انجام و در پایان اقدام به گرفتن تصمیم نمود. این مراحل را طی چند مثال دنبال خواهیم کرد.

مثال: داده‌های تجربی و اولیه زیر از فروش یک کالا طی ۱۰ هفته گذشته، در یک فروشگاه جمع‌آوری شده است:

احتمال فروش	فراوانی هفته‌های فروش	تقاضا – فروش
۰/۰۵	۵	۱۰
۰/۱	۱۰	۱۱
۰/۲	۲۰	۱۲
۰/۴	۴۰	۱۳
۰/۲	۲۰	۱۴
۰/۰۵	۵	۱۵
۱/۰	۱۰۰ هفته	–

چنانچه قیمت فروش هر واحد برابر با ۲۵، هزینه تمام شده خرید هر واحد برای فروشگاه برابر با ۱۵ و ارزش هر واحد باقیمانده در پایان هفته برابر با ۱۰ واحد پولی باشد (کالای مورد بحث قابلیت انبار شدن برای مدت بیش از یک هفته را ندارد یعنی موجودی تهیه شده در اول هر هفته، توسط فروشگاه باید طی همان هفته به فروش رود، در غیر این صورت ارزش هر واحد از موجودی باقیمانده برابر با ۱۰ واحد پولی خواهد بود).

مطلوب است تعیین مناسب‌ترین موجودی در اول هر هفته (یعنی مناسب‌ترین استراتژی) برای فروشگاه.

برای مدلسازی این مسئله از طریق تشکیل « ماتریس تصمیم‌گیری» هر یک از موجودی‌های ۱۰ الی ۱۵ واحد را در اول هر هفته به عنوان یک استراتژی (S_i) و هر یک از تقاضاهای ۱۰ الی ۱۵ واحد را طی هفته به عنوان یک متغیر غیر قابل کنترل (Y_i) در نظر خواهیم گرفت.

بنابراین به منظور مدلسازی برای این مسئله ابتدا باید «ماتریس تصمیم‌گیری» آن را تکمیل نماییم. این ماتریس در بسیاری از کتاب‌ها معروف به «ماتریس بازده شرطی» یا جدول دریافت است. زیرا هر عنصر از آن نشان دهنده منفعت حاصل از تصمیم‌گیری به شرط انتخاب یک استراتژی خاص در مقابل وقوع یک متغیر غیر قابل کنترل، خاص می‌باشد.

برای تشکیل این ماتریس خواهیم داشت :

بازده شرطی =

(P-C) موجودی ⇒ اگر موجودی ≥ تقاضا

(C-S) مازاد – (P- C) تقاضا ⇒ اگر موجودی < تقاضا

که در آن P قیمت فروش C بهای تمام شده یا قیمت خرید محصول و S ارزش باقیمانده محصول است. بدین ترتیب «ماتریس بازده شرطی» برای مسئله اخیر به قرار زیر خواهد بود :

ماتریس بازده شرطی :

به عنوان مثال برای بازده حاصل از تقاطع S_2 و Y_2 داریم :

۱۱۰ = (۲۵-۱۵)۱۱ = (P-C) موجودی = بازده ⇒ S_2 =۱۱ موجودی < Y_2 = ۱۲ تقاضا و یا برای بازده حاصل از تقاطع S_5 =۱۴ و Y_5=۱۴ خواهیم داشت :

۱۴۰ = (۲۵-۱۵)۱۴ = (P-C) موجودی = بازده⇒ S_5 = ۱۴ موجودی = Y_5 = ۱۴ تقاضا و همچنین برای بازده حاصل از تقاطع S_3 = ۱۳ و Y_1=۱۰ خواهیم داشت :

۸۵ = (۱۵-۱۰)۳ - (۱۰)۱۰ = (۱۵-۱۰)مازاد - (۲۵-۱۵)تقاضا = بازده ⇒ $Y_1 < S_4$ در ادامه برای ارزیابی این مدل از تصمیم‌گیری، چهار روش ارائه خواهد شد.

تقاضا طی هفته / موجودی اول هر هفته	Y_1=10	Y_2=11	Y_3=12	Y_4=13	Y_5=14	Y_6=15
S_1=10	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
S_2 =11	۹۵	۱۱۰	۱۱۰	۱۱۰	۱۱۰	۱۱۰
S_3=12	۹۰	۱۰۵	۱۲۰	۱۲۰	۱۲۰	۱۲۰
S_4=13	۸۵	۱۰۰	۱۱۵	۱۳۰	۱۳۰	۱۳
S_5=14	۸۰	۹۵	۱۱۰	۱۲۵	۱۴۰	۱۴۰
S_6=15	۷۵	۹۰	۱۰۵	۱۲۰	۱۳۵	۱۵۰

– روش ارزش پولی مورد انتظار : «Expected Monetary Vaiue (EMV) »

در این روش پس از مدلسازی برای یک مسئله از اصل ریاضی «ارزش مورد انتظار» برای ارزیابی استفاده می‌گردد و بر آن اساس مناسب‌ترین استراتژی برای حل مسئله از بین استراتژی‌های موجود انتخاب خواهد شد.

به منظور استفاده از این روش برای ارزیابی ماتریس بازده شرطی با توجه به احتمال تجربی حاصل از اطلاعات اولیه (P) ارزش مورد را برای هر استراتژی موجود در ماتریس محاسبه می‌نماییم.

ارزش مورد انتظار با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌گردد :

رابطه ۱: $EMV_{S_i} = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$

احتمال تقاضا	۰/۰۵	۰/۱۰	۰/۲۰	۰/۳۰	۰/۲۰	۰/۰۵	ارزش مورد انتظار هر استراتژی EMV_{S_i}
تقاضا / موجودی	Y_1=۱۰	Y_2=۱۱	Y_3=۱۲	Y_4=۱۳	Y_5=۱۴	Y_6=۱۵	
S_1=۱۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰(۰/۰۵) +۱۰۰(۰/۱۰) + ۱۰۰(۰/۲۰) +۱۰۰(۰/۴۰) + ۱۰۰(۰/۲۰)+۱۰۰(۰/۰۵) =۱۰۰
S_2 =۱۱	۹۵	۱۱۰	۱۱۰	۱۱۰	۱۱۰	۱۱۰	۹۵(۰/۰۵) +۱۱۰(۰/۱۰) + ۱۱۰(۰/۲۰) +۱۱۰(۰/۴۰) + ۱۱۰(۰/۲۰)+۱۱۰(۰/۰۵) =۱۰۹/۲۵
S_3=۱۲	۹۰	۱۰۵	۱۲۰	۱۲۰	۱۲۰	۱۲۰	۹۰(۰/۰۵) +۱۰۵(۰/۱۰) + ۱۲۰(۰/۲۰) +۱۲۰(۰/۴۰) + ۱۲۰(۰/۲۰)+۱۲۰(۰/۰۵) =۱۱۶/۵
S_4=۱۳	۸۵	۱۰۰	۱۱۵	۱۳۰	۱۳۰	۱۳	۸۵(۰/۰۵) +۱۰۰(۰/۱۰) + ۱۱۵(۰/۲۰) +۱۳۰(۰/۴۰) + ۱۳۰(۰/۲۰)+۱۳۰(۰/۰۵) =۱۲۱/۷۵
S_5=۱۴	۸۰	۹۵	۱۱۰	۱۲۵	۱۴۰	۱۴۰	۸۰(۰/۰۵) +۹۵(۰/۱۰) + ۱۱۰(۰/۲۰) +۱۲۵(۰/۴۰) + ۱۴۰(۰/۲۰)+۱۴۰(۰/۰۵) =۱۲۰/۵
S_6=۱۵	۷۵	۹۰	۱۰۵	۱۲۰	۱۳۵	۱۵۰	۷۵(۰/۰۵) +۹۰(۰/۱۰) + ۱۰۵(۰/۲۰) +۱۲۰(۰/۴۰) + ۱۳۵(۰/۲۰)+۱۵۰(۰/۰۵) =۱۱۶/۲۵

تصمیم‌گیری :

ملاحظه میگردد که استراتژی S_4 با استفاده از این روش دارای بیشترین ارزش مورد انتظار است (یعنی ۱۲۱/۷۵) و بنابراین به عنوان مناسب‌ترین استراتژی (یعنی موجودی ۱۳ واحد کالا در اول هر هفته) انتخاب می‌شود. بدین ترتیب میانگین بازده در هفته، به ازای انتخابS_4 برای یک دوره طولانی ۱۲۱/۷۵ واحد پولی خواهد بود و این متوسط از متوسط بازده دیگر استراتژی‌ها بیشتر است.

روش EMV : یکی از روش‌های معتبر ریاضی است و هر گونه تردیدی در مورد آن، مربوط به اعتبار محاسبه شده برای «ماتریس بازده شرطی» می‌باشد، زیرا این روش برای برخی از موارد ممکن است یک راه‌حل منطقی ارائه ندهد، اما این امر به علت نادرستی روش «ارزش مورد انتظار» نیست بلکه به آن علت است که مقادیر بازده موجود در ماتریس، مطلوبیت واقعی تصمیم گیرنده را نمی‌سنجند، بنابراین ابتدا باید «مطلوبیت »مقادیر موجود اندازه‌گیری و سپس از فرمول «ارزش مورد انتظار» که در آن صورت «مطلوبیت مورد انتظار» نامیده می‌شود، استفاده نمود.

در پایان بحث روش EMV لازم است که دو واژه دیگر EPC و EVPI را تشریح نماییم. EPC یعنی «بازده مورد انتظار تحت شرایط اطمینان» یا «بازده مورد انتظار با داشتن اطلاعات کامل» « Expected Profit under Certainty(EPC)»و عبارت است از بازده مورد انتظار حاصل از شرایطی که موجودی تهیه شده در اول هر هفته، برای مسئله مورد بحث، برابر با تقاضای ممکن در آن هفته باشد. پس EPC برای مسئله موجود، از محاسبه میانگین وزنی برای قطر اصلی (یعنی برای بیشترین بازده‌های ممکن در هر ستون) موجود در «ماتریس بازده شرطی» حاصل می‌گردد .

موجودی در اول هفته	بیشترین بازده ممکن (واحد پولی)	احتمال تقاضا از هر مقدار	X_iP_i
$S_1=10$	۱۰۰	$P(Y_1 = ۱۰) = ۰/۰۵$	۱۰۰(۰/۰۵)=۵
$S_2=11$	۱۱۰	$P(Y_2 = ۱۱) = ۰/۱۰$	۱۱۰(۰/۱۰)=۱۱
$S_3=12$	۱۲۰	$P(Y_3 = ۱۲) = ۰/۲۰$	۱۲۰(۰/۲۰)=۲۴
$S_4=13$	۱۳۰	$P(Y_4 = ۱۳) = ۰/۴۰$	۱۳۰(۰/۴۰)=۵۲
$S_5=14$	۱۴۰	$P(Y_5 = ۱۴) = ۰/۲۰$	۱۳۰(۰/۲۰)=۲۸
$S_6=15$	۱۵۰	$P(Y_6 = ۱۵) = ۰/۰۵$	۱۵۰(۰/۰۵)=۷۵
			EPC۱۲۷/۵

بدین ترتیب EPC یعنی بازده مورد انتظار در هفته چنانچه موجودی تهیه شده برای اول هر هفته برابر با تقاضا ممکن در آن هفته باشد، مساوی ۱۲۷/۵ واحد پولی خواهد بود، و این در صورتی امکان‌پذیر است که تصمیم-گیرنده از اطلاعات کامل برخوردار باشد. اما پیش‌بینی دقیق برای مقدار تقاضای ممکن در هر هفته مستلزم جمع‌آوری اطلاعات کامل و در نتیجه صرف هزینه اضافی خواهد بود این هزینه EVPI نامیده شده و عبارت است از «ارزش مورد انتظار حاصل از اطلاعات کامل» و بنابراین برابر با هزینه اضافی لازم برای جمع‌آوری آن خواهد بود. به منظور محاسبه EVPI می‌دانیم که $S_4=13$ مناسب‌ترین استراتژی و بازده مورد انتظار حاصل از آن برابر با ۱۲۱/۷۵ و همچنین EPC با استفاده از پیش‌بینی دقیق برای مقادیر تقاضا برابر ۱۲۷/۵ واحد پولی است. بنابراین خواهیم داشت :

رابطه ۲ : مناسب‌ترین استراتژی $EVPI = EPC - EMV$

(واحد پولی) $EVPI = EPC - EMVs_3 = ۱۲۷/۵ - ۱۲۱/۷۵ = ۵/۷۵$

بدان معنی که فروشگاه مذکور می‌توان تا ۵/۷۵ واحد پولی (نه بیشتر) صرف جمع‌آوری اطلاعات کامل‌تر برای پیش‌بینی مقادیر تقاضا بنماید.

ب) تصمیم‌گیری با استفاده از نمونه‌گیری :

یک تصمیم‌گیرنده در این شرایط از تصمیم‌گیری به داده‌های تجربی و اولیه موجود در مورد وقوع متغیرهای غیر قابل کنترل اکتفا ننموده، بلکه به منظور تجدید نظر و به روز درآوردن این داده‌ها از جمع‌آوری اطلاعات جدید و نمونه‌گیری استفاده می‌نماید.

بطوری که اطلاعات تجربی و اولیه موجود برای متغیر غیر قابل کنترل را در نظر گرفته، سپس به کمک نمونه-گیری و به توسط توزیع‌های احتمال (گسسته یا پیوسته) این داده‌ها را مورد ارزیابی قرار داده و در پایان به منظور تجدیدنظر در داده‌ها، توزیع احتمال اولیه را، با استفاده از قضیه بیز، به توزیع احتمال ثانویه به تبدیل خواهیم کرد.

پس از تعیین توزیع احتمال ثانویه برای متغیر غیر قابل کنترل موجود در این نوع تصمیم‌گیری، هر یک از روش-های EMV و EOL و با نقطه سربه‌سر را می‌توان برای ارزیابی مدل، مورد استفاده قرار داد. تصمیم‌گیری در این شرایط را طی چند مثال مورد تحلیل قرار خواهیم داد:

مثال : اطلاعات مربوط به درصد ضایعات تولیدی یک کارخانه، با استفاده از ۱۰۰ نمونه مختلف در گذشته، به صورت زیر خلاصه شده است :

نسبت ضایعات (h_i)	فراوانی مطلق	توزیع احتمال اولیه $P(h_i)$
٪۱=۰/۰۱	۳۰	۰/۳۰
٪۲=۰/۰۲	۲۳	۰/۲۳
٪۳=۰/۰۳	۱۵	۰/۱۵
٪۴=۰/۰۴	۱۰	۰/۱۰
٪۵=۰/۰۵	۷	۰/۰۷
٪۶=۰/۰۶	۵	۰/۰۵
٪۷=۰/۰۷	۴	۰/۰۴
٪۸=۰/۰۸	۳	۰/۰۳
٪۹=۰/۰۹	۲	۰/۰۲
٪۱۰=۰/۱۰	۱	۰/۰۱

به تازگی تغییراتی در خط تولید این کارخانه ایجاد شده است. به منظور بررسی تأثیر این تغییرات در سطح ضایعات، یک نمونه ۵۰ تایی از خط تولید انتخاب و ملاحظه شده که ۴ واحد کالا از این نمونه معیوب می‌باشد. آیا تغییرات جدید در خط تولید موجب تغییر در نسبت ضایعات تولیدی شده؟ این تغییر در چه جهت بوده است؟

حل : به منظور حل این مسئله باید از ادغام توزیع احتمال اولیه و نتیجه حاصل از نمونه‌گیری جدید (یعنی وجود ۴ معیوب از بین ۵۰ واحد انتخابی) یک توزیع احتمال ثانویه را برای نسبت ضایعات (h) محاسبه نماییم. این محاسبه بر اساس استفاده از فرمول «بیز» استوار است که تشریح آن را دنبال خواهیم کرد. **P(hi)** از توزیع احتمال اولیه در دست است، به منظور محاسبه احتمال شرطی (h_i/۴ معیوب) **P** باید از توزیع دوجمله‌ای استفاده شود، زیرا پدیده مورد بحث (تولید کالا) دو پیش‌آمدی است (یعنی کالای تولید شده یا سالم است و یا معیوب)، بنابراین (h_i / ۴ معیوب)**P** را باید برای هر سطح مشخصی از h_i به طور جداگانه محاسبه کرد.

به عنوان مثال برای $h_i = h_1 =$ ۰/۰۱ خواهیم داشت :

$$P(\text{۴ معیوب} / h_i) = C_{50}^{4} \ (۰/۰۱)^{۴} (۰/۹۹)^{۵۰-۲} = ۰/۰۰۱۵$$

و یا برای $h_i = h_2 =$ ۰/۰۲ نیز داریم :

$$P(\text{۴ معیوب} / h_i) = C_{50}^{4} \ (۰/۰۲)^{۴} (۰/۹۸)^{۵۰-۲} = ۰/۰۱۴۶$$

و به همین ترتیب برای $h_i = h_{10} =$ ۰/۱۰ :

$$P(\text{۴ معیوب} / h_i) = C_{50}^{4} \ (۰/۱۰)^{۴} (۰/۹۰)^{۵۰-۲} = ۰/۱۸۰۹$$

احتمال مشترک از حاصل‌ضرب توزیع احتمال اولیه در احتمال شرطی محاسبه شده و احتمال نهایی با احتمال غیر شرطی نتایج نمونه‌گیری (یعنی مخرج کسر فرمول بیز) از جمع کلی این احتمال‌های مشترک حاصل می-گردد. احتمال ثانویه برای هر نسبت مشخصی از ضایعات، بر اساس فرمول بیز، از تقسیم احتمال مشترک موجود برای آن نسبت از ضایعات، بر احتمال اساس فرمول بیز، از تقسیم احتمال مشترک موجود برای آن نسبت از ضایعات، بر احتمال نهایی محاسبه شده، حاصل خواهد شد. جدول صفحه زیر نتیجه این محاسبات را نشان می دهد.

نتیجه : ملاحظه می‌شود که احتمال وقوع برای نسبت‌های مختلف از ضایعات تولیدی در بیشتر موارد دارای افزایش است. بنابراین اثر تغییرات در خط تولیدی منفی است و وقوع ضایعات را در مجموع افزایش داده است.

جدول تجدیدنظر در احتمال‌های اولیه:

مقایسه احتمال‌های اولیه و ثانیه	توزیع احتمال ثانویه $\frac{\text{احتمال مشترک}}{\text{احتما. نهاد.}}$	احتمال مشترک $P(h_i)\times P(\text{معیوب۴}/h_i)$	احتمال شرطی $P(\text{معیوب۴}/h_i)$	توزیع احتمال اولیه $P(h_i)$	نسبت ضایعات (h_i)
کاهش	$\frac{0.00045}{0.05762}=0.0078$	۰/۳۰(۰/۰۰۱۵)=۰/۰۰۰۴۵	۰/۰۰۱۵	۰/۳۰	۰/۰۱
کاهش	۰/۰۵۸۳	۰/۲۳(۰/۰۱۴۶)=۰/۰۰۳۳۶	۰/۰۱۴۶	۰/۲۳	۰/۰۲
کاهش	۰/۱۱۹۸	۰/۱۵(۰/۰۴۶۰)=۰/۰۰۶۹۰	۰/۰۴۶۰	۰/۱۵	۰/۰۳
افزایش	۰/۱۵۶۴	۰/۱۰(۰/۰۹۰۱)=۰/۰۰۹۰۱	۰/۰۹۰۱	۰/۱۰	۰/۰۴
افزایش	۰/۱۶۵۲	۰/۰۷(۰/۱۳۶۰)=۰/۰۰۹۵۲	۰/۱۳۶۰	۰/۰۷	۰/۰۵
افزایش	۰/۱۵۰۳	۰/۰۵(۰/۱۷۳۳)=۰/۰۰۸۶۶	۰/۱۷۴۳	۰/۰۵	۰/۰۶
افزایش	۰/۱۳۶۲	۰/۰۴(۰/۱۹۶۳)=۰/۰۰۷۸۵	۰/۱۹۶۳	۰/۰۴	۰/۰۷
افزایش	۰/۱۰۶۰	۰/۰۳(۰/۲۰۳۷)=۰/۰۰۶۱۱	۰/۲۰۳۷	۰/۰۳	۰/۰۸
افزایش	۰/۰۶۸۶	۰/۰۲(۰/۱۹۷۴)=۰/۰۰۳۹۵	۰/۱۹۷۴	۰/۰۲	۰/۰۹
افزایش	۰/۰۳۱۴	۰/۰۱(۰/۱۸۰۹)=۰/۰۰۱۸۱	۰/۱۸۰۹	۰/۰۱	۰/۱۰
–	۰/۱	۰/۰۵۷۶۲ = احتما ل نهایی	–	۱/۰۰	–

ج) تصمیم گیری با استفاده از منحنی‌های آماری :

در این شرایط از تصمیم‌گیری، به جای استفاده از احتمال‌های تجربی و گسسته برای وقوع متغیرهای غیر قابل کنترل می‌توان از منحنی‌های مشخص آماری استفاده نمود.

منحنی‌های آماری ممکن است ناپیوسته (مانند منحنی توزیع پیرآسون) یا پیوسته (مانند منحنی توزیع نرمال) باشند.

استفاده از این نوع تصمیم گیری به ویژه برای مواقعی که دامنه تغییرات یک متغیر غیر قابل کنترل پیوسته می-باشد بسیار مفید است برای این منظور می توان از مننحی توزیع نرمال با ویژگی‌های خاص مربوط به آن استفاده نمود. اگر توزیع متغیر غیر قابل کنترل، پیوسته و نرمال فرض شود در این صورت هزینه های مورد انتظار عبارتند از :

فرصت از دست رفته شرطی = K_u و ضرر شرطی = K_u

بدین ترتیب مناسب‌ترین استراتژی که موجب حداقل شدن کل هزینه‌های مورد انتظار می‌شود از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$P(D) = \frac{K_u}{K_u + K_o}$$ رابطه ۳:

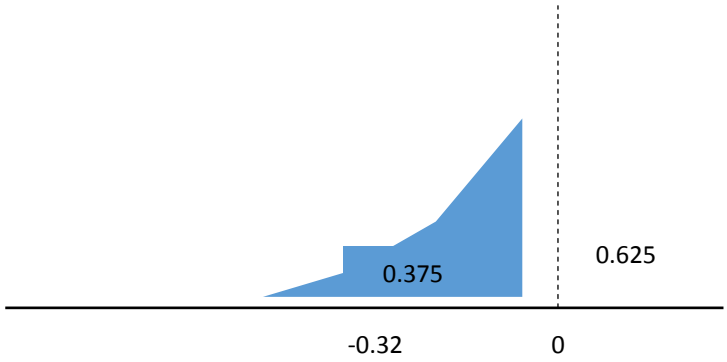
به عبارت بهتر، تصمیم بهینه راه‌حلی است که احتمال آن بیشتر از P(D) باشد بدین ترتیب، ارزش D را به ازای مساحت بدست آمده از رابطه فوق، با استفاده از جدول نرمال استاندارد Z مشخص خواهیم کرد. بر اساس فرمول موجود برای محاسبه Z خواهیم داشت :

$$Z = \frac{X-\mu}{\delta} \quad \text{یا} \quad X = Z\delta + \mu$$

مثال : پیش‌بینی می‌شود که تقاضا برای یک محصول خاص از توزیع نرمال یا میانگین ۱۵۰ واحد و انحراف معیار ۱۸ واحد تبعیت کند. سود هر واحد ۲۵ هزار ریال و زیان ناشی از مازاد تقاضا برای هر واحد ۱۵ هزار ریال برآورد شده است. سطح موجودی بهینه چه میزان خواهد بود ؟

$$\left.\begin{matrix} K_u = 25000 \\ K_o = 15000 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P(D) = \frac{25000}{25000+15000} = 0.625$$

اکنون ارزش Z را برای مساحت ۰/۶۲۵ با استفاده از جدول نرمال استاندارد محاسبه می‌نماییم.



$$P(Z \geq D) = 0.625 \Rightarrow 1 - P(Z < D) = 0.625 \Rightarrow P\,(Z < D) = 0.375$$

در نتیجه با استفاده معکوس از جدول توزیع نرمال استاندارد ۰/۳۲- = D خواهد شد.

اکنون با استفاده از فرمول Z خواهیم داشت :

$$Z = \frac{X-\mu}{\delta} = \frac{X-150}{18} = -0.32 \Rightarrow X = 18\,(-0.32) + 150 = 144.24 \approx 144$$ واحد

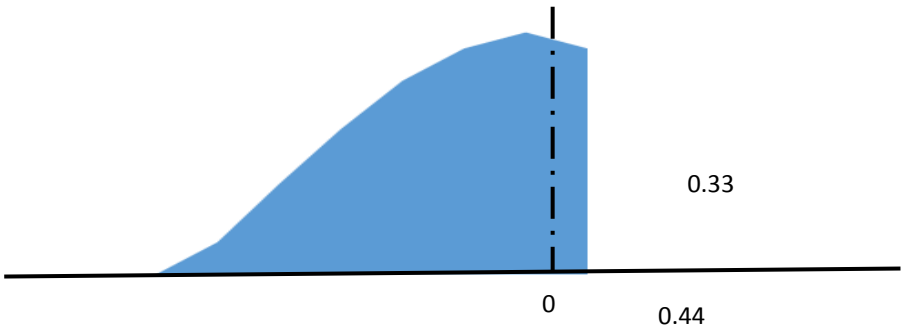
بدین ترتیب سطح موجودی بهینه ۱۴۴ واحد کالا خواهد بود.

مثال : در مثال قبل اگر روند تغییرات حاصل از فروش کالای موردنظر برای فروشگاه از یک توزیع نرمال با میانگین ۱۴/۵ و انحراف معیار ۱/۸ واحد کالا پیروی کند، مناسب‌ترین سطح موجودی را محاسبه کنید.

حل : از حل مثال قبلی می‌دانیم که

$$P > \frac{ML}{MP+ML} = \frac{5}{10+5} \Rightarrow P > 0.33$$

بنابراین ارزش Z را برای مساحت ۰/۳۳ با استفاده از جدول نرمال استاندارد محاسبه می‌نماییم.



$$P(Z \geq D) = 0.33 \Rightarrow 1 - P(Z < D) = 0.33 \Rightarrow P\,(Z < D) = 0.67$$

در نتیجه با استفاده معکوس از جدول توزیع نرمال استاندارد ۰/۴۴= D می‌باشد. اکنون با استفاده از فرمول Z خواهیم داشت :

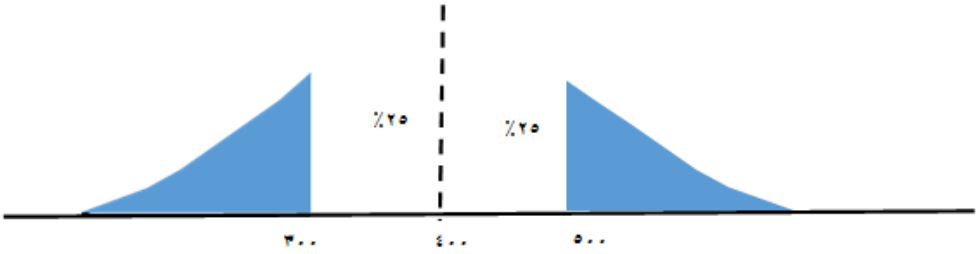
$$Z = \frac{X-\mu}{\delta} = \frac{X-14.5}{1.8} = 0.44 \Rightarrow X = 15.292 \approx 15$$

بنابراین مناسب‌ترین سطح موجودی برای فروشگاه ۱۵ واحد کالا در اول هفته است.

تذکر : در بسیاری از مواقع ممکن است انحراف معیار توزیع مشخص نباشد، در این صورت باید آن را از طریق یک نمونه اولیه تخمین بزنیم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال : پیش‌بینی می‌شود که میانگین فروش برای یک محصول خاص ۴۰۰ واحد بوده و به احتمال ۵۰٪ شانس فروش بین ۳۰۰ و ۵۰۰ واحد باشد. اگر سود هر واحد ۷ و زیان مازاد هر واحد ۱۰ واحد فرض شود، سطح بهینه موجودی را پیدا کنید.

حل : ابتدا ارزش Z را برای مساحت ۰/۲۵ با استفاده از جدول نرمال بدست می‌آوریم :



بر اساس فرمول Z خواهیم داشت :

$$\frac{300-400}{\delta} = Z_{0.25} \Rightarrow \frac{-100}{\delta} = -0.68 \Rightarrow \delta = \frac{-100}{-0.68} \approx 147$$

روش دیگر برای یافتن انحراف معیار به شرح زیر است :

$$P(Z > D) = 1 - P(Z \leq D) = \%25 \Rightarrow P(D) = \%75 \Rightarrow D = 0.68$$

یا $P(Z \leq -D) = \%25 \Rightarrow -D = -0.68 \Rightarrow \frac{300-400}{\delta} = \frac{-100}{\delta} = -0.68 \Rightarrow \delta = \frac{-100}{-0.68} \approx 147$

$$P(D) = \frac{K_u}{K_u + K_O} = \frac{7}{7+10} = 0.4118$$

اکنون ارزش Z با برای مساحت ۰/۴۱۱۸ با استفاده از جدول نرمال استاندارد بدست می‌آوریم.

$$P(Z \geq D) = 0.4118 \Rightarrow 1 - P(Z < D) = 0.4118 \Rightarrow P(Z < D) = 0.5882$$

در نتیجه با استفاده معکوس از جدول توزیع نرمال استاندارد ۰/۲۳ ≈ D می‌باشد.

حال با استفاده از فرمول Z خواهیم داشت :

$$Z = \frac{X - 400}{147} = 0..23 \Rightarrow X - 400 = 33.81 \Rightarrow X = 400 + 33.81 \approx 434$$

بدین ترتیب سطح بهینه موجودی ۴۳۴ واحد کالا است.

* محاسبه ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل (EVPI) در تصمیم‌گیری به کمک توزیع نرمال وقتی توزیع تقاضا (D) نرمال باشد، هزینه‌های مورد انتظار مازاد و کمبود به شرح زیر خواهند بود:

رابطه ۴: $K_O^* = K_O \delta [Z + L(Z)]$ رابطه ۵ : $k_U^* = K_U \delta L(Z)$

فصل نهم...

تصمیم گیری شاخه‌ای

(تصمیم‌گیری در شرایط ریسک از نوع مدل‌های شمایلی و احتمالی)

تصمیم گیری شاخه‌ای (تصمیم‌گیری در شرایط ریسک از نوع مدل‌های شمایلی و احتمالی)

مقدمه

تصمیم‌گیری در شرایط ریسک از نوع مدل‌های شمایلی زمانی کاربرد می‌یابد که مدل‌سازی تصمیم با استفاده از مدل‌های ریاضی امکان‌پذیر نباشد. بدین ترتیب مجبور به تبدیل شرایط با ماتریس تصمیم‌گیری به پدیده‌ای شبیه به موقعیت تصمیم‌گیری هستیم. مدل‌های شمایلی، مدل‌هایی هستند که شبیه به پدیده مورد بررسی بوده و در تشکیل آنها سعی بر آن است که بیشتر مشخصات پدیده در مدل گنجانده شود. تشکیل این مدل‌ها بسیار پر هزینه و گنجانیدن زمان در آنها مشکل است.

کلیه شبکه‌های موجود در علم پژوهش عملیاتی نظیر شبکه‌های «سی‌پی‌ام» **"cpm"** را می‌توان نوعی از مدل-های شمایلی دانست. یک نوع خاص از مدل‌های شمایلی و احتمالی «درخت تصمیم» « **Decision tree** » بوده که نمایشی از مراحل فرآیند تصمیم‌گیری است. در این مدل، راه‌حل‌ها یا استراتژی‌ها به عنوان شاخه‌های درخت و انتهای هر شاخه نمایش نتایج استراتژی‌هایی بوده که ممکن است دوباره شاخه شاخه شود. هزینه‌ها و احتمال-های وقوع رویدادها نیز به درخت اضافه شده و جهت تصمیم‌گیری، اطلاعات به هم پیوسته درخت هرس می-شوند. نام‌گذاری این مدل به «درخت تصمیم» به علت شباهت آن با شکل درخت می‌باشد. به این نوع تصمیم-گیری که مخصوص تصمیم‌های چند مرحله‌ای، پیشرفته و پیچیده می‌باشد، «تصمیم‌گیری شاخه‌ای» گویند. البته از این مدل برای تصمیم‌گیری یک مرحله‌ای نیز می‌توان استفاده نمود که در ادامه به شرح هر کدام خواهیم پرداخت.

درخت تصمیم

یکی از شیوه‌هایی که برای تحلیل تصمیم‌گیری‌های چند مرحله‌ای بکار می‌رود، درخت تصمیم است. در این روش، مسئله مورد نظر به طور منظم و با طی مراحل پشت سر هم تحلیل می‌شود.

برای استفاده از این شیوه، تصمیم گیرنده باید «گزینه‌های ممکن را مشخص، وقایع و نتایج احتمالی از انتخاب هر یک از گزینه‌ها را تعیین، احتمال وقوع هر یک از نتایج را برآورد، سپس ارزش مورد انتظار هر یک از گزینه‌ها را محاسبه و مطلوب‌ترین گزینه را مشخص نماید.

طی کردن این مراحل در شیوه درخت تصمیم، کار تصمیم‌گیری را ساده و روشن می‌سازد، و حتی اگر این شیوه بطور کامل مورد استفاده قرار نگیرد، انجام همین مراحل کمک بزرگی به تصمیم گیرنده می‌باشد.

از این شیوه تصمیم‌گیری می‌توان برای اغلب تصمیم‌ها استفاده کرد، ولی در تصمیم‌های چند مرحله‌ای که کار تصمیم‌گیری وابسته به گرفتن مجموعه‌ای از «تصمیم‌های پشت سرهم» است، این شیوه روش بسیار مفید و مؤثری بوده و نسبت به ماتریس تصمیم‌گیری ابزار نیرومندتری به حساب می‌آید مراحل اصلی در شیوه درخت تصمیم به قرار زیر است:

۱. کشیدن درخت تصمیم شامل

الف) مشخص کردن تمامی تصمیم‌ها و راه‌حل‌های ممکن.

ب) مشخص کردن وقایع یا نتایج احتمالی هر تصمیم

ج) کشیدن شمایی مانند درخت که نشان دهنده توالی تصمیم‌های و نتایج حاصل از آنها می‌باشد.

در رسم درخت تصمیم، نماد □ بیانگر نقطه تصمیم است که در آن یکی از استراتژی‌ها (راه حل‌ها) باید انتخاب شود و نماد ○ بیانگر گره حوادث است که در این هنگام یکی از متغیرهای غیر قابل کنترل (حالت‌های مختلف طبیعت) به وقوع می‌پیوندد.

۲. برآورد شامل

الف) برآورد احتمال وقوع نتایج هر یک از انتخاب‌ها.

ب) برآورد پیآمدهای مالی هر یک از نتایج (به عنوان یک معیار)

۳. ارزیابی و انتخاب شامل

الف) احتساب ارزش مورد انتظار نتایج احتمالی.

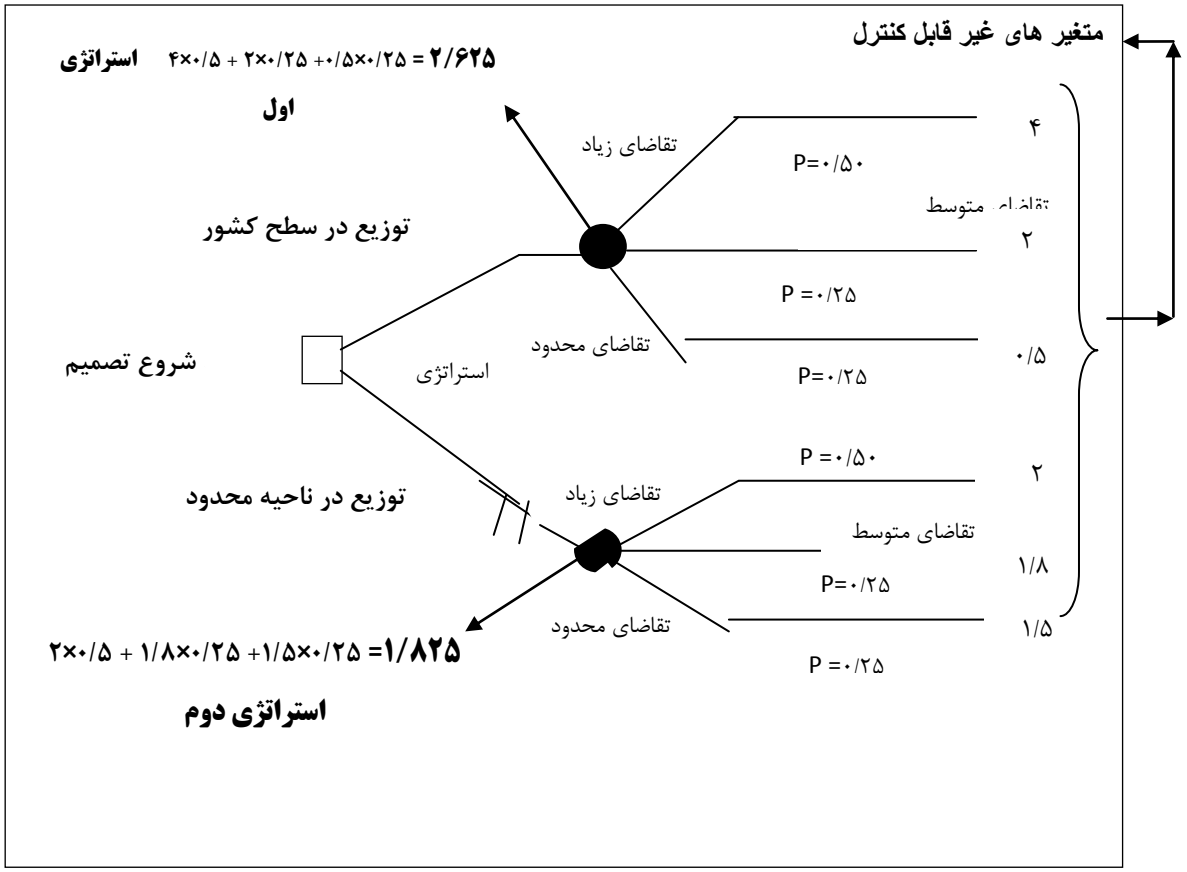
ب) انتخاب نتیجه‌ای که ارزش مورد انتظار قابل قبول‌تری دارد.

شروع درخت، نقطه شروع تصمیم‌گیری توسط تصمیم گیرنده است، شاخه‌های منشعب از درخت، حوادث و یا به عبارت دیگر متغیرهای غیر قابل کنترلی هستند که خود می‌توانند منشعب به نقاط تصمیم‌گیری یا حوادث دیگر شوند . و بالاخره هر انشعاب نهایی منتهی به نتیجه خاصی می‌گردد که این نتیجه در حقیقت درجه خاصی از حصول به هدف تصمیم با تصمیم‌های پشت سر هم است. در بیشتر موارد، از مفاهیم بازده، مطلوبیت و زیان شرطی به عنوان نتایج تصمیم، در این مدل استفاده می‌شود. مکانیزم، « محاسبه ارزش مورد انتظار» در درخت تصمیم بر اساس روش «برگشت به عقب» می‌باشد.

مثال : یک شرکت تولیدی برای توزیع کالای تولیدی خود دارای دو استراتژی و سه متغیر غیر قابل کنترل با داده‌های نوشته شده در جدول زیر است (ارقام به میلیون واحد پولی) :

احتمال وقوع هر متغیر غیر قابل کنترل		۰/۵	۰/۲۵	۰/۲۵
استراتژی	متغیر غیرقابل کنترل	تقاضای زیاد	تقاضای متوسط	تقاضای محدود
سود توزیع کالا در سطح کشور		۴	۲	۰/۵
سود توزیع کالا در یک ناحیه محدود		۲	۱/۸	۱/۵

« درخت تصمیم » در این مثال به صورت شکل زیر رسم می گردد.



درخت تصمیم مثال فوق برای یک تصمیم‌گیری یک مرحله‌ای

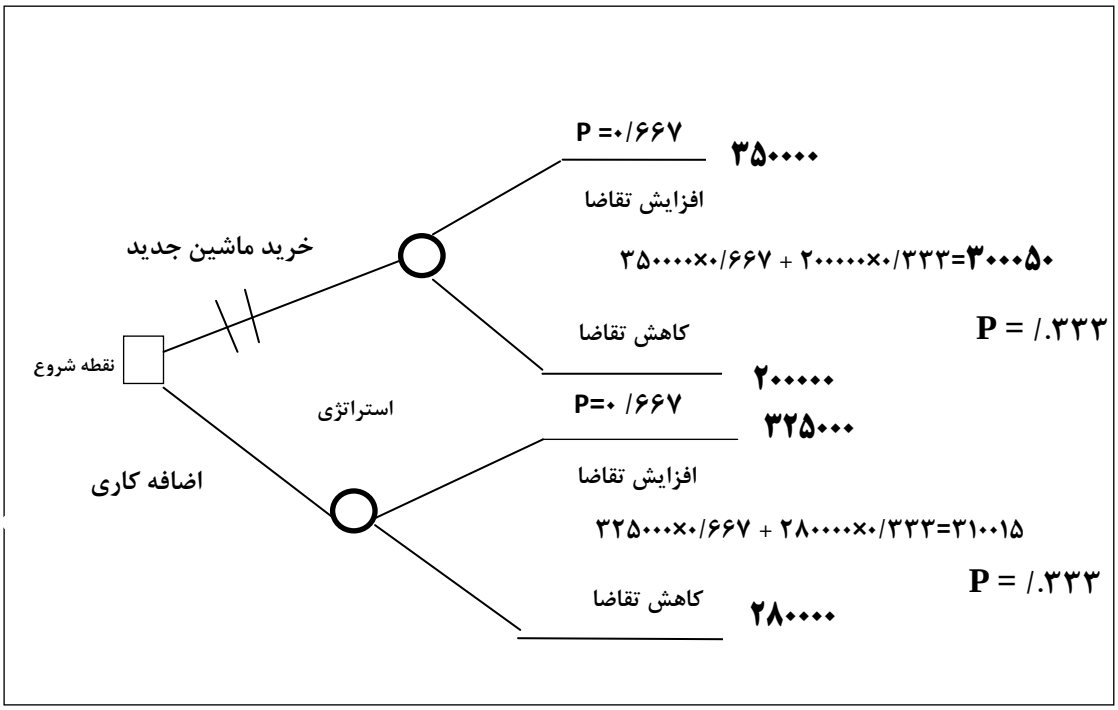
تصمیم‌گیری: سود مورد انتظار برای استراتژی یکم برابر با ۲/۶۲۵ میلیون و برای استراتژی دوم برابر با ۱/۸۲۵ میلیون واحد پولی می‌باشد. پس مناسب‌ترین استراتژی توزیع کالا در سطح کشور است.

مثال : شرکت A دارای تعدادی ماشین خودکار است که در حد ظرفیت کامل کار می‌کنند به تازگی تقاضا برای تولیدات شرکت افزایش یافته و در نتیجه مدیر شرکت در نظر دارد به منظور مقابله با موقعیت جدید، استراتژی خرید یک دستگاه ماشین خودکار جدید را با استراتژی درخواست از کارگران برای اضافه‌کاری مورد مقایسه قرار دهد.

شواهد کافی وجود دارد که با احتمال ۰/۶۶۷ تقاضا برای تولیدات به اندازه ۲۵٪ طی یک سال افزایش یابد ولی با احتمال۰/۳۳۳ امکان کاهش تقاضا به اندازه ۵٪ نیز وجود دارد.

تجزیه تحلیل دقیق نشان داده است که با ۲۵٪ افزایش در میزان تقاضا مقدار فروش در صورت خرید یک ماشین جدید برابر ۳۵۰۰۰۰ افزایش در میزان تقاضا مقدار فروش در صورت خرید یک ماشین جدید برابر ۳۵۰۰۰۰ واحد پولی و در صورت اضافه کاری کارگران برابر با ۳۲۵۰۰۰ واحد پولی خواهد بود. از طرف دیگر نیز با ۵٪ کاهش در میزان تقاضا مقدار فروش در صورت خرید یک ماشین جدید برابر با ۲۰۰۰۰۰ واحد پولی و یا انتخاب استراتژی اضافه‌کاری کارگران برابر با ۲۸۰۰۰۰ واحد پولی می‌گردد بنابراین خواهیم داشت:

محاسبه



درخت تصمیم مثال فوق – انتخاب خرید ماشین جدید یا اضافه‌کاری کارگران (در یک‌سال)

تصمیم‌گیری: ملاحظه می‌شود که فروش مورد انتظار به هنگام انتخاب استراتژی اضافه کاری برابر با ۳۱۰۰۱۵ واحد پولی و برای استراتژی خرید یک ماشین جدید برابر با ۳۰۰۰۵۰ واحد پولی می‌باشد از این رو مدیر شرکت مزبور باید از اضافه کاری کارگران برای سال آینده استفاده نماید.

منابع :

۱. پژوهش عملیاتی ، برنامه ریزی خطی و کاربرد های آن – دکتر محمد رضا مهرگان

۲. پژوهش عملیاتی – دکتر محمد مشهدی زاده

۳. پژوهش عملیاتی – دکتر عادل آذر

۴. تحقیق در عملیات – کانون فرهنگی آموزشی

۵. تحقیق در عملیات – فرادرس

۶. پژوهش عملیاتی – سنجش و دانش

۷. پژوهش عملیاتی (مدل های احتمالی) – دکترمنصور مومنی

۸. مبانی نوین تحقیق در عملیات – دکتر منصور مومنی

۹. پژوهش عملیاتی پیشرفته – دکتر محمد رضا مهرگان

۱۰. مفاهیم و نکات پژوهش عملیاتی – دکتر محمد رضا مهرگان

۱۱. جزوات دانشگاهی آقایان دکتر حیدری ، دکتر جاویدنیا ،دکتر سعیدی ،دکتر غلامی عزیزی