



باسم تعالی

سیستم های کنترل کلاسیک

بیژن معاونی

(استادیار دانشگاه علم و صنعت ایران)

پاییز ۸۹-۹۰



باسم تعالی

سیستم های کنترل کلاسیک

Lecture 1

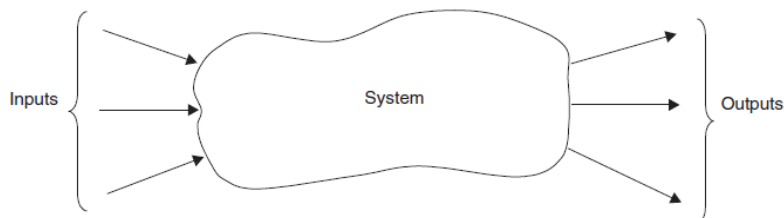
مقدمه

تئوری کنترل

- تئوری کنترل یک شاخه میانی از علم است مابین مهندسی و ریاضات.
- کنترل:
مجموعه ای از اجزا و سیستم ها که در کنار یکدیگر قرار می گیرند به منظور دست یافتن به رفتار مطلوب.
- سیستم:
سیستم برای افراد مختلف می تواند نماد یا تعریف های متفاوتی داشته باشد.
مانند: اتومبیل، ماشین لباسشویی، ماشین CNC و ...

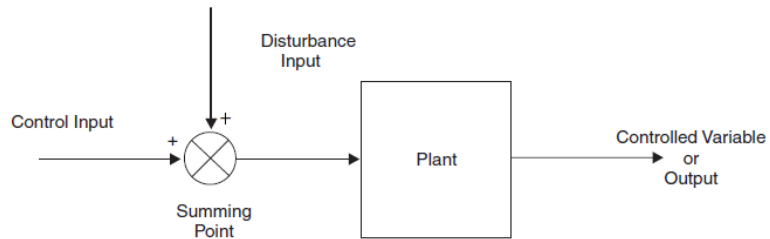
سیستم

- ولیکن تمامی سیستم ها دارای مشترکاتی در تعریف هستند:
 - سیستم ها دارای ورودی هستند
 - سیستم ها دارای خروجی هستند که با تغییر در ورودی ها می توانند تغییر کنند.
 - سیستم های میتوانند بیش از یک ورودی و/یا بیش از یک خروجی باشند.



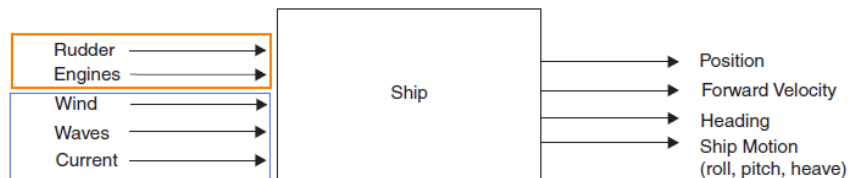
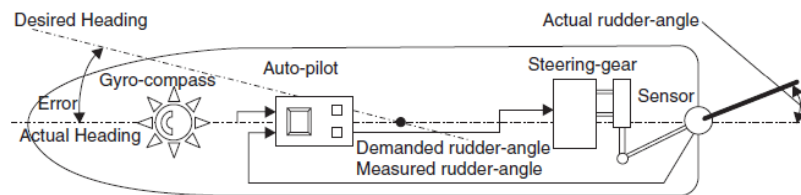
کنترل و لزوم شناخت سیستم

- خروجی سیستم در اثر تغییر در ورودی تغییر می یابد که به آن **پاسخ سیستم** گویند.
- مهندسی کنترل می کوشد تا با **مدل سازی سیستم** پاسخ خروجی سیستم را نسبت به ورودی های مختلف تخمین بزند.
- انواع ورودی:
 - ورودی کنترل
 - ورودی های اغتشاش



5

مثالی از یک سیستم

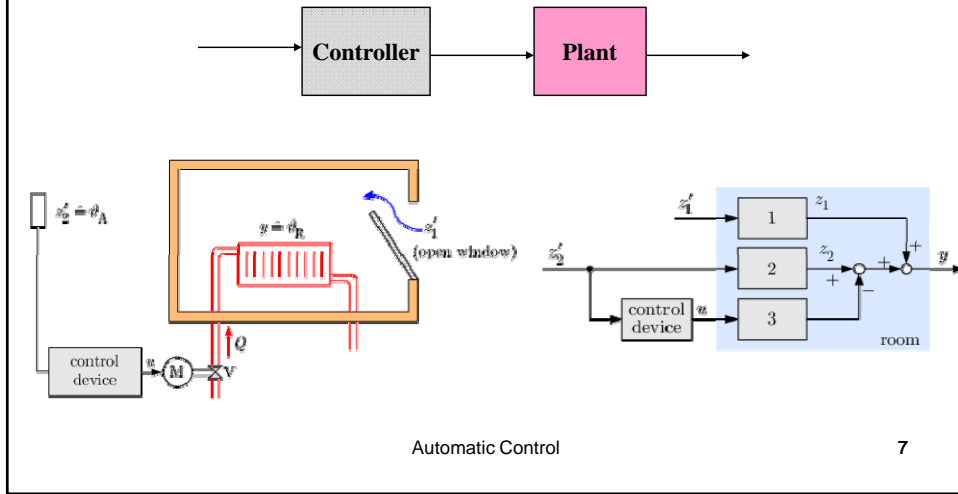


Automatic Control

6

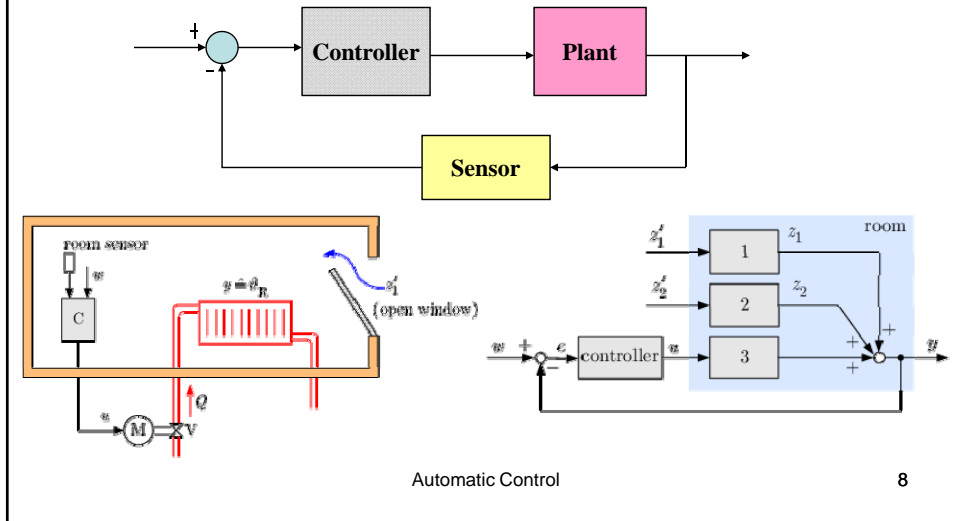
سیستم کنترل حلقه باز

- سیستم کنترل حلقه باز (Open loop Control)



سیستم کنترل حلقه بسته

- سیستم کنترل حلقه بسته (Closed loop Control)



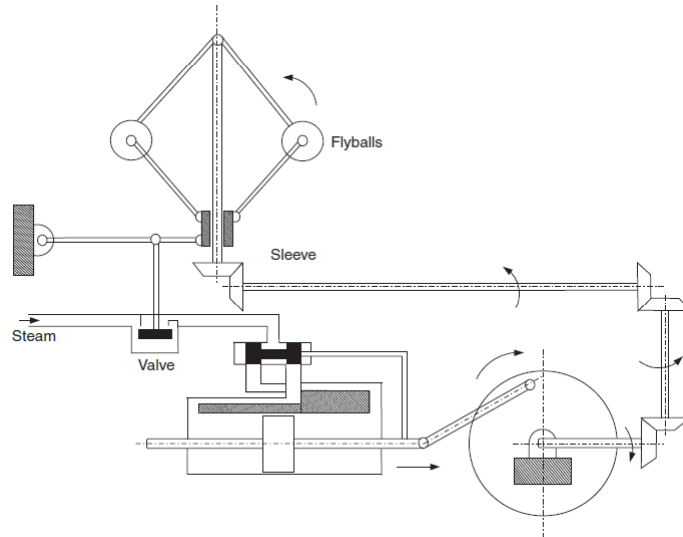
نتایج مد نظر از درس کنترل اتوماتیک

- در درس کنترل اتوماتیک هدف دست یافتن به موارد زیر است:
 - مدل سازی و توصیف سیستم های خطی
 - تحلیل دینامیک سیستم های خطی
 - تحلیل اثر حضور فیدبک در سیستم های کنترل حلقه بسته
 - طراحی کنترل کننده

تاریخچه کنترل

- 1642-1754
 - The work of I. Newton (1642-1727) and G.W. Leibniz (1646-1716), the brothers Bernoulli (late 1600's and early 1700's), J. F. Riccati (1676-1754) led to the discovery of the infinitesimal calculus which in turn helped the development of differential equations theory. ([26])
- 1736-1865
 - J. L. Lagrange (1736-1813) and W. R. Hamilton (1805-1865) established the use of differential equations in analyzing the motion of dynamical systems. ([26])
- 1868
 - J. C. Maxwell analyzed the stability of **Watt's flyball governor**. ([26])
- 1877
 - **E. J. Routh** provided a numerical technique for determining when a characteristic equation has stable roots. ([193])
 - I. I. Vishnegradsky analyzed the stability of regulators using differential equations independently of Maxwell. ([194])
- 1892
 - A. M. Lyapunov studied the **stability** of nonlinear differential equations using a generalized notion of energy. ([1], [26])

گاورنر جیمز وات



11

تاریخچه کنترل

- 1892-1898
 - O. Heaviside invented operational calculus and studied the transient behavior of systems, introducing a notion equivalent to that of the transfer function. ([\[26\]](#))
- 1893
 - A. B. Stodola studied the regulation of a water turbine using the techniques of Vishnegradsky. ([\[26\]](#))
- 1895
 - A. Hurwitz solved independently the problem of determining the stability of the characteristic equation. ([\[195\]](#))
- 1920-1939
 - P. S. de Laplace (1749—1827), J. Fourier (1768—1830), A.L. Cauchy (1789—1857) developed the frequency domain approaches at Bell Telephone Laboratories, and explored and used these in communication systems. ([\[26\]](#))

Automatic Control

12

تاریخچه کنترل

- 1927
 - H. S. Black demonstrated the usefulness of **negative feedback**. ([196])
- 1932
 - H. Nyquist developed Regeneration Theory for the design of stable amplifiers and derived his Nyquist Stability Criterion based on the polar plot of a complex function. ([197])
- 1938
 - H.W. Bode used the magnitude and phase frequency response plot of a complex function and investigated closed-loop stability using the notions of phase and gain margin. ([198])
- 1945-1955
 - The first textbooks on **Control Theory** appeared which discussed straightforward design tools and provided great insight and guaranteed solutions to design problems. ([204], [205], [206], [207], [208])
- 1947
 - N. B. Nichols developed his Nichols chart for the design of feedback systems. ([26], [201])
- 1948
 - W. R. Evans presented his **root locus** technique, which provided a direct way to determine the closed-loop pole locations in the s-plane. ([202])

سرفصل درس کنترل اتوماتیک

کنترل اتوماتیک

کد درس : ۵۳
تعداد واحد : ۲
نوع واحد : نظری
پیشنیاز : ارتعاشات مکانیکی
سرفصل دروس : (۳۴ ساعت)

۱- تعریف و طبقه‌بندی سیستمها، مدل ریاضی سیستمها، دیاگرامهای بلوکی، کلیاتی در مورد فیدبک و اثرات آن.

۲- پاسخ زمانی سیستمها، حالت گذرا و ماندگار، مشخصات حالت گذرا (جهش، زمان، شکست...) و حالت ماندگار (خطای ماندگار)، بررسی اثر کنترل‌کننده‌ها بر مشخصات حالت گذرا و ماندگار سیستم.

۳- پایداری، روش راث - هورویتز (Routh-Hurwitz)

۴- روش مکان هندسی ریشه‌ها (root Locus)

۵- پاسخ فرکانسی سیستمها، روشهای نمایش پاسخ فرکانسی، بررسی پایداری سیستمها در میدان فرکانس (روش نایکوئیست)، مشخصات پاسخ فرکانسی (حد فاز و بهره، ماکزیمم تشدید و...)

۶- تنظیم کنترل‌کننده‌ها و وضوح جبران‌کننده‌ها برای بهبود کار سیستمهای کنترل.

سرفصل درس کنترل اتوماتیک

- ۱- مقدمه
- ۲- مدل سازی سیستم های خطی
- ۳- تابع تبدیل، نمودار بلوکی و نمودار گذر سیگنال
- ۴- بررسی اثر فیدبک و مشخصات رفتاری سیستم در حوزه زمان
- ۵- تحلیل پایداری با استفاده از روش Routh_Hurwitz
- ۶- تحلیل پایداری با استفاده از مکان هندسی ریشه ها
- ۷- تحلیل پایداری با استفاده از روش نایکوئیست
- ۸- پاسخ فرکانسی و استفاده از تحلیل Bode
- ۹- طراحی جبران ساز ها در حوزه فرکانس
- ۱۰- طراحی کنترل کننده در حوزه فرکانس

ارزیابی

ارزیابی دوره:

- کوئیز (۶ نمره)
 - فصل ۱، ۲ (انتهای فصل دوم)
 - فصل ۴ (انتهای فصل چهارم)
 - فصل ۶ (انتهای فصل ششم)
- تمرین (۲ نمره)
 - (مهلت تحویل: یک هفته بعد از اتمام هر فصل)
- پروژه در طول ترم و پایان ترم (۵ نمره)، (استفاده از نرم افزار MATLAB الزامی است).
- پایان ترم (۷ نمره)

مراجع

- "سیستم های کنترل"، بنجامین کو، ترجمه علی کافی
- **"Modern Control Systems", R. C. Dorf**
- "سیستم های کنترل خطی"، دکتر علی خاکی صدیق، انتشارات دانشگاه پیام نور
- "کنترل"، اگاتا، ترجمه علی کافی



بسمه تعالی

سیستم های کنترل کلاسیک

Lecture 2

مدل سازی سیستم های خطی

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

1

توصیف مدل دینامیکی

- سیستم های کنترل
 - سیستم های کنترل مبتنی بر مدل
 - سیستم های کنترل مبتنی مبتنی بر داده های ورودی-خروجی
- مدل سیستم
 - مدل ریاضی
 - مدل مستخرج از اطلاعات ورودی-خروجی
 - » مدل مستخرج از شناسایی کلاسیک
 - » مدل مستخرج از روشهای هوشمند
- مدل ریاضی
 - تابع تبدیل
 - مدل فضای حالت

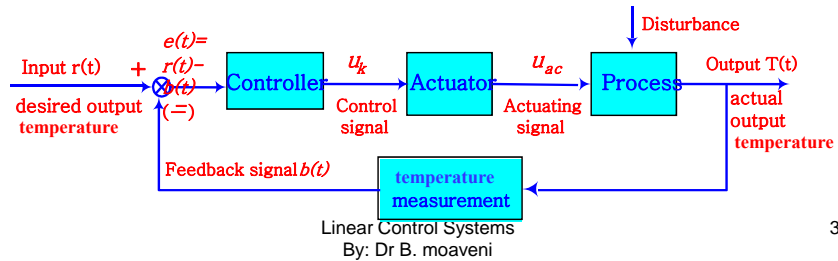
Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

2

توصیف مدل دینامیکی

- نیاز به توصیف ریاضی سیستم ها:
 - امکان توصیف و تحلیل ویژگی های سیستم
 - امکان بهره برداری از دستاورد های حوزه ریاضیات به منظور تحلیل و طراحی سیستم کنترل

مثال: نحوه محاسبه u_k به منظور دست یافتن به خروجی مطلوب



3

توصیف مدل دینامیکی

- توصیف ریاضی سیستم چیست؟
 - توصیف ارتباط دینامیکی (معادلات دیفرانسیل (ریاضی)) متغیرهای داخلی سیستم.

- دست یافتن به مدل سیستم
 - نوشتن معادلات فیزیکی و مدل سازی تئوری
 - روش ها تجربی
 - مدل ها مستخرج از اطلاعات ورودی-خروجی
 - » مدل مستخرج از شناسایی کلاسیک
 - » مدل مستخرج از روشهای هوشمند

- ارزیابی مدل

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

4

توصیف مدل دینامیکی

• انواع مدل های توصیف دینامیکی سیستم

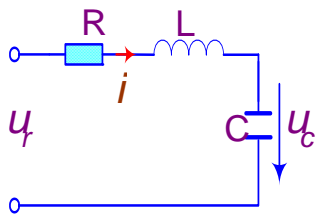
- معادلات دیفرانسیل
- توابع تبدیل
- بلوک دیاگرام ها
- معادلات فضای حالت
- مدل های توصیفی (Descriptor)
- مدل های هوشمند

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

5

توصیف مدل دینامیکی - معادلات دیفرانسیل

مثال:



define: input $\rightarrow u_r$
output $\rightarrow u_c$

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u_c = u_r \quad i = C \frac{du_c}{dt}$$

$$\Downarrow$$

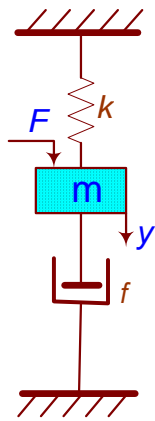
$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$$

$$\text{make: } RC = T_1 \quad \frac{L}{R} = T_2 \Rightarrow T_1 T_2 \frac{d^2 u_c}{dt^2} + T_1 \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

6

توصیف مدل دینامیکی - معادلات دیفرانسیل



Define: input $\rightarrow F$
output $\rightarrow y$

مثال:

$$F - ky - f \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = F$$

If we make : $\frac{f}{k} = T_1, \quad \frac{m}{f} = T_2$

we have : $T_1 T_2 \frac{d^2y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y = \frac{1}{k} F$

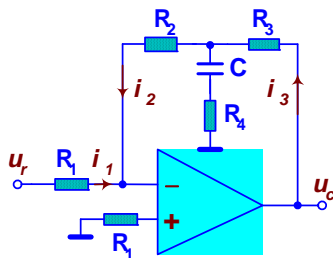
دو سیستم مثال های دارای عملکرد مشابه هستند:

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

7

$u_c \rightarrow y; u_r \rightarrow F$

توصیف مدل دینامیکی - معادلات دیفرانسیل



مثال:

Input $\rightarrow u_r$ output $\rightarrow u_c$

$$u_c = R_3 i_3 + \frac{1}{C} \int (i_3 - i_2) dt + R_4 (i_3 - i_2) \dots (1)$$

$$i_2 = -i_1 = -\frac{u_r}{R_1} \dots (2)$$

$$i_3 = \frac{1}{R_3} (u_c - R_2 i_2) \dots (3)$$

$$(2) \rightarrow (3); (2) \rightarrow (1); (3) \rightarrow (1): R_4 C \frac{du_c}{dt} + u_c = -\frac{R_2 + R_3}{R_1} \left[\left(\frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + R_4 \right) C \frac{du_r}{dt} + u_r \right]$$

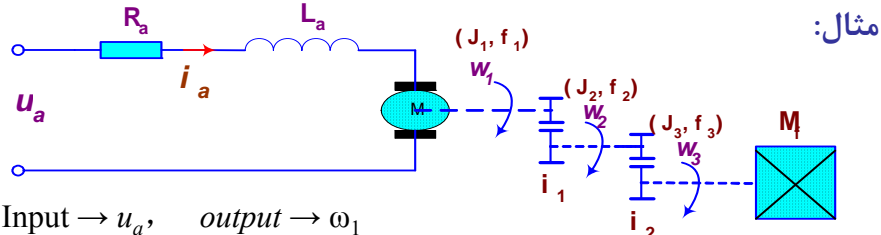
make : $R_4 C = T; \quad \frac{R_2 + R_3}{R_1} = k; \quad \left(\frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + R_4 \right) C = \tau$

we have : $T \frac{du_c}{dt} + u_c = -k \int \frac{du_r}{dt} dt + u_r$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

8

توصیف مدل دینامیکی - معادلات دیفرانسیل



Input $\rightarrow u_a$, output $\rightarrow \omega_1$

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + E_a = u_a \dots (1) \quad (4) \rightarrow (2) \rightarrow (1) \text{ and } (3) \rightarrow (1):$$

$$M = C_m i_a \dots (2) \quad \frac{L_a \bar{J}}{C_e C_m} \ddot{\omega}_1 + \left(\frac{L_a \bar{f}}{C_e C_m} + \frac{R_a \bar{J}}{C_e C_m} \right) \dot{\omega}_1 + \left(\frac{R_a \bar{f}}{C_e C_m} + 1 \right) \omega_1$$

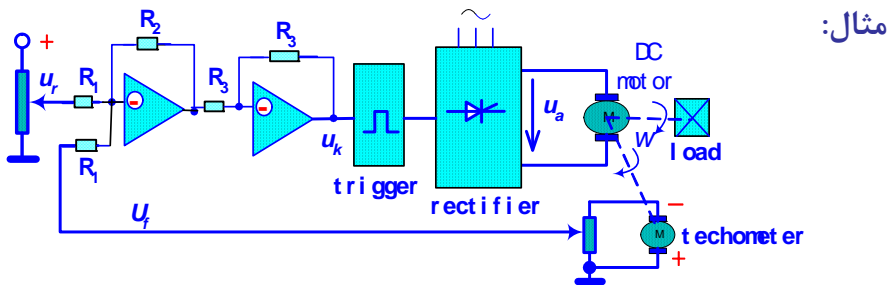
$$E_a = C_e \omega_1 \dots (3)$$

$$M - \bar{M} = \bar{J} \frac{d\omega_1}{dt} + \bar{f} \omega_1 \dots (4) \quad = \frac{1}{C_e} u_a - \frac{L_a}{C_e C_m} \dot{\bar{M}} - \frac{R_a}{C_e C_m} \bar{M}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

9

توصیف مدل دینامیکی - معادلات دیفرانسیل



Input $\rightarrow u_r$, Output $\rightarrow \omega$; neglect the friction:

$$u_k = \frac{R_2}{R_1} (u_r - u_f) = k_1 (u_r - u_f) \dots (1)$$

$$u_f = \alpha \omega \dots (2) \quad u_a = k_2 u_k \dots (3)$$

$$T_e T_m \frac{d^2 \omega}{dt^2} + T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{C_e} u_r - \frac{1}{C_e T_m} (T_e T_m \dot{\bar{M}} + T_m \bar{M}) \dots (4)$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

10

توصیف مدل دینامیکی - تابع تبدیل

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y = b_0 r^{(m)} + b_1 r^{(m-1)} + b_2 r^{(m-2)} + \dots + b_{m-1} r^{(1)} + b_m r \dots n \geq m$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}, \quad \text{if } r(t) = \delta(t) \Rightarrow R(s) = 1$$

$$2\ddot{c}(t) + 3\dot{c}(t) + 4c(t) = 5\dot{r}(t) + 6r(t)$$

↓

$$2s^2 C(s) + 3sC(s) + 4C(s) = 5sR(s) + 6R(s)$$

↓

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5s + 6}{2s^2 + 3s + 4}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

11

نمایش فضای حالت

- نمایش فضای حالت سیستم غیر خطی متغیر با زمان:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t), t) \\ y = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

- نمایش فضای حالت سیستم غیر خطی:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t)) \\ y = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

- نمایش فضای حالت سیستم غیر خطی نسبت به ورودی خطی (Affine):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y = h(x(t)) \end{cases}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

12

نمایش فضای حالت

- نمایش فضای حالت سیستم خطی متغیر با زمان (LTV):

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

- نمایش فضای حالت سیستم خطی نامتغیر با زمان (LTI):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

خطی سازی سیستم های غیر خطی

- لزوم خطی سازی:

- سیستم های واقعی غیر خطی هستند.
- خطی سازی حول نقطه کار (یا نقطه تعادل) می تواند تقریب مناسبی از رفتار سیستم غیر خطی را حول این نقطه ارائه نماید.
- سیستم های کنترل خطی امکان کنترل سیستم های غیر خطی حول نقطه کار (یا نقطه تعادل) را دارا هستند.
- سیستم های کنترل خطی دارای مقاومت بیشتری در مقابل نامعینی ها هستند و ایجاد امکان استفاده از این کنترل کننده ها با خطی سازی فراهم می گردد.

خطی سازی سیستم های غیر خطی

• نقطه تعادل:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u = 0) = 0 \Rightarrow x_{eq.p.} = x(t)$$

• نقطه کار:

– نقطه کار ناشی از حضور یک ورودی:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t) = \hat{u}) = 0 \Rightarrow x_{op.p.} = x(t)$$

– نقطه کار معرفی شده توسط طراح:

$$x_{op.p.} = x_0$$

خطی سازی سیستم های غیر خطی

خطی سازی با استفاده از بسط سری تیلور تابع تحلیلی:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \Big|_{x_0} (x - x_0)^n$$

$$\longrightarrow f(\mathbf{x}(t)) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{x_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + H.O.T.$$

$$\downarrow$$
$$[J_x]_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$$

خطی سازی سیستم های غیر خطی

خطی سازی با استفاده از بسط سری تیلور تابع تحلیلی:

$$x(t) = x_0 + \Delta x \quad u(t) = u_0 + \Delta u$$



$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0(t) + \Delta \dot{x}(t) = f(x_0(t), u_0(t), t) + J_x[x_0(t), u_0(t), t] \Delta x(t) + J_u[x_0(t), u_0(t), t] \Delta u(t)$$



$$\Delta \dot{x}(t) = J_x[x_0(t), u_0(t), t] \Delta x(t) + J_u[x_0(t), u_0(t), t] \Delta u(t)$$

$$\Delta \dot{x}(t) = A(t) \Delta x(t) + B(t) \Delta u(t)$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

17

خطی سازی سیستم های غیر خطی

بطور مشابه برای معادله خروجی:

$$\Delta y(t) = g_x[x_0(t), u_0(t), t] \Delta x(t) + g_u[x_0(t), u_0(t), t] \Delta u(t)$$



$$\Delta y(t) = C(t) \Delta x(t) + D(t) \Delta u(t)$$

و برای یک سیستم نامتغیر با زمان:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

18

خطی سازی سیستم های غیر خطی

مثال:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^2(t) - \sin(3x_2(t)) + u_1^3(t) - u_2(t) = f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) + x_1(t)e^{-x_2(t)} - u_1(t) = f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{cases}$$

Assumptions: $\begin{cases} x_{op.p.} = 0 \\ \hat{u} = 0 \end{cases}$

$$J_x[.] = \begin{bmatrix} 2x_1 & -3\cos(3x_2) \\ e^{-x_2} & 1 - x_1e^{-x_2} \end{bmatrix} \quad J_u[.] = \begin{bmatrix} 3u_1^2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \dot{\mathbf{X}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

19

مدل سازی سیستم ها

مدل سازی سیستم های مکانیکی:

- مدل سازی بر اساس قوانین نیوتن
- مدل سازی بر اساس قوانین اولر-لاگرانژ
- ...

روش اولر-لاگرانژ:

۱- انتخاب متغیرهای مستقل $q_i = \begin{pmatrix} x_i \\ \theta_i \end{pmatrix}$

۲- محاسبه مجموعه انرژی های جنبشی (T) و پتانسیل (P) و تعریف لاگرانژین (L=T-V).

۳- مشخص نمودن نیروهای خارجی. $Q_i = \begin{pmatrix} F_i \\ \tau_i \end{pmatrix}$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad -۴$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

20

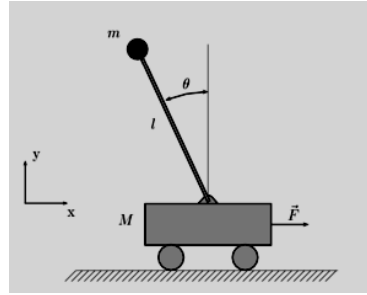
مدل سازی سیستم ها

مثال:

$$q = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

$$\begin{cases} \bar{x} = x + l \sin(\theta) \\ \bar{y} = l \cos(\theta) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \dot{x} + l\dot{\theta} \cos(\theta) \\ \dot{\bar{y}} = -l\dot{\theta} \sin(\theta) \end{cases}$$



$$\longrightarrow v^2 = \dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2 = l^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x} \cos(\theta)$$

$$\implies T = \frac{1}{2}m\{l^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x} \cos(\theta)\} + \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

$$P = mgl \cos(\theta)$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

21

مدل سازی سیستم ها

$$L = T - P = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + ml\dot{\theta}\dot{x} \cos(\theta) + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - mgl \cos(\theta)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F \longrightarrow (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) = F$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \longrightarrow ml^2\ddot{\theta} + ml\dot{x} \cos(\theta) + mgl \sin(\theta) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_3 = \theta \\ x_4 = \dot{\theta} \end{cases} \longrightarrow \dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, u)$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

22

مثال: جستجوگر ژيروسکوپ آزاد

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{I_r \cos x_3} (T_z + I_R \omega_s x_4)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{I_r} (T_y - I_R \omega_s x_2 \cos x_3)$$

استفاده از نرم افزار MATLAB به منظور خطی سازی.

- Trim
- Linmod



باستفاد

سیستم های کنترل کلاسیک

Lecture 3

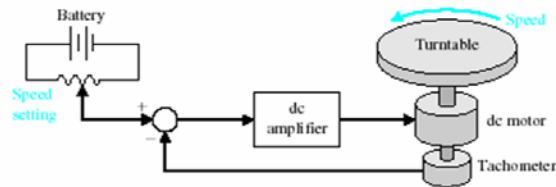
نمودار بلوکی، نمودار گذر سیگنال

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

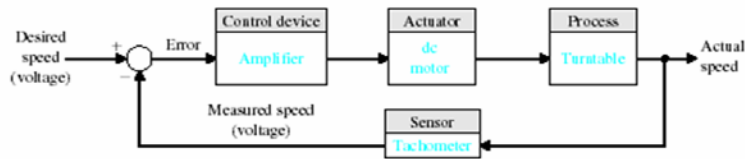
1

توصیف مدل دینامیکی

• توصیف سیستم به صورت دیاگرام بلوکی



(a)

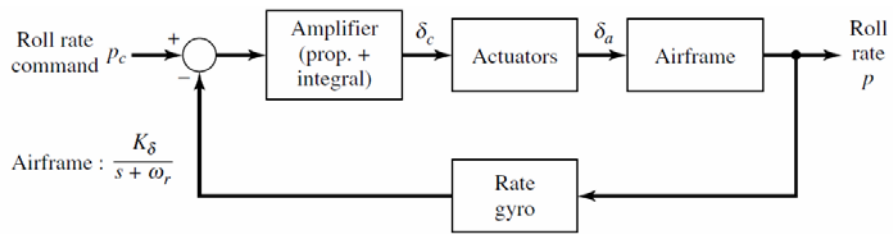


(b)

By: Dr B. moaveni

توصیف مدل دینامیکی

- مزایای توصیف سیستم به صورت بلوک دیاگرام:
 - امکان توصیف اجزا تشکیل دهنده سیستم
 - امکان بررسی و تحلیل ارتباط زیر سیستم ها و تعامل ما بین آنها
 - امکان بیان معادلات در جهت دست یافتن به حل آنها

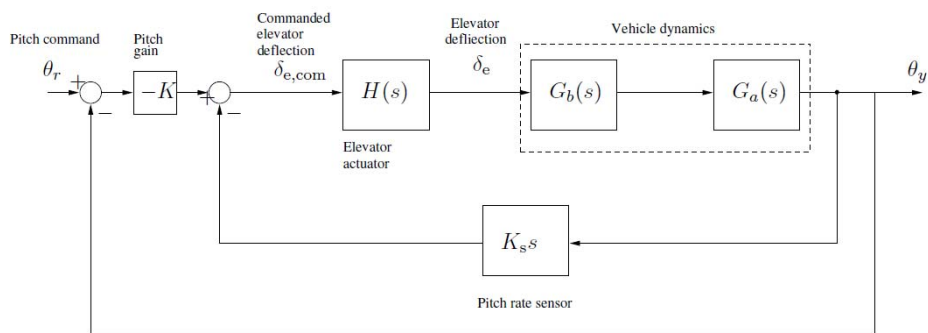


Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

3

توصیف مدل دینامیکی

مثال



$$G(s) = G_a(s)G_b(s) = \frac{-0.125}{s^2 + 0.226s + 0.0169} \frac{s + 0.435}{s + 1.23}$$

$$H(s) = \frac{2}{s + 2} \quad K_s = 1$$

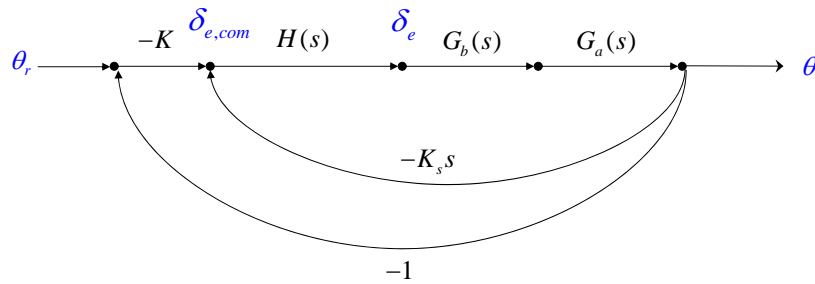
$$K = 15$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

4

Signal Flow Graph

دامه مثال: (نمودار گذر سیگنال)



Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

5

Mason Method

Given an SFG with N forward paths and K loops, the gain between the input node y_{in} and output node y_{out} is [3]

مثال

$$M = \frac{y_{out}}{y_{in}} = \sum_{k=1}^N \frac{M_k \Delta_k}{\Delta} \quad (3-54)$$

where

y_{in} = input-node variable

y_{out} = output-node variable

M = gain between y_{in} and y_{out}

N = total number of forward paths between y_{in} and y_{out}

M_k = gain of the k th forward paths between y_{in} and y_{out}

$$\Delta = 1 - \sum_i L_{i1} + \sum_j L_{j2} - \sum_k L_{k3} + \dots \quad (3-55)$$

L_{mr} = gain product of the m th ($m = i, j, k, \dots$) possible combination of r non-touching loops ($1 \leq r \leq K$).

or

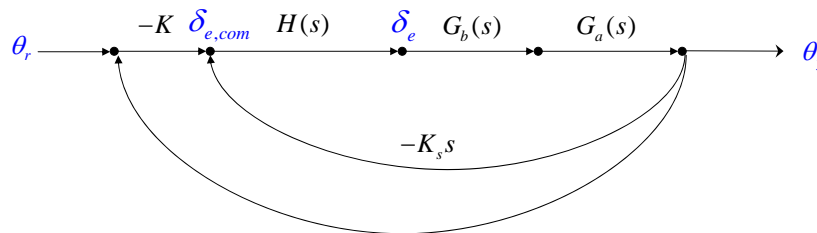
$\Delta = 1 -$ (sum of the gains of **all individual** loops) $+$ (sum of products of gains of all possible combinations of **two** nontouching loops) $-$ (sum of products of gains of all possible combinations of **three** nontouching loops) $+$ \dots

Δ_k = the Δ for that part of the SFG that is nontouching with the k th forward path.

6

Signal Flow Graph

ادامه مثال: (نمودار گذر سیگنال)



$$M_1 = -KH(s)G_a(s)G_b(s) \leftrightarrow \Delta_1 = 1 \quad -1$$

$$l_1 = -K_s s H(s)G_a(s)G_b(s)$$

$$l_2 = KH(s)G_a(s)G_b(s)$$

$$\Delta = 1 - l_1 - l_2$$

$$\Rightarrow \frac{\theta_y}{\theta_r} = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{-KH(s)G_a(s)G_b(s)}{1 + K_s s H(s)G_a(s)G_b(s) - KH(s)G_a(s)G_b(s)}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

7

استفاده از MATLAB

دستورات مرتبط MATLAB:

mfile	Simulink
tf	linmod
parallel	
series	
feedback	
minreal	

: example1.m

$$G_{cl.m} = \frac{3.75s + 1.631}{s^4 + 3.456s^3 + 2.957s^2 + 4.252s + 1.673}$$

$$G_{cl.Sm} = \frac{3.75s + 1.631}{s^4 + 3.456s^3 + 3.207s^2 + 4.361s + 1.673}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

8

تأثير فيدبك

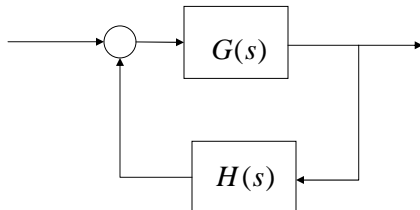
اثرات فيدبك مناسب:

- کاهش حساسيت
- بهبود حالت گذرا
- کاهش اثر نویز
- کاهش اثر اغتشاش
- کاهش دامنه خطا

تأثير فيدبك - کاهش حساسيت

حساسيت (Sensitivity):

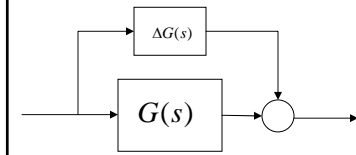
نسبت درصد تغييرات تابع تبديل كل سيستم به درصد تغييرات يك
زير سيستم يا يك پارامتر



$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)}$$

$$S_G^T = \frac{\frac{\partial T}{T}}{\frac{\partial G}{G}} = \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T} = M(s)$$

تأثير فيدبك - کاهش حساسيت



سیستم حلقه باز:

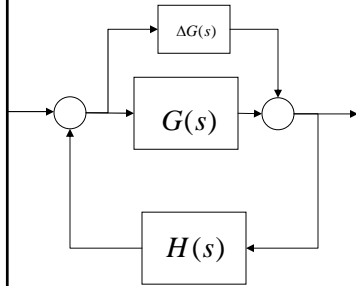
$$y(s) + \Delta y(s) = (G(s) + \Delta G(s)) \cdot R(s)$$

↓

$$\Delta y(s) = \Delta G(s) \cdot R(s)$$

$$T_o(s) = G(s) \Rightarrow S_G^T = 1$$

سیستم حلقه بسته:



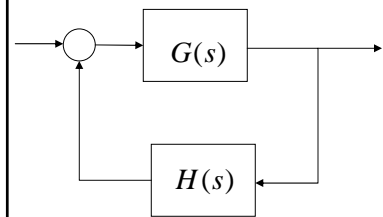
$$y(s) + \Delta y(s) = \frac{(G(s) + \Delta G(s))}{1 + H(s)(G(s) + \Delta G(s))} \cdot R(s)$$

$$\Delta y(s) = \frac{\Delta G(s)}{(1 + H(s)(G(s) + \Delta G(s)))(1 + H(s)G(s))} \cdot R(s)$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

11

تأثير فيدبك - کاهش حساسيت



سیستم حلقه بسته:

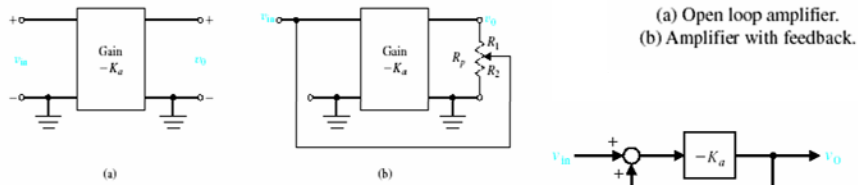
$$G(s) \rightarrow \Delta G(s) \Rightarrow \Delta y(s) = \frac{\Delta G(s)}{(1 + H(s)G(s))^2} \cdot R(s)$$

$$S_G^{T_{cl}} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

12

تأثير فیدبک - کاهش حساسیت



Open loop

$$v_o = -K_a v_{in}$$

$$T = -K_a$$

$$S_{K_a}^T = 1$$

Closed loop

$$\beta = \frac{R_2}{R_1} \quad R_p = R_1 + R_2$$

$$T = \frac{-K_a}{1 + K_a \beta} \quad S_{K_a}^T = \frac{1}{1 + K_a \beta}$$

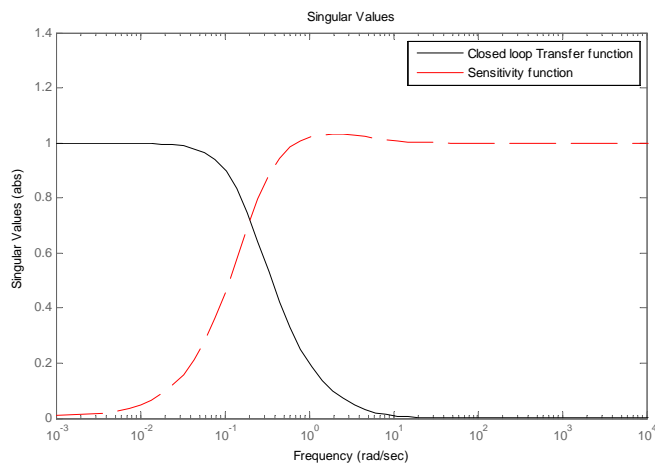
If K_a is large, the sensitivity is low.

$$K_a := 10^4 \quad \beta := 0.1 \quad S_{K_a}^T = \frac{1}{1 + 10^3} = 9.99 \times 10^{-4}$$

تأثير فیدبک - کاهش حساسیت

بررسی تابع حساسیت در حوزه فرکانس:

$$G(s) = \frac{2500}{s(s+5)(s+2500)}$$

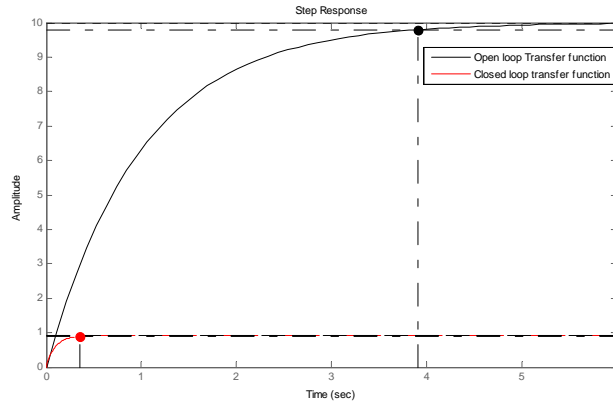


4

تأثير فيدبك - بهبود پاسخ حالت گذرا

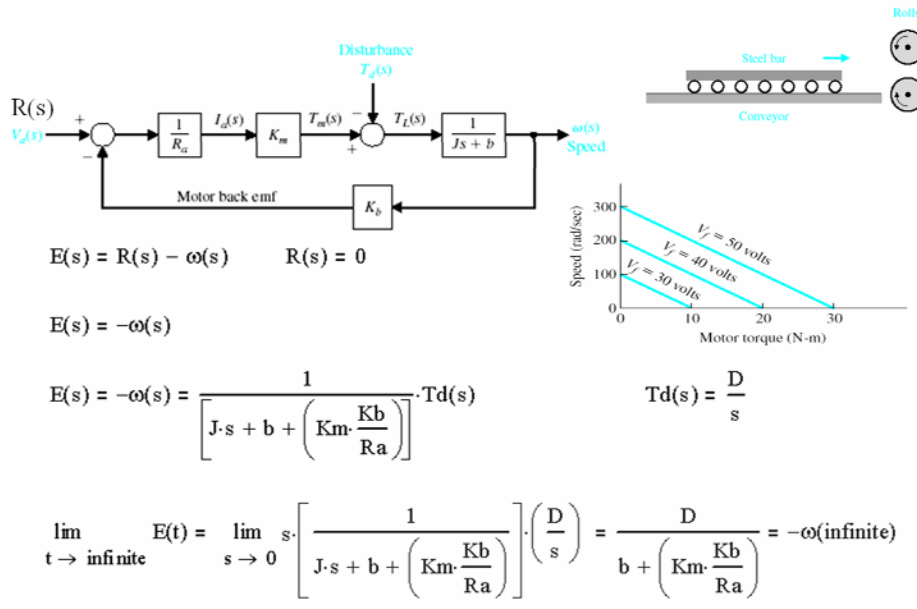
بهبود پاسخ حالت گذرا:

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \quad T_{cl}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{k}{\tau s + k + 1} = \frac{\frac{k}{k+1}}{\frac{\tau}{k+1} s + 1}$$

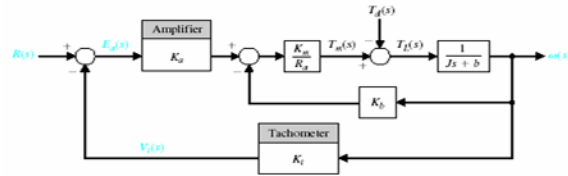


15

تأثير فيدبك - کاهش اثر اغتشاش



تأثير فيدبك - کاهش اثر اغتشاش



$$G1(s) = K_a \cdot \frac{K_m}{R_a}$$

$$G2(s) = \frac{1}{(J \cdot s + b)}$$

$$H(s) = K_t + \frac{K_b}{K_a}$$

$$E(s) = -\omega(s) = \frac{G(s)}{1 + G1(s) \cdot G2(s) \cdot H(s)} \cdot T_d(s)$$

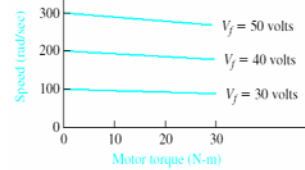
$$G1G2H(s) > 1$$

$$E(s) = \frac{1}{G1(s) \cdot H(s)} \cdot T_d(s)$$

If $G1(s)H(s)$ very large the effect of the disturbance can be minimized

$$G1(s)H(s) = \frac{K_a \cdot K_m}{R_a} \left(K_t + \frac{K_b}{K_a} \right) \text{ approximately } \frac{K_a \cdot K_m \cdot K_t}{R_a} \text{ since } K_a \gg K_b$$

Strive to maintain K_a large and $R_a < 2$ ohms



تأثير فيدبك - کاهش اثر اغتشاش

مثال:

Example 4:

$$J = 5$$

$$b = 1.2$$

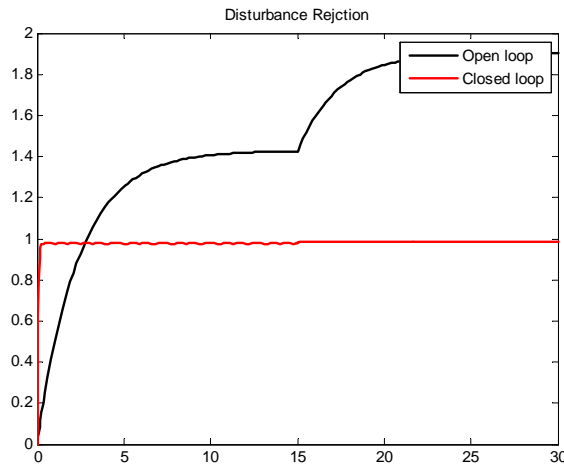
$$k_m = 3$$

$$R_a = 1$$

$$k_b = 0.3$$

$$k_t = 1$$

$$k_a = 30$$



Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

18

تأثیر فیدبک - کاهش خطای حالت ماندگار

$E_e(s) = R(s) - Y(s) = (1 - G(s)) \cdot R(s)$

$E_e(s) = \frac{1}{1 + G(s)} \cdot R(s) \quad H(s) = 1$

Steady State Error

$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s)$

For a step unit input

$e_0(\text{infinite}) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot (1 - G(s)) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} (1 - G(0))$

$e_0(\text{infinite}) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left(\frac{1}{1 + G(s)} \right) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + G(0)} \right)$

Linear Control Systems
 By: Dr B. moaveni

هزینه استفاده از فیدبک

- افزایش پیچیدگی سیستم
- هزینه استفاده از سنسورها
- از دست دادن بهره ورودی - خروجی
- امکان ناپایداری



باستادعالی

سیستم های کنترل کلاسیک

Lecture 4

تحلیل های حوزه زمان برای سیستم های خطی

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

1

تحلیل پاسخ زمانی سیستم ها

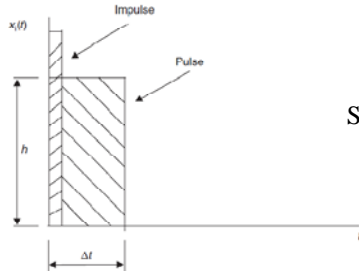
- دست یافتن به پاسخ حالت گذرا و ماندگار مطلوب با استفاده از کنترل کننده های حلقه بسته از اهداف کنترل اتوماتیک است.
- رویکرد تحلیل سیستم ها بر اساس مشاهده پاسخ زمانی
 - ورودی های مهم در تحلیل پاسخ زمانی سیستم ها:
 - ورودی ضربه
 - ورودی پله
 - ورودی شیب
 - ورودی شتاب
- شاخص های عملکرد در تحلیل پاسخ های زمانی
- بررسی رفتار سیستم های مرتبه اول و دوم
- تقریب سیستم های مرتبه بالا با سیستم های مرتبه پایین

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

2

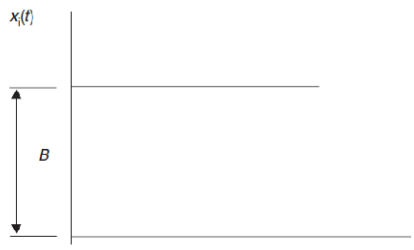
ورودی های مهم در تحلیل پاسخ زمانی

• ورودی ضربه:



Streight of an impulse: $A = h \cdot \Delta t$

• ورودی پله:



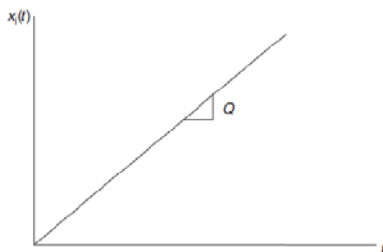
$$r(t) = \begin{cases} B & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \rightarrow R(s) = \frac{B}{s}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

3

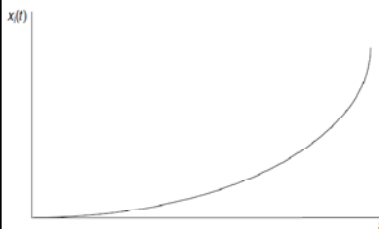
ورودی های مهم در تحلیل پاسخ زمانی

• ورودی شیب:



$$r(t) = \begin{cases} Qt & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \rightarrow R(s) = \frac{Q}{s^2}$$

• ورودی شتاب (parabolic):



$$r(t) = \begin{cases} Kt^2 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \rightarrow R(s) = \frac{2k}{s^3}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

4

استفاده از MATLAB در مشاهده پاسخ زمانی

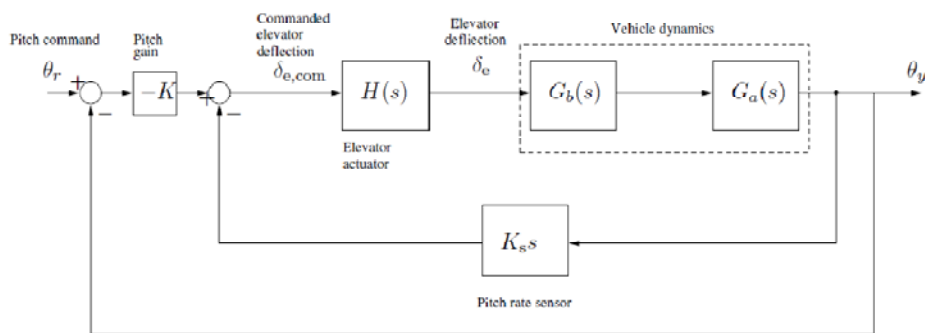
	Mfile	Simulink
Linear Systems	impulse	to workspace
	step	plot
	impzplot	sim
	initial	
	Ltview	
	lsim	
Nonlinear Systems	ode	

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

5

استفاده از MATLAB در مشاهده پاسخ زمانی

مثال



$$G(s) = G_a(s)G_b(s) = \frac{-0.125}{s^2 + 0.226s + 0.0169} \frac{s + 0.435}{s + 1.23}$$

$$H(s) = \frac{2}{s + 2} \quad K_s = 1$$

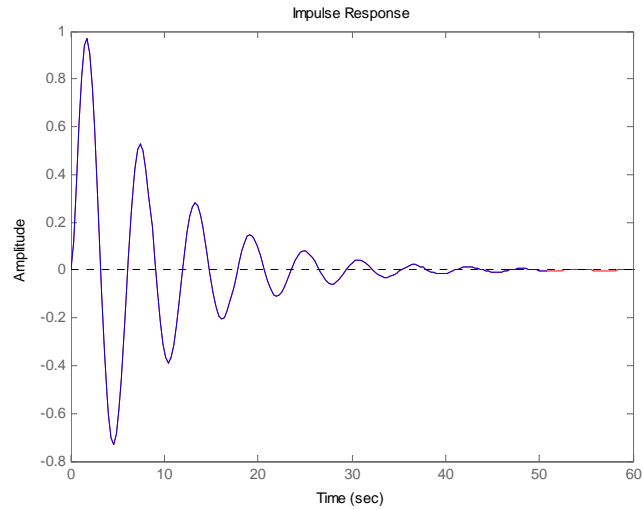
$$K = 15$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

6

استفاده از MATLAB در مشاهده پاسخ زمانی

پاسخ حلقه بسته به ورودی ضربه

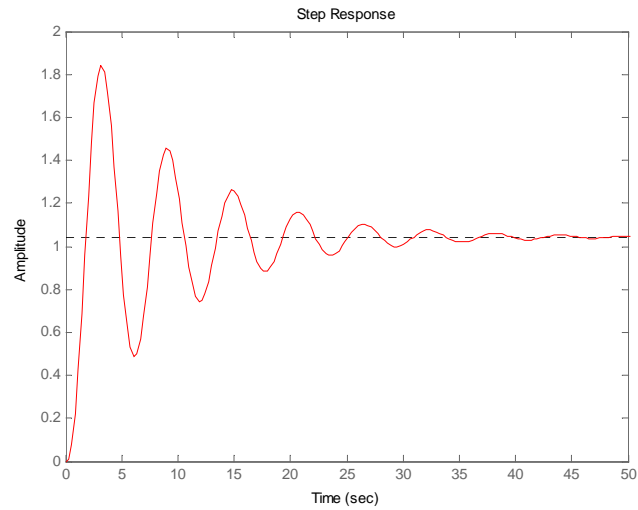


Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

7

استفاده از MATLAB در مشاهده پاسخ زمانی

پاسخ حلقه بسته به ورودی پله

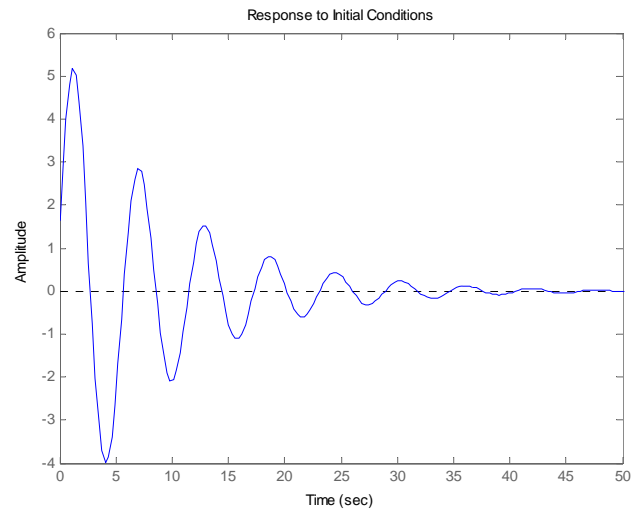


Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

8

استفاده از MATLAB در مشاهده پاسخ زمانی

پاسخ به شرایط اولیه $x_0 = [1 \ 1 \ 0 \ 1]$

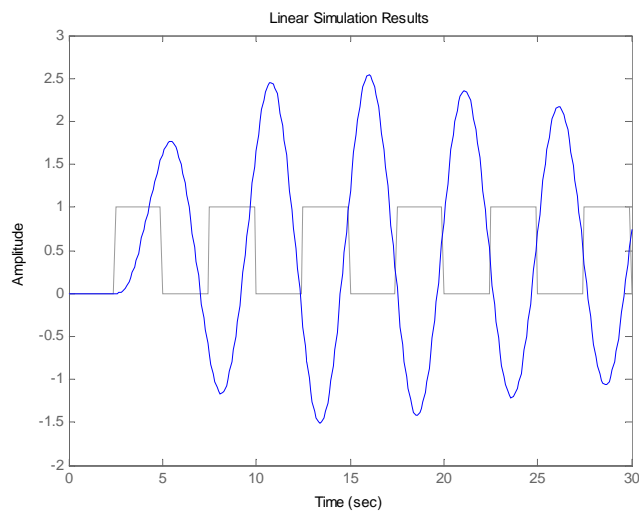


Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

9

استفاده از MATLAB در مشاهده پاسخ زمانی

پاسخ به ورودی موج مربعی:



Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

10

پاسخ زمانی سیستم های غیر خطی

- Simulink
- Mfile
- sim
- ODE

مثال: جستجوگر ژيروسکوپ آزاد

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{I_r \cos x_3} (T_z + I_R \omega_s x_4) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{I_r} (T_y - I_R \omega_s x_2 \cos x_3)\end{aligned}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

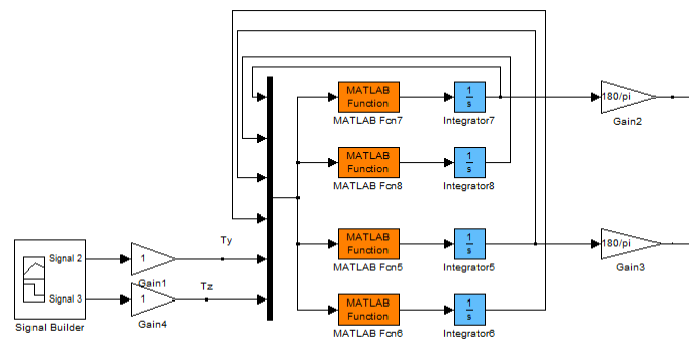
11

پاسخ زمانی سیستم های غیر خطی

ادامه مثال:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{I_r \cos x_3} (T_z + I_R \omega_s x_4) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{I_r} (T_y - I_R \omega_s x_2 \cos x_3)\end{aligned}$$

- Simulink
- Sources block
- Sinks



12

پاسخ زمانی سیستم های غیر خطی

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{I_r \cos x_3} (T_z + I_R \omega_s x_4)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{I_r} (T_y - I_R \omega_s x_2 \cos x_3)$$

ادامه مثال:

Mfile •
ODE -

```
function out = FGM(t,y)
ws=100*2*pi;
IR=30e-6;
Ir=15e-6;

out = [y(2);...
      (1+IR*ws*y(4))/(Ir*cos(y(3)));...
      y(4);...
      (1-IR*ws*y(2)*cos(y(3)))/(Ir)];
```

```
[t,y] = ode45('FGM',[0 0.02],[xic]);
figure(1)
plot(t,180*y(:,1)/pi,'-',t,180*y(:,3)/pi,'--')
```

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

13

پاسخ زمانی سیستم های غیر خطی

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{I_r \cos x_3} (T_z + I_R \omega_s x_4)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{I_r} (T_y - I_R \omega_s x_2 \cos x_3)$$

ادامه مثال:

Mfile •
ODE -

```
function out = FGM(t,y)
ws=100*2*pi;
IR=30e-6;
Ir=15e-6;

out = [y(2);...
      (1+IR*ws*y(4))/(Ir*cos(y(3)));...
      y(4);...
      (1-IR*ws*y(2)*cos(y(3)))/(Ir)];
```

```
[t,y] = ode45('FGM',[0 0.02],[xic]);
figure(1)
plot(t,180*y(:,1)/pi,'-',t,180*y(:,3)/pi,'--')
```

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

14

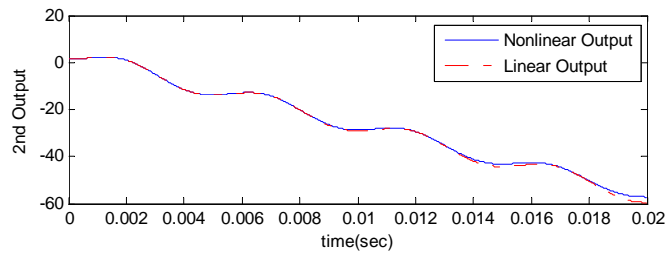
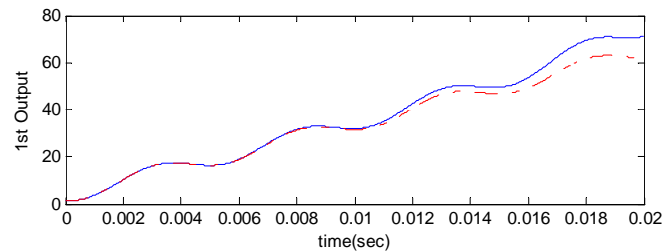
ODE Solvers

Solver	Problem Type	Order of Accuracy	When to Use
ode45	Nonstiff	Medium	Most of the time. This should be the first solver you try.
ode23	Nonstiff	Low	For problems with crude error tolerances or for solving moderately stiff problems.
ode113	Nonstiff	Low to high	For problems with stringent error tolerances or for solving computationally intensive problems.
ode15s	Stiff	Low to medium	If ode45 is slow because the problem is stiff.
ode23s	Stiff	Low	If using crude error tolerances to solve stiff systems and the mass matrix is constant.
ode23t	Moderately Stiff	Low	For moderately stiff problems if you need a solution without numerical damping.
ode23tb	Stiff	Low	If using crude error tolerances to solve stiff systems.

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

15

مقایسه پاسخ زمانی سیستم های خطی و غیر خطی



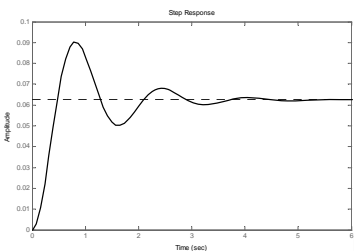
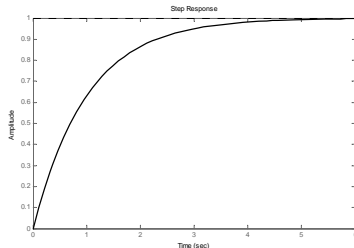
Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

16

شاخص های عملکرد در تحلیل پاسخ زمانی

معیارهای عملکرد استاندارد بر اساس پاسخ پله سیستم تعریف می گردند، ولیکن بر اساس خواسته های طراح از سیستم تحت کنترل می توانند تعریف نیز گردند.

پاسخ پله سیستم های مرتبه اول به بالا:

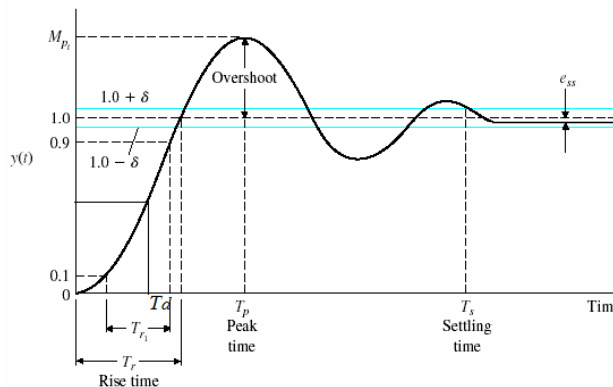


پاسخ پله سیستم های مرتبه دوم به بالا:

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

17

شاخص های عملکرد در تحلیل پاسخ زمانی



Rise Time: T_r
Peak Time: T_p
Percentage Overshoot, P.O.: M_p
Settling Time: T_s
Delay time: T_d

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

18

شاخص های عملکرد در تحلیل پاسخ زمانی

• معیارهای عملکرد در حالت گذرا:

سرعت (چابکی) پاسخ زمانی (Swiftness)

- زمان خیز

* 0-100% برای حالت زیر میرا

* 10-90% برای حالت فوق میرا

- زمان فراجهش ماکزیمم

- زمان تاخیر

نزدیک بودن مقدار پاسخ زمانی به ورودی مرجع (Closeness)

- زمان نشست

- فراجهش ماکزیمم

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

19

شاخص های عملکرد در تحلیل پاسخ زمانی

شاخص های تحلیل عملکرد

(1) Integral of the square of the error, ISE $ISE = \int_0^T e^2(t) dt$

(2) Integral of the absolute magnitude of the error, IAE $ISE = \int_0^T |e(t)| dt$

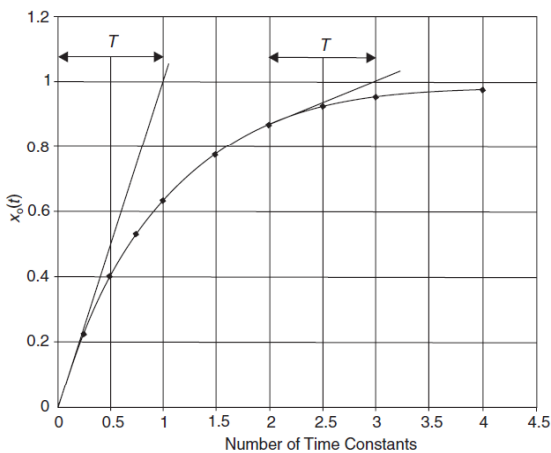
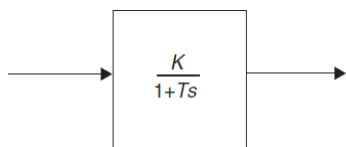
(3) Integral of time multiplied by absolute error, ITAE $ISE = \int_0^T t |e(t)| dt$

(4) Integral of time multiplied by the squared error, ITSE $ISE = \int_0^T t e^2(t) dt$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

20

پاسخ پله سیستم های مرتبه اول و شاخص عملکرد متناظر



Swiftiness :

$$T_r$$

Closeness :

$$T_{s-98\%} = 4T$$

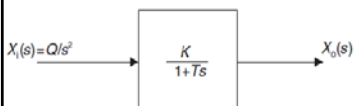
$$T_{s-95\%} = 3T$$

t/T	0	0.25	0.5	0.75	1	1.5	2	2.5	3	4
$x_o(t)$	0	0.221	0.393	0.527	0.632	0.770	0.865	0.920	0.950	0.980

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

21

پاسخ ه، ه د، ه، شب سیستم های مرتبه اول



Unit ramp response of a first-order system

t/T	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_i(t)/T$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_o(t)/T$	0	0.368	1.135	2.05	3.018	4.007	5	6

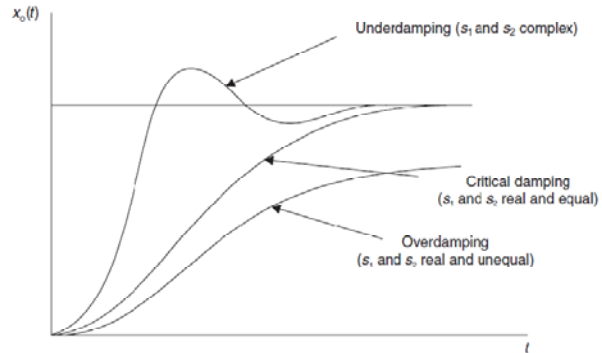
Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

22

سیستم های مرتبه دوم

Standard form:
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

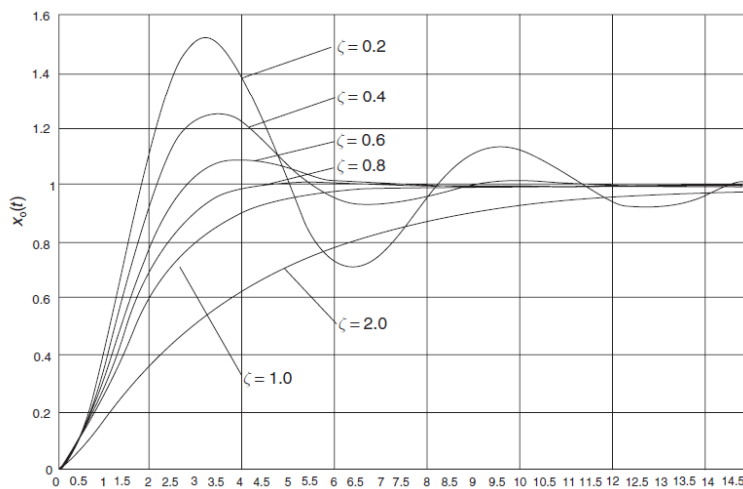
- $\zeta = 0$ No damping
- $\zeta < 1$ Underdamping
- $\zeta = 1$ Critical damping
- $\zeta > 1$ Overdamping



Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

23

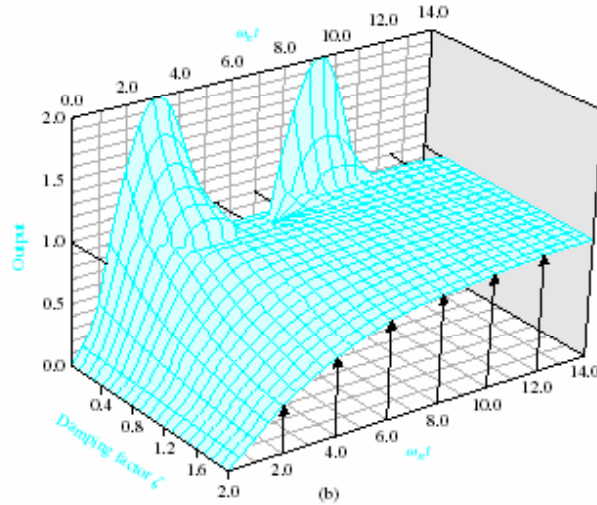
پاسخ پله سیستم های مرتبه دوم



Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

24

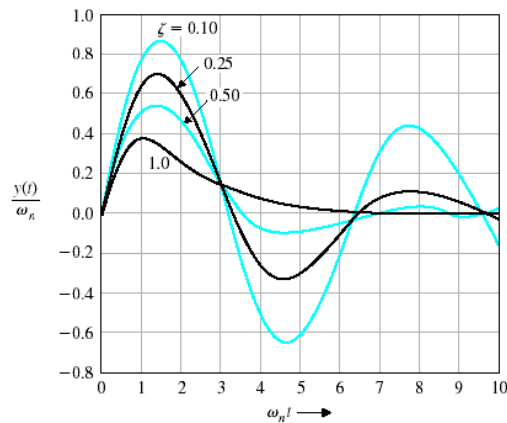
پاسخ پله سیستم های مرتبه دوم به ازای تغییرات نسبت میرایی



(b)
Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

25

پاسخ ضربه سیستم های مرتبه دوم



Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

26

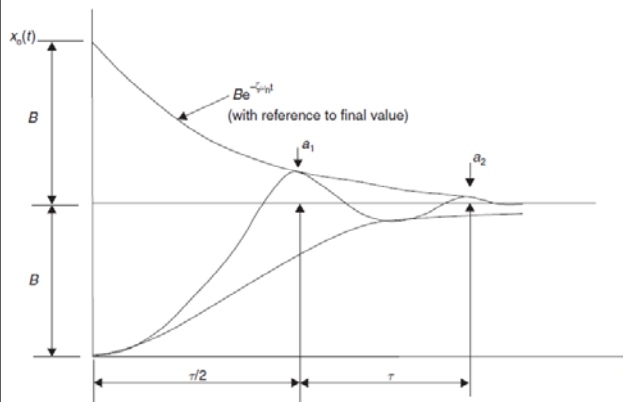
شاخص های عملکرد در سیستم های مرتبه دوم

$$x_o(t) = K \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ \cos \omega_d t + \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \sin \omega_d t \right\} \right]$$

$$= K \left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \phi) \right]$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\tan \phi = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$



$$MP\% = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

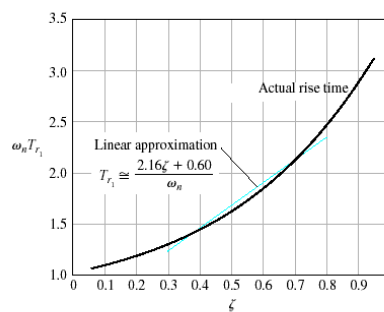
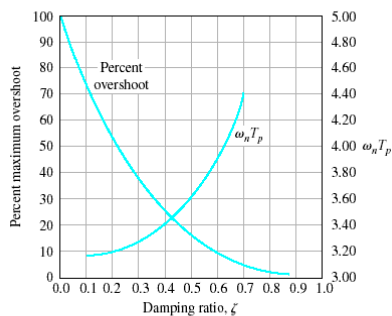
$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$T_{s-98\%} = \frac{4}{\xi\omega_n}$$

$$T_{s-95\%} = \frac{3}{\xi\omega_n} \quad 27$$

شاخص های عملکرد در سیستم های مرتبه دوم

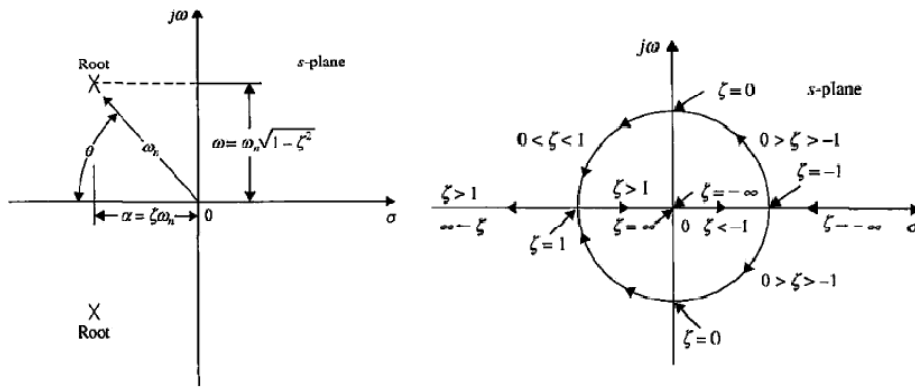
ارتباط زمان خیز و نسبت میرایی ارتباط درصد فرجهش و نسبت میرایی



واضح است که در دست یافتن به پاسخ زمانی نیاز به تعدیل مناسب شاخص های عملکرد مطلوب است.

مکان هندسی قطب های یک سیستم مرتبه دو بر اساس تغییرات نسبت میرایی

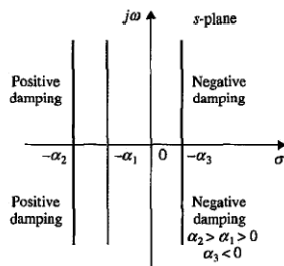
Standard form: $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \rightarrow s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$



Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

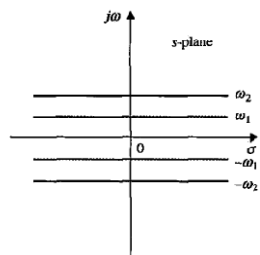
29

مکان هندسی قطب های یک سیستم مرتبه دوم



مکان قطب های با ضریب میرایی ثابت:

example_3.m



مکان قطب های با فرکانس میرایی ثابت:

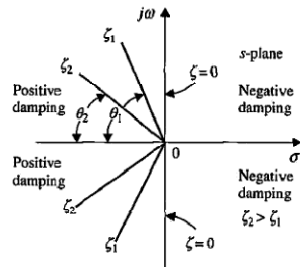
example_4.m

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

30

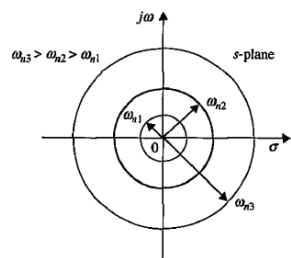
مکان هندسی قطب های یک سیستم مرتبه دوم

مکان قطب های با نسبت میرایی ثابت:



example_5.m

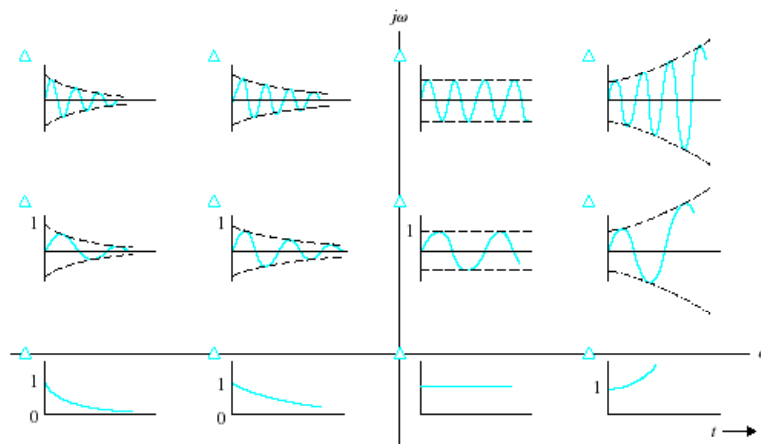
مکان قطب های با فرکانس طبیعی ثابت:



Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

31

جمع بندی اولیه: پاسخ زمانی سیستم ها بر اساس محل قرار گرفتن قطب ها

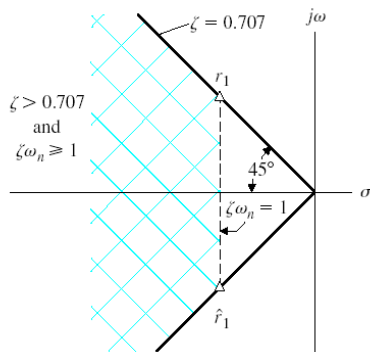


Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

32

جمع بندی اولیه: پاسخ زمانی سیستم ها بر اساس محل قرار گرفتن قطب ها

مثال: (پایه های بحث طراحی)



$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \leq 4 \text{sec}$$

$$\zeta \omega_n \geq 1$$

When the closed-loop roots are chosen as:

$$r_1 = -1 + j \cdot 1$$

$$r_2 = -1 - j \cdot 1$$

We have $T_s = 4 \text{sec}$ and an overshoot of 4.3%.

$$\text{Therefore, } \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ and } \omega_n = \frac{1}{\zeta} = \sqrt{2}$$

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K}{s^2 + p \cdot s + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

$$K = \omega_n^2 = 2$$

$$P = 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n = 2$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

33

تأثیر صفر بر پاسخ سیستم مرتبه دوم

$$G_z(s) = \frac{\omega_n^2 (T_z s + 1)}{s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G_z(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2} + \frac{\omega_n^2 T_z s}{s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

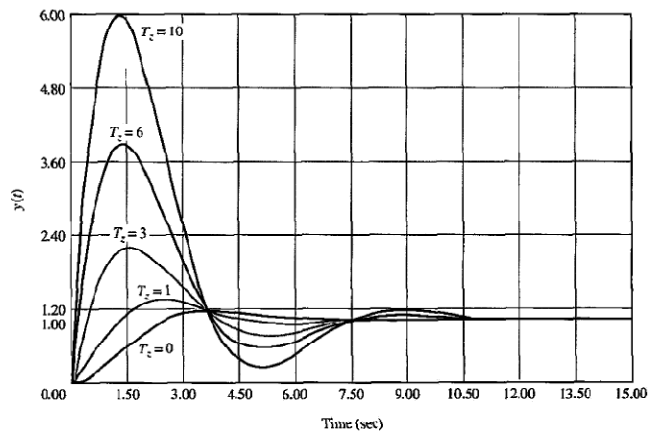


Figure 5-37 Unit-step responses of the system with the closed-loop transfer function in Eq. (5-162): $T_z = 0, 1, 2, 3, 6,$ and 10 .

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

34

تأثير صفر بر پاسخ سیستم مرتبه دوم

$$G_z(s) = \frac{\omega_n^2(T_z s + 1)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G_z(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{\omega_n^2 T_z s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

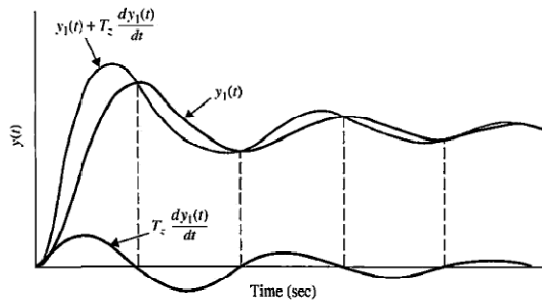


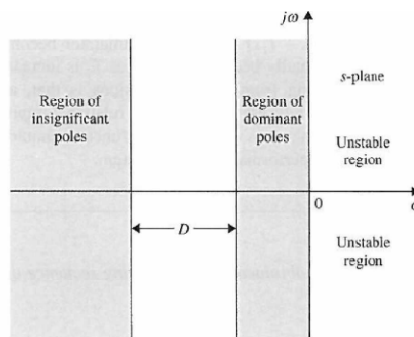
Figure 5-38 Unit-step responses showing the effect of adding a zero to the closed-loop transfer function.

$$y(t) = y_1(t) + \frac{d}{dt} y_1(t)$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

35

تحليل سیستم های مرتبه بالا بر اساس تئوری قطب های غالب



$$\max(\text{Re}\{\text{insign. poles}\}) < 5 \times \max(\text{Re}\{\text{Dominant poles}\})$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

36

تحلیل سیستم های مرتبه بالا بر اساس تئوری قطب های غالب

مثال:

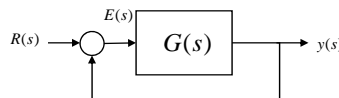
$$G(s) = \frac{20}{(s+10)(s^2+2s+2)} = \frac{20}{10\left(\frac{s}{10}+1\right)(s^2+2s+2)} \approx \frac{2}{(s^2+2s+2)}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

37

خطای حالت ماندگار

$$G(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^N \prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$



example_7.mdl

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{R}{s}}{1+G(s)}$$

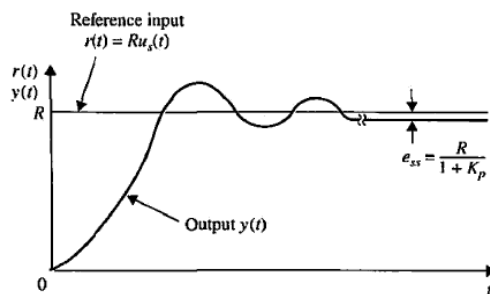


Figure 5-5 Typical steady-state error due to a step input.

Type	e_{ss}
$N=0$	$e_{ss} = \frac{R}{1+k_p}$
$N \geq 1$	$e_{ss} = 0$

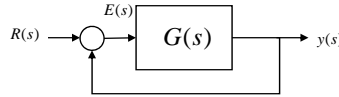
$$k_p = G(0)$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

38

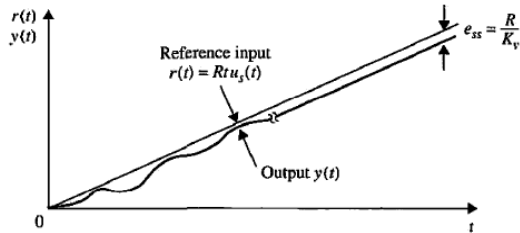
خطای حالت ماندگار

$$G(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^N \prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$



example_7.mdl

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{R}{s^2}}{1+G(s)}$$



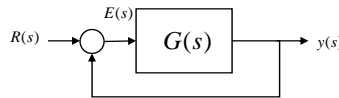
Type	e_{ss}
$N = 0$	$e_{ss} = \infty$
$N = 1$	$e_{ss} = \frac{R}{k_v}$
$N \geq 2$	$e_{ss} = 0$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

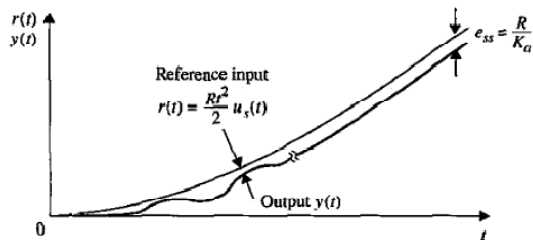
39

خطای حالت ماندگار

$$G(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^N \prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$



$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{R}{s^3}}{1+G(s)}$$



Type	e_{ss}
$N = 0, 1$	$e_{ss} = \infty$
$N = 2$	$e_{ss} = \frac{R}{k_a}$
$N \geq 3$	$e_{ss} = 0$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

40

خطای حالت ماندگار - جمع بندی

Type of System	Error Constants			Steady-State Error e_{ss}		
				Step Input	Ramp Input	Parabolic
j	K_p	K_v	K_a	$\frac{R}{1+K_p}$	$\frac{R}{K_v}$	$\frac{R}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{R}{1+K}$	∞	∞
1	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$	∞
2	∞	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$
3	∞	∞	∞	0	0	0

تعریف صفر و قطب

صفرهای سیستم: عبارتند از فرکانس هایی که در آن انتقال از ورودی به خروجی متوقف می گردد.

قطب های سیستم: عبارتند از فرکانس هایی که در آن تابع انتقال سیستم منفرد می شود.



باستغاث

سیستم های کنترل کلاسیک

Lecture 5

تحلیل پایداری به روش

Routh-Hurwitz

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

1

تحلیل پایداری سیستم های خطی

- اولین گام در کنترل یک سیستم دست یابی به پایداری سیستم تحت است. به عبارت دیگر تضمین پایداری اصلی ترین بخش طراحی یک کنترل کننده محسوب می گردد.

تعریف پایداری BIBO:

- یک سیستم پایدار BIBO است اگر به ازای هر ورودی محدود خروجی محدود باقی بماند.

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^q (s + p_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)}$$

$$\text{characteristic polynomial: } \Delta(s) = \prod_{j=1}^q (s + p_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

2

تحلیل پایداری سیستم های خطی

پاسخ پله سیستم:

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{b_k(s + \zeta_k \omega_k) + c_k \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2} \quad (q + 2r = n)$$

$$c(t) = a + \sum_{j=1}^q a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r b_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t + \sum_{k=1}^r c_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t, \quad \text{for } t \geq 0$$

در نتیجه شرط پایداری **BIBO** عبارت است از:

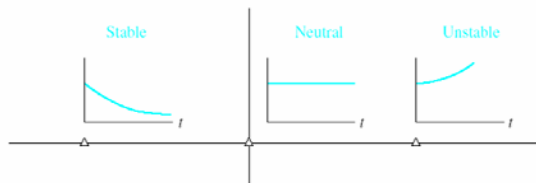
بخش حقیقی تمامی قطب ها سمت چپ محور موهومی قرار داشته باشند.

$$\begin{cases} -P_j < 0 \\ -\zeta_k \omega_k < 0 \end{cases}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

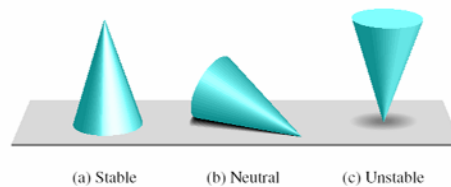
3

تحلیل پایداری سیستم های خطی



ناپایداری: حداقل یک قطب سمت راست محور موهومی قرار داشته باشد.
مرز پایداری (نا پایداری): حداقل یک قطب روی محور موهومی قرار داشته باشد.

• معرفی مساله پایداری و ناپایداری نقطه تعادل در یک سیستم:



4

روش Routh-Hurwitz در تحلیل پایداری:

- **شرط لازم پایداری در روش Routh-Hurwitz:**

– تمامی ضرایب معادله مشخصه هم علامت و مخالف صفر باشند.

- **شرط لازم و کافی پایداری در روش Routh-Hurwitz:**

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

$$\begin{array}{l|ccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} \\ s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s^0 & h_{n-1} & & \end{array}$$

$$b_{n-1} = \frac{(a_{n-1})(a_{n-2}) - a_n(a_{n-3})}{a_{n-1}} = \frac{-1}{a_{n-1}} \left| \begin{array}{cc} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{array} \right|$$

$$b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \left| \begin{array}{cc} a_{n-2} & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{array} \right|$$

$$c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}} \left| \begin{array}{cc} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{array} \right|$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

5

روش Routh-Hurwitz در تحلیل پایداری:

- **شرط لازم و کافی پایداری در روش Routh-Hurwitz:**

– تمامی ضرایب در ستون اول آرایه Routh دارای علامت یکسان باشند.

- **توجه:**

– معادله مشخصه به تعداد تغییر علامت ها در ستون اول آرایه Routh ریشه ناپایدار دارد.

- **مثال:**

$$\Delta(s) = (s-1)(s+2)(s+3) = s^3 + 4s^2 + s - 6$$

$$\begin{array}{l|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 4 & -6 \\ s^1 & 2.5 & \\ s^0 & -6 & \end{array}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

6

روش Routh-Hurwitz در تحلیل پایداری:

• مثال: (سیستم های مرتبه دوم)

$$\Delta(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & \\ s^0 & a_0 & \end{array} \Rightarrow a_2, a_1, a_0 : \text{have same sign}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

7

حالت های خاص در روش Routh-Hurwitz:

۱- اولین عنصر از یک سطر از آرایه Routh صفر باشد ولیکن سطر کامل صفر نباشند.

در این حالت داریه صفر را با $\varepsilon > 0$ جایگزین نموده و آرایه روث را به صورت حدی تکمیل نمایید.

$$\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10$$

مثال:

s^5	1	2	11	
s^4	2	4	10	\Rightarrow two unstable poles: $0.8950 + 1.4561i$ $0.8950 - 1.4561i$
s^3	$\varepsilon > 0$	6		$-1.2407 + 1.0375i$
s^2	$\frac{4\varepsilon - 12}{\varepsilon} < 0$	10		$-1.2407 - 1.0375i$ -1.3087
s^1	≈ 6			
s^0	10			

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

8

حالت های خاص در روش Routh-Hurwitz :

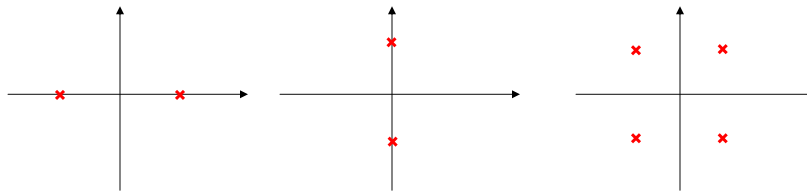
۲- یک سطر کامل از آرایه Routh صفر باشد.

این حالت ریشه های معادله مشخصه سیستم یک یا چند حالت زیر را برآورده می نمایند: $\varepsilon > 0$

۱-۲- معادله دست کم یک جفت ریشه حقیقی مختلف علامه دارد.

۲-۲- معادله یک یا چند جفت ریشه موهومی دارد.

۲-۳- معادله چند جفت ریشه مزدوج مختلط دارد که نسبت به مبدا قرینه اند.



Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

9

حالت های خاص در روش Routh-Hurwitz :

۲- یک سطر کامل از آرایه Routh صفر باشد.

در این حالت به منظور تکمیل آرایه Routh از سطر ماقبل صفر مشتق گرفته و ضرایب را جایگزین صفرها می نمایم.

توجه: معادله حاصل از ضرایب سطر ماقبل صفر را معادله کمکی می نامند که ریشه های آن ریشه های معادله مشخصه است. ریشه های معادله کمکی یکی از سه حالت گفته شده را برآورده می نماید.

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

10

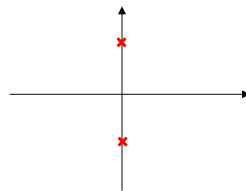
حالت های خاص در روش Routh-Hurwitz :

مثال:

$$\Delta(s) = s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4 = 0$$

s^5	1	8	7
s^4	4	8	4
s^3	6	6	
s^2	4	4	
s^1	0 8		
s^0	4		

$$\rightarrow A(s) = 4s^2 + 4 = 0 \xrightarrow{dA/ds} 8s$$



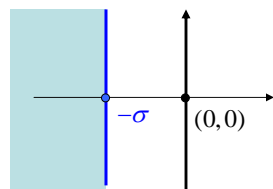
دو قطب در مرز ناپایداری:

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

11

تحلیل پایداری نسبی در روش Routh-Hurwitz :

با استفاده از انتقال محور موهومی می توان از روش Routh-Hurwitz برای بررسی پایداری نسبی استفاده نمود. این امر با استفاده از تغییر متغیر زیر امکان پذیر خواهد بود.



$$S_{old} = S_{new} - \sigma$$

مثال: مطلوب است تعداد ریشه های معادله مشخصه زیر در سمت راست خط $s = -1$:

$$\Delta(s) = s^3 + 5s^2 + 8s + 6$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

12

تحلیل پایداری نسبی در روش Routh-Hurwitz :

$$\Delta(s) = s^3 + 5s^2 + 8s + 6$$

ادامه مثال:

$$s = z - 1 \rightarrow \Delta(z) = (z - 1)^3 + 5(z - 1)^2 + 8(z - 1) + 6$$

$$= z^3 + 2z^2 + z + 2$$

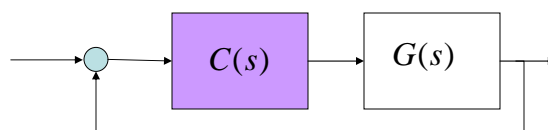
$$\begin{array}{c|cc} z^3 & 1 & 1 \\ z^2 & 2 & 2 \\ z^1 & 0 & 4 \\ z^0 & 2 & \end{array} \rightarrow A(z) = 2z^2 + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{dA}{dz} \rightarrow 4z \\ z = \pm j \rightarrow s = -1 \pm j \end{cases}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

13

استفاده از روش Routh-Hurwitz در طراحی:

مثال: سیستم حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید. بهره k و a را بگونه ای تعیین نمایید که سیستم تحت کنترل پایدار باشد.



$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+5)}$$

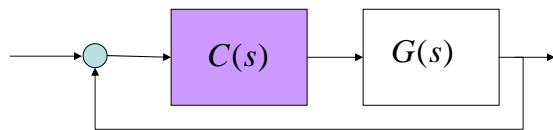
$$\Rightarrow \Delta_{cl}(s) = 1 + G(s)C(s) = s^4 + 8s^3 + 17s^2 + (k+10)s + k.a = 0$$

$$C(s) = \frac{k(s+a)}{s+1}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

14

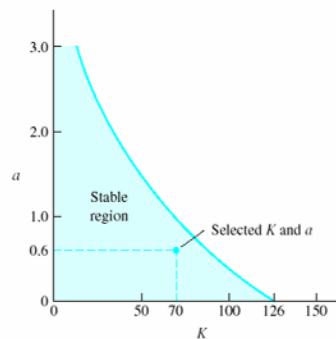
استفاده از روش Routh-Hurwitz در طراحی:



ادامه مثال:

s^4	1	17	Ka	$b_3 = \frac{126-k}{8}$
s^3	8	$(K+10)$	0	
s^2	b_3	Ka		$c_3 = \frac{b_3(k+10)-8ka}{b_3}$
s^1	c_3			
s^0	Ka			

$$\Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ k > 0 \\ k < 126 \\ (k-126)(k+10) - 64ka > 0 \end{cases}$$



15

نکاتی در مورد روش Routh-Hurwitz:

توجه: در تکمیل آرایه Routh می توان سطری را در یک ضریب ثابت ضرب و یا بر آن تقسیم نمود بدون آنکه تغییری در علامت ستون اول رخ دهد.

$$Q(s) = s^6 + 3s^5 + 2s^4 + 9s^3 + 5s^2 + 12s + 20$$

s^6	1	2	5	20	
s^5	3	9	12		
	1	3	4		(after dividing by 3)
s^4	-1	1	20		
s^3	4	24			
	1	6			(after dividing by 4)
s^2	7	20			
s^1	22				(after multiplying by 7)
s^0	20				

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

16

نکاتی در مورد روش Routh-Hurwitz :

توجه: در هنگامی که در آرایه Routh ستون اول یکی از سطرها صفر می شود در حالیکه سایر ضرایب صفر نیستند به جای روش پیشین میتوان از دو روش زیر بهره برد:

- ۱- استفاده از تغییر متغیر $s = \frac{1}{x}$
- ۲- ضرب چندجمله ای در جمله $s+1$.

$$Q(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 5$$

مثال:

$$\begin{array}{l|lll} s^4 & 1 & 2 & 5 \\ s^3 & 1 & 2 & \\ s^2 & 0 & 5 & \end{array}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

17

نکاتی در مورد روش Routh-Hurwitz :

$$Q(x) = 5x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$$

$$\begin{array}{l|lll} x^4 & 5 & 2 & 1 \\ x^3 & 2 & 1 & \\ x^2 & -1 & 2 & \\ x^1 & 5 & & \\ x^0 & 2 & & \end{array}$$

ادامه مثال: روش ۱

$$Q_1(s) = Q(s)(s+1) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 7s + 5$$

روش ۲:

$$\begin{array}{l|lll} s^5 & 1 & 3 & 7 \\ s^4 & 2 & 4 & 5 \\ s^3 & 2 & 9 & \\ s^2 & -10 & 10 & \\ s^1 & 11 & & \\ s^0 & 10 & & \end{array}$$

18

نکاتی در مورد روش Routh-Hurwitz:

توجه: استفاده از قضیه مقدار نهایی برای محاسبه خطای حالت ماندگار فقط به شرط پایداری سیستم صحیح و ممکن است.

$$Q(x) = 5x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$$

x^4	5	2	1
x^3	2	1	
x^2	-1	2	
x^1	5		
x^0	2		

روش ۲:

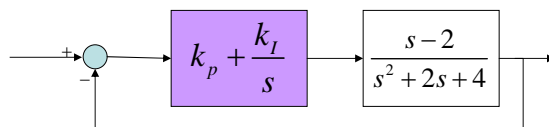
$$Q_1(s) = Q(s)(s+1) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 7s + 5$$

s^5	1	3	7
s^4	2	4	5
s^3	2	9	
s^2	-10	10	
s^1	11		
s^0	10		

19

تمرین

ناحیه ای از صفحه k_I بر حسب k_p را مشخص نمایید که کنترل کننده PI بتواند سیستم زیر را در حالت حلقه بسته پایدار نماید.





بسمتعالی

سیستم های کنترل کلاسیک

Lecture 6

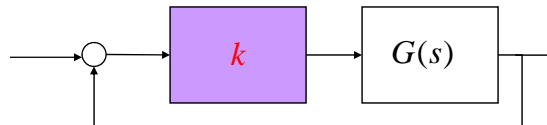
تحلیل پایداری به روش مکان هندسی ریشه ها

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

1

مقدمه

در تحلیل پایداری به روش **Routh-Hurwitz** فقط به مساله سمت چپ/راست بودن قطب ها پرداخته شد. در حالیکه محل قطب ها در تعیین نوع پاسخ سیستم بسیار موثر است. لذا روش مکان هندسی ریشه ها در سال ۱۹۴۸ توسط **Evans** ارائه گردید.



$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \rightarrow \Delta(s) = 1 + kG(s) = 0 \Rightarrow kG(s) = -1$$

$$kG(s) = -1 \Rightarrow |kG(s)| \angle kG(s) = -1 + j0 = 1 \angle 180^\circ$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

2

مقدمه

$$|kG(s)| \angle kG(s) = 1 \angle 180^\circ \Rightarrow \begin{cases} |kG(s)| = 1 \\ \angle kG(s) = 180^\circ \pm n360^\circ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} |G(s)| = \frac{1}{|k|} & \text{شرط دامنه:} \\ \angle G(s) = \begin{cases} (2n+1)\pi = \pm 180^\circ & k > 0 \\ (2n)\pi = \pm 180^\circ & k < 0 \end{cases} & \text{شرط زاویه:} \end{cases}$$

شرط دامنه:

$$G(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \Rightarrow |G(s)| = \frac{\prod_{i=1}^m |s + z_i|}{\prod_{j=1}^n |s + p_j|} = \frac{1}{|k|}$$

در هر نقطه از مکان هندسی ریشه ها حاصلضرب فاصله تا قطب ها تقسیم بر فاصله تا صفرها برابر $|k|$ است.

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

3

مقدمه

شرط زاویه:

* برای $k > 0$ در هر نقطه از مکان هندسی ریشه ها تفاضل زاویه با صفرها از زاویه با قطب ها برابر مضرب فرد از 180° درجه است.

$$k > 0: \angle G(s) = (2n+1)\pi \Rightarrow \sum_i \angle (s + z_i) - \sum_j \angle (s + p_j) = (2n+1)\pi$$

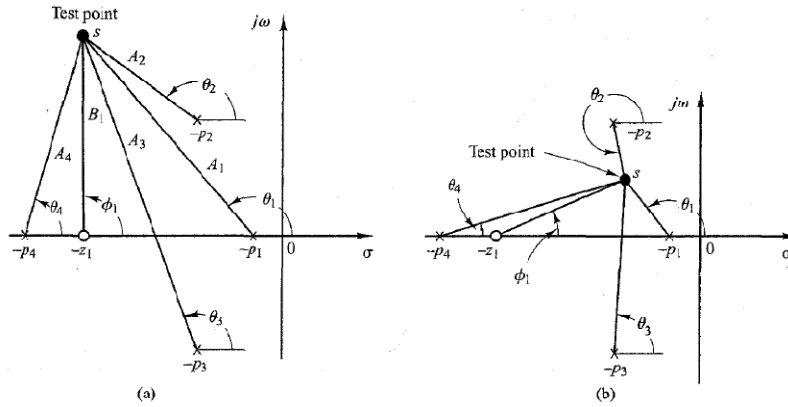
* برای $k < 0$ در هر نقطه از مکان هندسی ریشه ها تفاضل زاویه با صفرها از زاویه با قطب ها برابر مضرب زوج از 180° درجه است.

$$k < 0: \angle G(s) = (2n)\pi \Rightarrow \sum_i \angle (s + z_i) - \sum_j \angle (s + p_j) = (2n)\pi$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

4

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)(s + p_4)}$$



$$|k| = \frac{A_1 A_2 A_3 A_4}{B_1}$$

$$\phi_1 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = \begin{cases} (2n+1)\pi & k > 0 \\ 2n\pi & k < 0 \end{cases}$$

خواص مکان هندسی ریشه ها

۱- قطب های حلقه بسته به ازای $k = 0$ همان قطب های حلقه باز هستند.
(شروع مکان هندسی ریشه های حلقه بسته)

$$G(s)H(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \Rightarrow \Delta(s) = q(s) + kp(s) = 0 \Rightarrow \Delta(s) = q(s) = 0$$

۲- قطب های حلقه بسته به ازای $k = \infty$ همان صفر های حلقه باز هستند.
(پایان مکان هندسی ریشه های حلقه بسته)

$$G(s)H(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \Rightarrow \Delta(s) = q(s) + kp(s) = 0 \Rightarrow \Delta(s) = p(s) = 0$$

خواص مکان هندسی ریشه ها

۳- برای $k > 0$ بخش های از محور حقیقی که سمت راست آن تعداد فردی صفر و قطب حقیقی وجود داشته باشد جزء مکان هندسی ریشه ها است.

* برای $k < 0$ بخش های از محور حقیقی که سمت راست آن تعداد زوجی صفر و قطب حقیقی وجود داشته باشد جزء مکان هندسی ریشه ها است.

۴- نقاط شکست یا خروج از مکان هندسی ریشه ها لازم است در معادله زیر صدق نمایند.

$$\frac{d}{ds} G(s) = 0$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

7

خواص مکان هندسی ریشه ها

۵- محل تقاطع مجانب ها

$$\sigma = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

۶- زاویه مجانب ها

$$k > 0 \rightarrow \theta = \frac{(2n+1)\pi}{n-m}$$

$$k < 0 \rightarrow \theta = \frac{2n\pi}{n-m}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

8

خواص مکان هندسی ریشه ها

۷- مکان هندسی ریشه ها نسبت به محور حقیقی متقارن است.

۸- محل تقاطع مکان هندسی ریشه ها با محور موهومی با استفاده از روش Routh-Hurwitz امکان پذیر است. در این روش لازم است مقداری از بهره که موجب صفر شدن یک سطر با شماره فرد می گردد برابر صفر باشد.

۹- زاویه خروج از قطب و ورود به صفر را می توان از شرط زاویه بدست آورد.

$$k > 0: \sum_i \angle(s + z_i) - \sum_j \angle(s + p_j) = (2n+1)\pi$$

$$k < 0: \sum_i \angle(s + z_i) - \sum_j \angle(s + p_j) = (2n)\pi$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

9

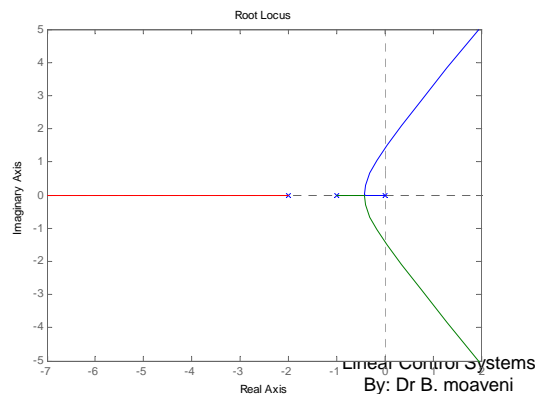
رسم مکان هندسی ریشه ها با استفاده از MATLAB

دستورات مرتبط با مکان هندسی ریشه ها

rlocus

sisotool

مثال ۱:

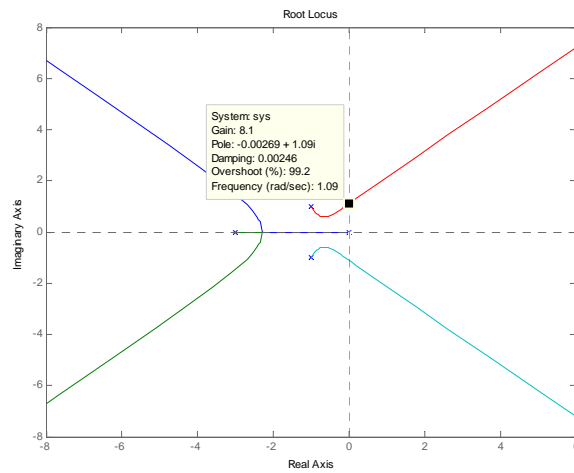


$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$

10

رسم مکان هندسی ریشه ها با استفاده از MATLAB

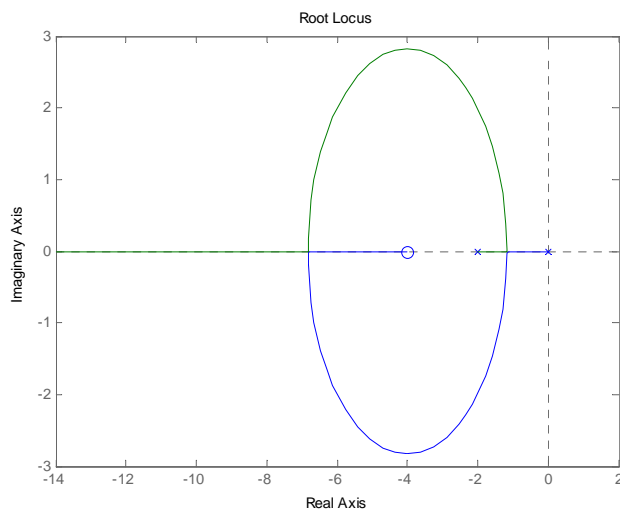
مثال ۲: $G(s) = \frac{k}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$



11

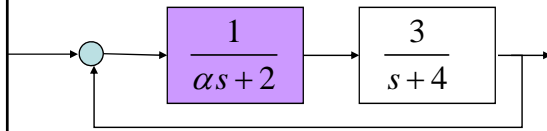
رسم مکان هندسی ریشه ها با استفاده از MATLAB

مثال ۳: $\Delta(s) = s^2 + (k+2)s + 4k = 0 \rightarrow 1 + k \frac{s+4}{s^2+2s+4} = 0$



12

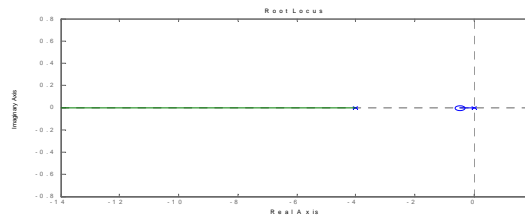
رسم مکان هندسی ریشه ها با استفاده از MATLAB



مثال ۴: مکان هندسی نسبت به تغییرات پارامتری از سیستم

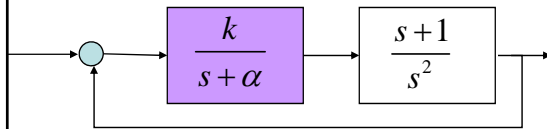
$$\Delta(s) = (s+4)(\alpha s+2)+1 = \alpha s^2 + (2+4\alpha)s+1 = \alpha(s^2+4s)+2s+1=0$$

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \rightarrow \Delta(s) = (s^2+4s) + \beta(2s+1) = 0 \Rightarrow 1 + \beta \frac{2s+1}{s^2+4s} = 0$$



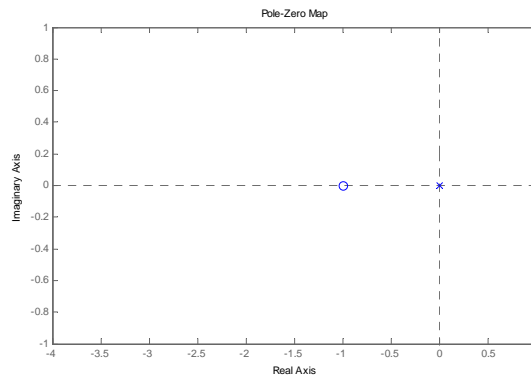
13

رسم مکان هندسی ریشه ها نسبت به دو متغیر



مثال ۵: مکان هندسی نسبت به تغییرات دو متغیر

$$kGH(s) = \frac{k(s+1)}{s^2(s+\alpha)}$$



رسم مکان هندسی ریشه ها نسبت به دو متغیر

ادامه مثال ۵:

$$GH(s) = \frac{(s+1)}{s^2(s+\alpha)}$$

$$\text{break point: } s(2s^2 + (\alpha + 3)s + 2\alpha) = 0$$

$$2s^2 + (\alpha + 3)s + 2\alpha = 0 \rightarrow s_{1,2} = \frac{-(\alpha + 3) \pm \sqrt{\alpha^2 - 10\alpha + 9}}{4}$$

$$\alpha^2 - 10\alpha + 9 = 0 \rightarrow \begin{matrix} \alpha = 9 \\ \alpha = 1 \end{matrix}$$

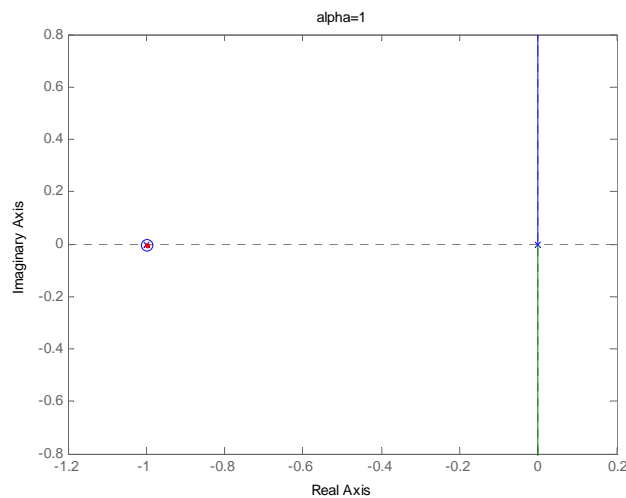
Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

15

رسم مکان هندسی ریشه ها نسبت به دو متغیر

$$\alpha = 1$$

ادامه مثال ۵:

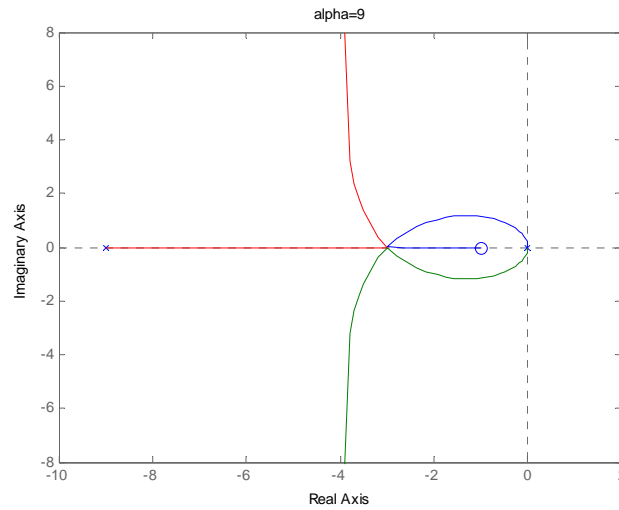


16

رسم مکان هندسی ریشه ها نسبت به دو متغیر

$$\alpha = 9$$

ادامه مثال ۵:

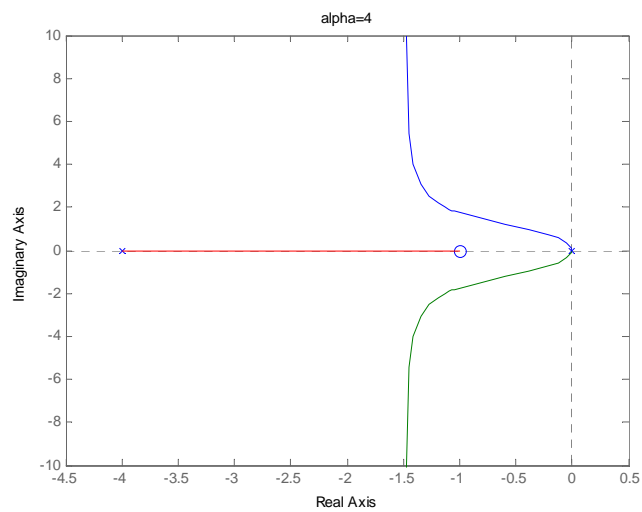


17

رسم مکان هندسی ریشه ها نسبت به دو متغیر

$$\alpha = 4$$

ادامه مثال ۵:



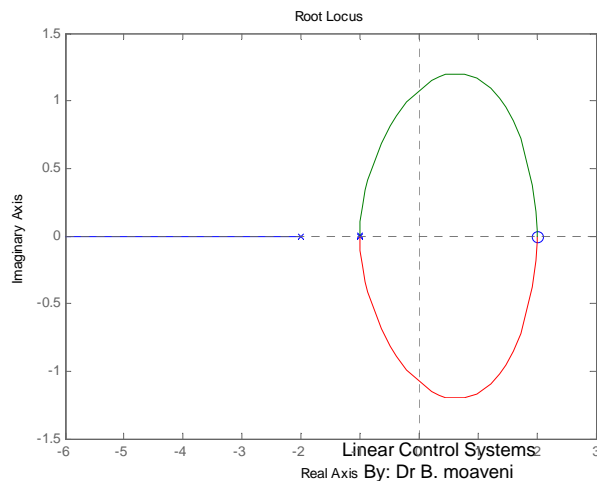
18

مکان هندسی ریشه ها و سیستم های غیر می نیمم فاز

سیستم های دارای صفر ناپایدار:

$$G(s) = \frac{s - \alpha}{\prod_j (s + p_j)}$$

با توجه به اینکه قطب های حلقه بسته به سمت صفرهای حلقه باز حرکت می نمایند، لذا امکان ناپایداری حلقه بسته به ازای بهره بالا، قطعاً وجود دارد.



مثال ۶:

$$G(s) = \frac{(s-2)^2}{(s+1)^2(s+2)}$$

19

سیستم های تاخیردار

$$G_d(s) = G(s)e^{-T_d s}$$

تقریب پاده برای تاخیر زمانی:

دستور MATLAB:

$$e^{-T_d s} = \frac{e^{-\frac{T_d s}{2}}}{e^{-\frac{T_d s}{2}}} = \frac{1 - \frac{T_d}{2}s}{1 + \frac{T_d}{2}s}$$

pade

$$e^{-T_d s} = \frac{e^{-\frac{T_d s}{2}}}{e^{-\frac{T_d s}{2}}} = \frac{1 - \frac{T_d}{2}s + \frac{T_d^2}{8}s^2}{1 + \frac{T_d}{2}s + \frac{T_d^2}{8}s^2}$$

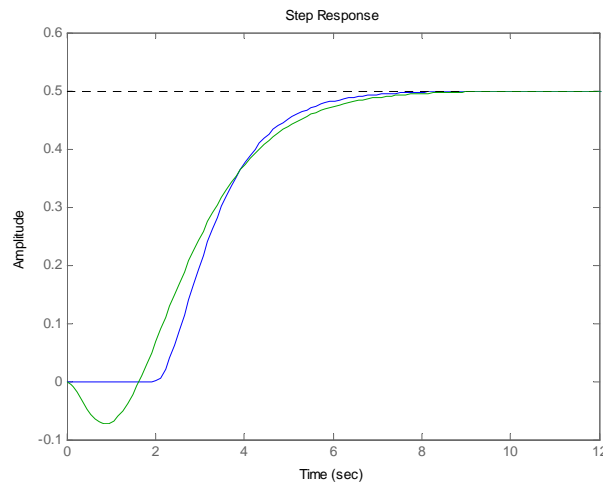
Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

20

رسم مکان هندسی ریشه های سیستم های تاخیر دار

$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + 3s + 2}$$

مثال ۷:

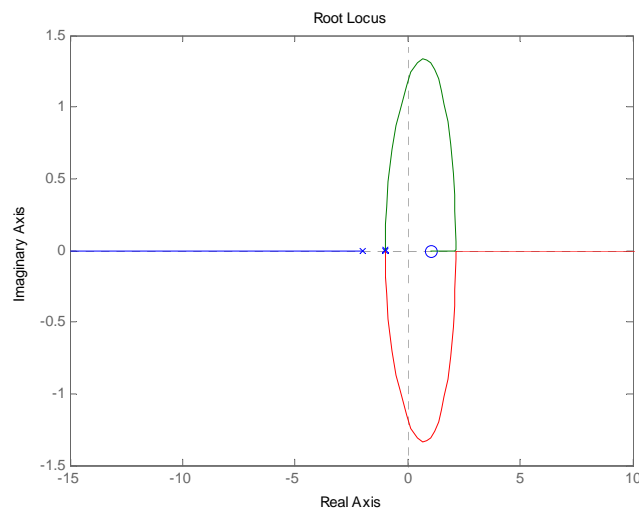


21

رسم مکان هندسی ریشه های سیستم های تاخیر دار

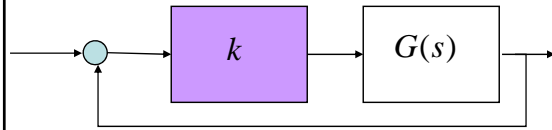
$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + 3s + 2}$$

ادامه مثال ۷:



طراحی بر اساس رسم مکان هندسی ریشه ها

مثال ۸: طراحی بهره ثابت



Desire Performance :

$$\begin{cases} T_s \leq 4 \text{ (sec)} \\ \%MP \leq \%5 \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

$$T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \leq 4 \Rightarrow -\xi\omega_n \leq -1$$

$$\%MP \leq \%5 \Rightarrow \xi > 0.7 \Rightarrow \theta \leq 45^\circ$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

23

طراحی بر اساس رسم مکان هندسی ریشه ها

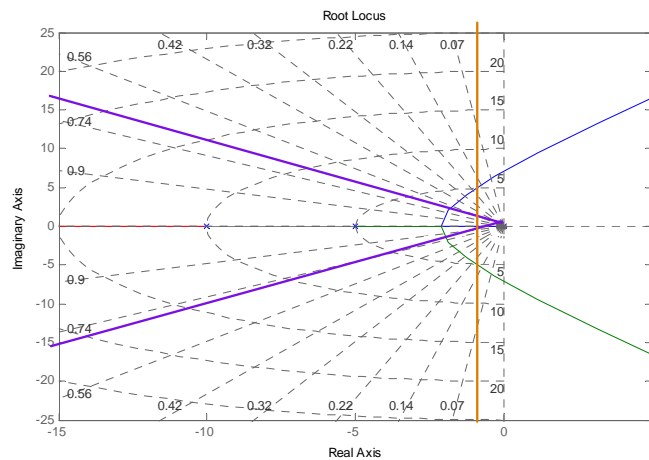
ادامه مثال ۸:

$$T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \leq 4 \Rightarrow -\xi\omega_n \leq -1$$

$$\%MP \leq \%5 \Rightarrow \xi > 0.7 \Rightarrow \theta \leq 45^\circ$$



$$0.7 \leq k \leq 1.6$$



طراحی جبران‌ساز پیش افت فاز بر اساس رسم مکان هندسی ریشه ها

مراحل طراحی جبران‌ساز پیش افت فاز (*Phase Lead*):

$$C(s) = \frac{s+z}{s+p}, \quad \boxed{-z > -p}$$

- ۱- مشخص نمودن خواص مطلوب
- ۲- تعبیر نمودن مشخصات مطلوب به محل قطب
- ۳- رسم مکان هندسی ریشه های معادله مشخصه جبران نشده و تحلیل مساله طراحی
- ۴- در صورت نیاز به جبران‌ساز، صفر جبران‌ساز را در زیر محل قطب های مطلوب (یا سمت چپ اولین دو قطب حقیقی) قرار دهید.
- ۵- محل قطب جبران‌ساز را بطوری تعیین کنید که شرط زاویه برای قطب مطلوب برآورده گردد.

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

طراحی جبران‌ساز پیش افت فاز بر اساس رسم مکان هندسی ریشه ها

مثال ۹:

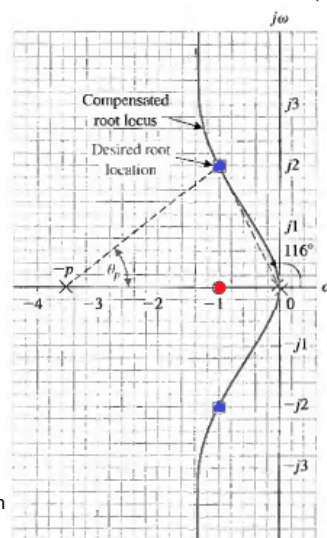
$$kGH(s) = \frac{k}{s^2}$$

$$\text{desire performance: } \begin{cases} t_s \leq 4 \\ \%MP \leq \%35 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -\xi\omega_n \leq -1 \\ \xi \geq 0.32 \rightarrow \theta < 71^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{-1 \pm j2}$$

انتخاب محل صفر: $\boxed{z = -1}$



Linear Control System
By: Dr B. moaveni

طراحی جبران‌ساز پیش‌افت فاز بر اساس رسم مکان هندسی ریشه‌ها

مثال ۹:

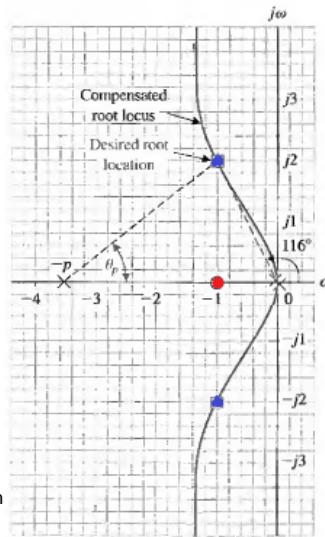
$$kGH(s) = \frac{k}{s^2}$$

شرط زاویه برای قطب مطلوب:

$$90 - 2(116) - \theta_p = -180 \rightarrow \theta_p = 38^\circ$$

$$\Rightarrow -p = -3.6$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{s+1}{s+3.6}$$



Linear Control System
By: Dr B. moaveni

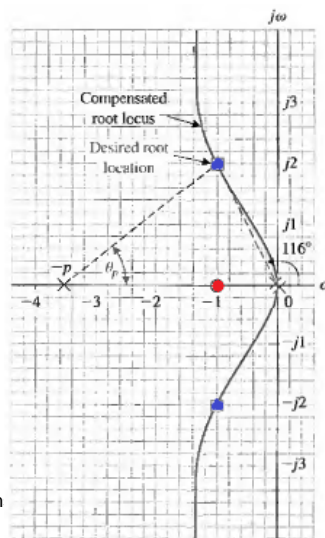
طراحی جبران‌ساز پیش‌افت فاز بر اساس رسم مکان هندسی ریشه‌ها

مثال ۹:

تعیین بهره ثابت:

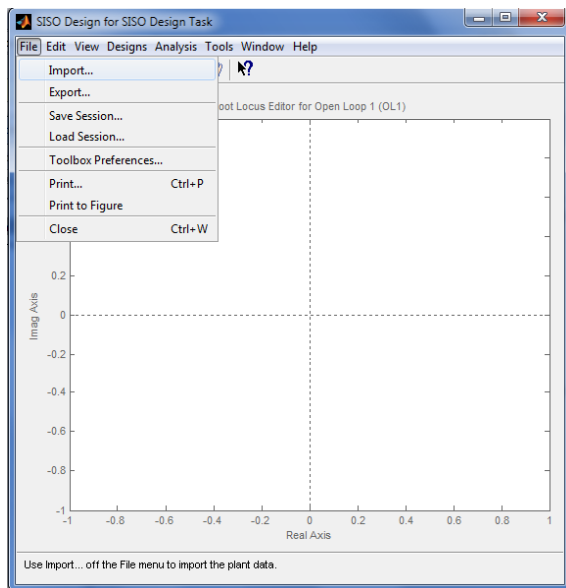
با استفاده از شرط دامنه در محل قطب مطلوب

$$k = \frac{2.23^2 \times 3.25}{2} = 8.2$$



Linear Control System
By: Dr B. moaveni

طراحی جبرانساز پیش افت فاز با استفاده از sisotool

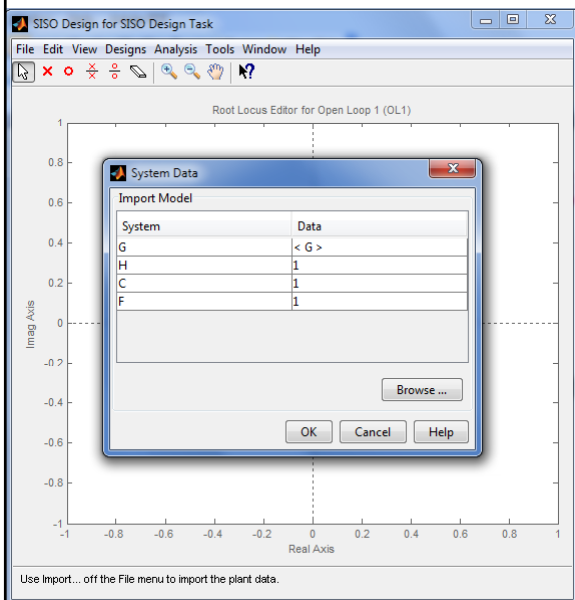


مثال ۹ (sisotool):

$$GH(s) = \frac{1}{s^2}$$

29

طراحی جبرانساز پیش افت فاز با استفاده از sisotool

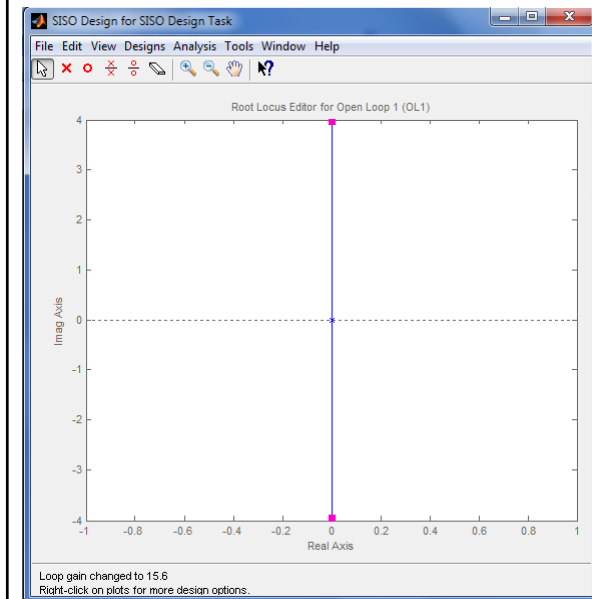


مثال ۹ (sisotool):

$$GH(s) = \frac{1}{s^2}$$

30

طراحی جبران‌ساز پیش‌افت فاز با استفاده از sisotool



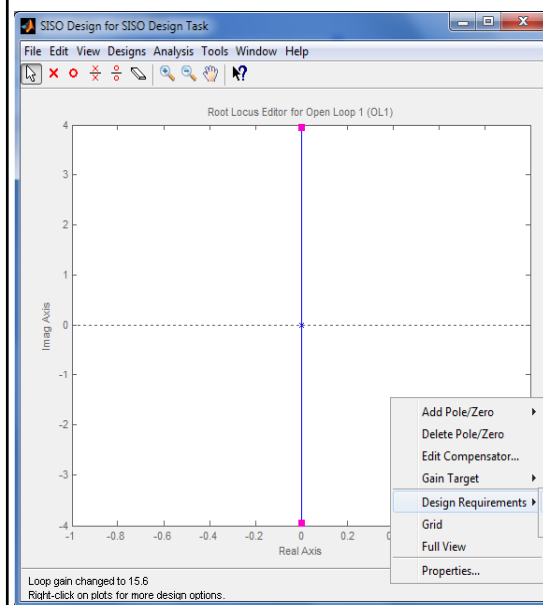
مثال ۹ (sisotool):

رسم مکان هندسی سیستم
جبران نشده

$$GH(s) = \frac{1}{s^2}$$

31

طراحی جبران‌ساز پیش‌افت فاز با استفاده از sisotool



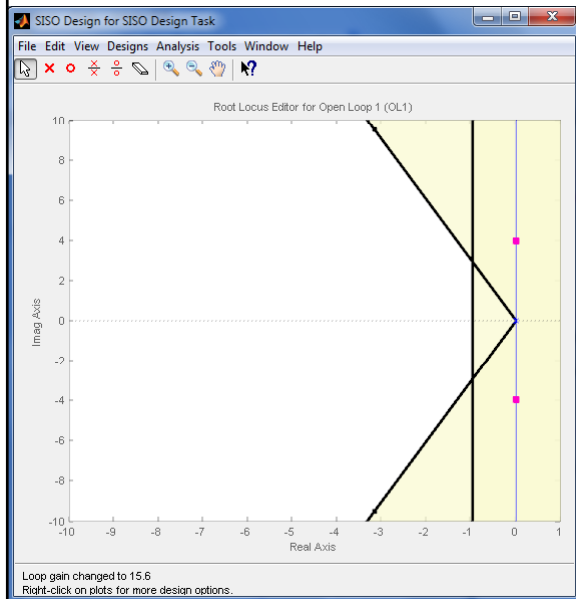
مثال ۹ (sisotool):

مشخص نمودن ناحیه های
مد نظر با توجه محدودیت های
مطرح در طراحی

$$GH(s) = \frac{1}{s^2}$$

32

طراحی جبرانساز پیش افت فاز با استفاده از sisotool



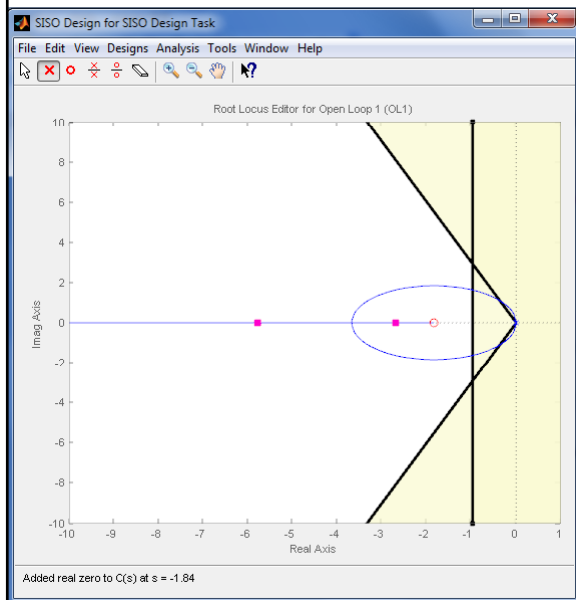
مثال ۹ (sisotool):

مشخص نمودن ناحیه های
مد نظر با توجه محدودیت های
مطرح در طراحی

$$GH(s) = \frac{1}{s^2}$$

33

طراحی جبرانساز پیش افت فاز با استفاده از sisotool



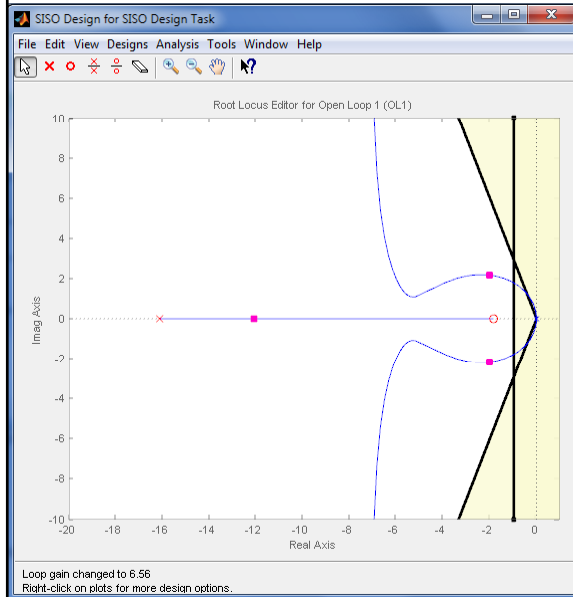
مثال ۹ (sisotool):

- انتخاب محل قطب های مطلوب $-2 \pm j2$
- انتخاب و اضافه نمودن آن محل صفر جبرانساز بر اساس محل قطب مطلوب $z = -2$

34

طراحی جبرانساز پیش افت فاز با استفاده از sisotool

مثال ۹ (sisotool):

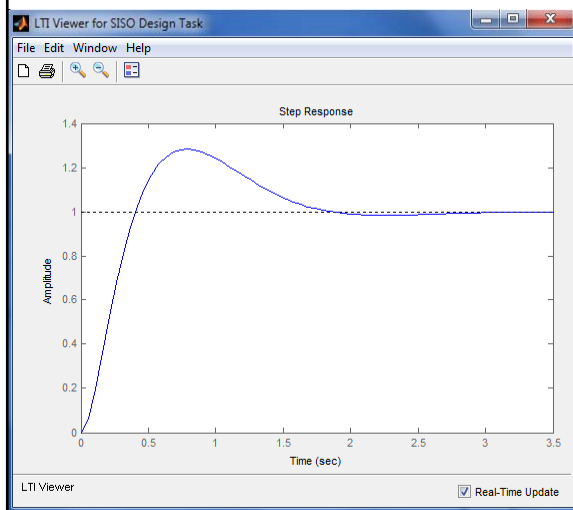


- اضافه نمودن قطب به منظور رسیدن به محل قطب مطلوب $-2 \pm j2$

35

طراحی جبرانساز پیش افت فاز با استفاده از sisotool

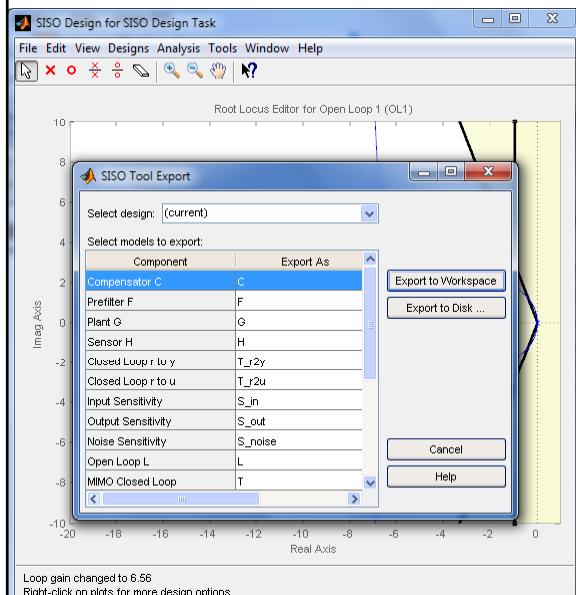
مثال ۹ (sisotool):



- مشاهده پاسخ پله (با استفاده از بخش Analysis)

36

طراحی جبرانساز پیش افت فاز با استفاده از sisotool



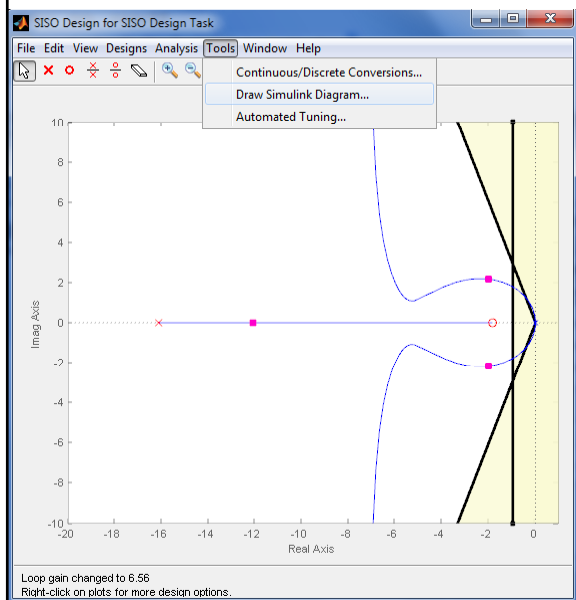
مثال ۹ (sisotool):

• دریافت اطلاعات جبرانساز

$$\frac{57.4894 (s+1.84)}{(s+16.12)}$$

37

طراحی جبرانساز پیش افت فاز با استفاده از sisotool



مثال ۹ (sisotool):

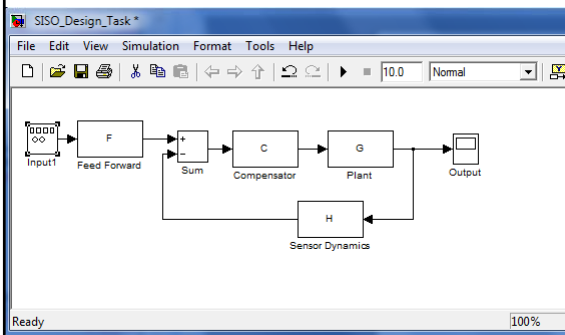
• استخراج مدل simulink

38

طراحی جبران‌ساز پیش‌افت فاز با استفاده از sisotool

مثال ۹ (sisotool):

• استخراج مدل simulink



Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

39

قابلیت جبران‌ساز پیش‌افت فاز:

۱- افزایش سرعت سیستم (افزایش پهنای باند).

۲- کاهش زمان نشست.

۳- کاهش فرجهش ماکزیمم

* توجه: در صورتی که با استفاده از روند طراحی گفته شده در بالا به خواص مطلوب دست نیافتید. لازم است محل صفر جبران‌ساز را تغییر داده و روند طراحی را مجدداً انجام داد.

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

40

طراحی جبران‌ساز پیش افت فاز بر اساس رسم مکان هندسی ریشه‌ها

پروژه ۱:

الف) برای سیستمی با تابع تبدیل زیر جبران‌سازی طراحی نمایید که به شرایط مطلوب $\xi = 0.45$ و $\omega_n \leq 2$ دست یابد.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

ب) برای سیستم فوق جبران‌سازی طراحی نمایید که به شرایط مطلوب فوق و زمان نشست کمتر (مساوی نباشد) از ۴ ثانیه بتوان دست یافت.

طراحی جبران‌ساز پس افت فاز (Phase Lag):

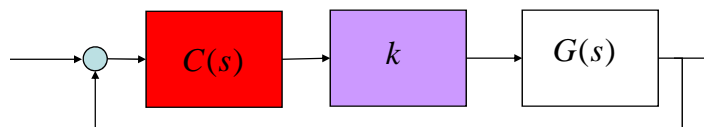
جبران‌ساز پس افت فاز:

$$C(s) = k_c \frac{s + z_c}{s + p_c}, \quad -z_c < -p_c$$

• این جبران‌ساز در مواقعی که پاسخ حالت گذرا مطلوب است ولیکن نیاز به بهبود وضعیت خطای حالت ماندگار وجود دارد، کاربرد خواهد داشت.

به این منظور، محل صفر و قطب جبران‌ساز بسیار نزدیک به هم انتخاب و همچنین نزدیک به مبدا انتخاب می‌گردند.

$$C(s) = \frac{p_c}{z_c} \frac{s + z_c}{s + p_c} = k_c \frac{s + z_c}{s + p_c}$$



طراحی جبران‌ساز پس افت فاز (Phase Lag):

$$|C(s_1)| = \frac{p_c}{z_c} \frac{s_1 + z_c}{s_1 + p_c} = k_c \frac{|s_1 + z_c|}{|s_1 + p_c|} \approx k_c$$

k_0 بهره لازم برای رسیدن به پاسخ حالت گذرا مطلوب:

$$k_0 |GH(s_1)| = 1 \Rightarrow |GH(s_1)| = \frac{1}{k_0}$$

k بهره لازم برای رسیدن به خطای حالت ماندگار مطلوب:

$$k |GH(s_1)| |C(s_1)| = 1 \Rightarrow k \frac{1}{k_0} k_c = 1 \Rightarrow \boxed{k_c = \frac{k_0}{k}} \Rightarrow p_c = k_c z_c$$

طراحی جبران‌ساز پس افت فاز (Phase Lag):

روند طراحی:

۱- رسم مکان هندسی ریشه های سیستم جبران نشده و تعیین بهره k_0 به منظور دست یافتن به نسبت میرایی مطلوب (یا خواص حالت گذرای مطلوب)

$$k_0 |GH(s)| = 1 \Rightarrow |GH(s)| = \frac{1}{k_0}$$

۲- تعیین بهره k به منظور برآورده شدن خواص حالت ماندگار (خطای حالت ماندگار مورد نظر).

$$e_{ss} |_{r(t)=u(t)} = \frac{1}{1+k_p} = \frac{1}{1+\lim_{s \rightarrow 0} k C(s) GH(s)} = \frac{1}{1+\lim_{s \rightarrow 0} k GH(s)}$$

$$e_{ss} |_{r(t)=u(t)} = \frac{1}{k_v}$$

$$e_{ss} |_{r(t)=0.5t^2 u(t)} = \frac{1}{k_a}$$

طراحی جبران‌ساز پس افت فاز (*Phase Lag*):

روند طراحی:

۳- تعیین بهره k_c با استفاده از:

$$k_c = \frac{k_0}{k} = \frac{\text{gain to satisfy the TRANSIENT response}}{\text{gain to satisfy the STEADY STATE response}}$$

۴- تعیین محل صفر و قطب با انتخاب صفر نزدیک به مبدا و استفاده از رابطه:

$$p_c = k_c z_c$$

۵- مشاهده پاسخ زمانی و بررسی نتایج.

طراحی جبران‌ساز پس افت فاز (*Phase Lag*):

مثال:

سیستم زیر را در نظر بگیرید. جبران‌سازی طراحی نمایید که به شرایط زیر را برآورده نماید:

$$\begin{cases} \xi = 0.8 \\ e_{ss} |_{r(t)=u(t)} = 0.0845 \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{130}{(s+10)(s+30)}$$

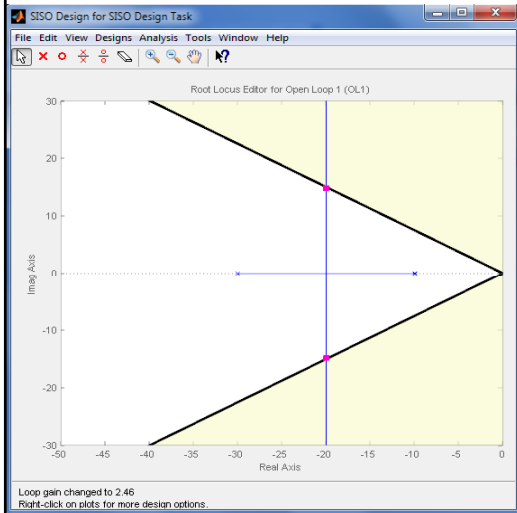
طراحی جبران‌ساز پس افت فاز (Phase Lag):

$$\begin{cases} \xi = 0.8 \\ e_{ss} |_{r(t)=u(t)} = 0.0845 \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{130}{(s+10)(s+30)}$$

مثال ۱۰:

تعیین بهره k_0



$$\xi = 0.8 \Rightarrow k_0 = 2.46$$

$$e_{ss_k_0} = \frac{1}{1 + \frac{130 \times k_0}{10 \times 30}} = 0.48 > 0.0845$$

systems
veni

47

طراحی جبران‌ساز پس افت فاز (Phase Lag):

$$\begin{cases} \xi = 0.8 \\ e_{ss} |_{r(t)=u(t)} = 0.0845 \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{130}{(s+10)(s+30)}$$

مثال ۱۰:

تعیین بهره k

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \frac{130 \times k}{10 \times 30}} = 0.0845 \Rightarrow k = 25 \quad \Rightarrow k_c = \frac{k_0}{k} = \frac{2.46}{25} = 0.0984$$

choose z_c arbitrary
close to origin

$$\Rightarrow p_c = k_c z_c = 0.0984 \times 1.5 \approx 0.15$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{0.0984(s+1.5)}{(s+0.15)}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

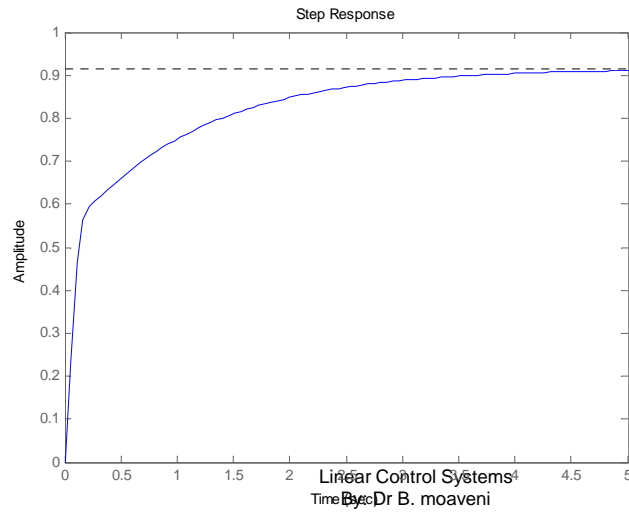
48

طراحی جبران ساز پس افت فاز (Phase Lag):

$$\begin{cases} \xi = 0.8 \\ e_{ss} |_{r(t)=u(t)} = 0.0845 \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{130}{(s+10)(s+30)}$$

مثال ۱۰:



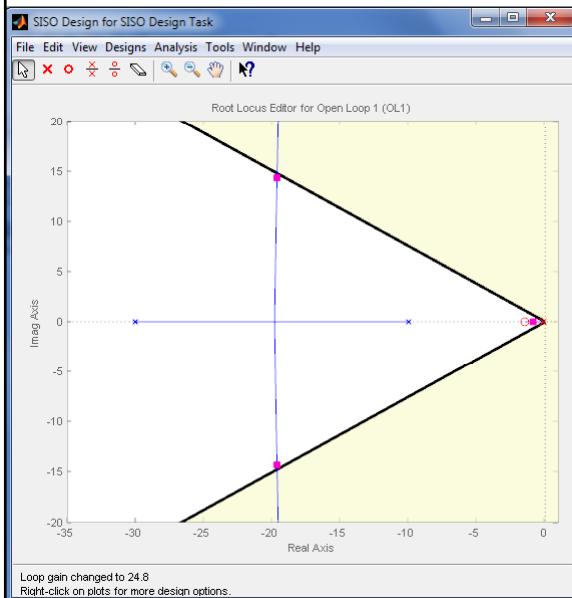
49

طراحی جبران ساز پس افت فاز (Phase Lag):

مثال ۱۰:

مکان هندسی ریشه های سیستم جبران شده:

$$C(s)GH(s)$$



50

طراحی جبران‌ساز پیش افت فاز بر اساس رسم مکان هندسی ریشه ها

پروژه ۲:

الف) برای سیستمی با تابع تبدیل زیر جبران‌سازی طراحی نمایید که شرایط مطلوب زیر را برآورده نماید.

$$G(s) = \frac{2(s+1)}{(s^2 + 2s + 2)}$$

$$\begin{cases} \%MP \leq 5\% \\ e_{ss} = 0.1 \end{cases}$$

طراحی جبران‌ساز *Lead-Lag*:

در صورتی که به خواص هر دو جبران‌ساز **lead** و **lag** نیاز باشد لازم است از ترکیب آنها به صورت **lead-lag** استفاده نمود. مثال زیر به منظور روشن شدن بحث راهگشا است.

مثال ۱۱:

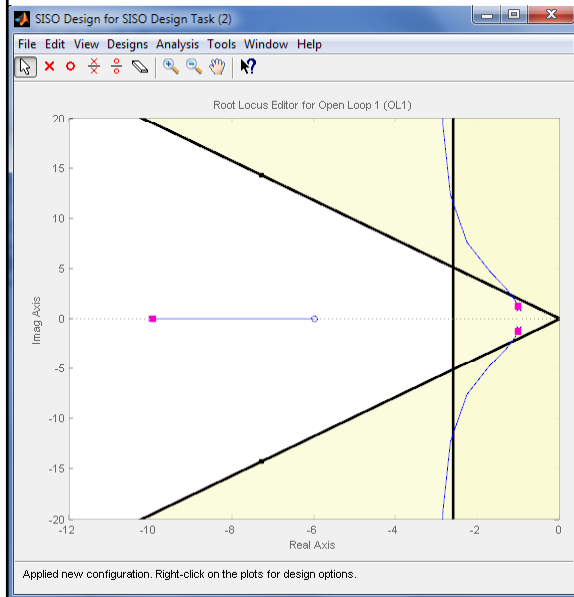
$$GH(s) = \frac{s+6}{(s+10)(s^2 + 2s + 2)}$$

$$\begin{cases} \%MP \leq 20\% \\ t_s \leq 1.5 \\ e_{ss} |_{r(t)=u(t)} \leq 0.001 \end{cases}$$

طراحی جبران‌ساز *Lead-Lag*:

ادامه مثال ۱۱:

با استفاده از بهره تناسبی امکان برآورده شدن خواص حالت گذرا وجود ندارد. در نتیجه به جبران‌ساز *lead* نیاز است.



53

طراحی جبران‌ساز *Lead-Lag*:

ادامه مثال ۱۱:

قطب های غالب مطلوب

$$-4 \pm j4$$

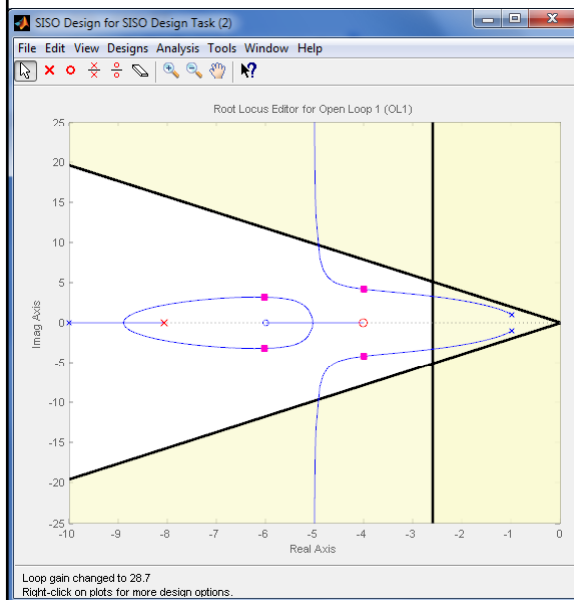
محل صفر جبران ساز

$$-4$$

تابع تبدیل جبران‌ساز:

$$57.6235 (s+4.02)$$

$$\frac{1}{(s+8.069)}$$



54

طراحی جبران‌ساز *Lead-Lag*:

ادامه مثال ۱۱:

قطب‌های غالب مطلوب

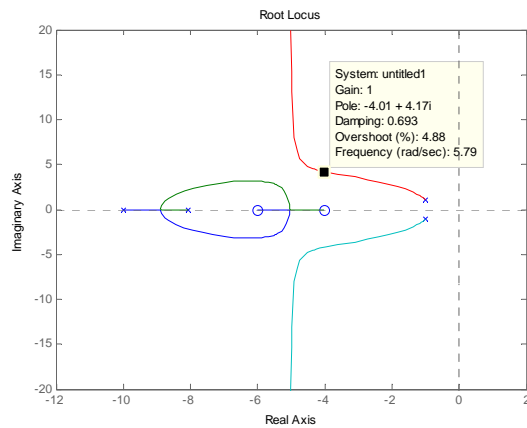
$$-4 \pm j4$$

محل صفر جبران‌ساز

$$-4$$

تابع تبدیل جبران‌ساز:

$$\frac{57.6235 (s+4.02)}{(s+8.069)}$$



Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

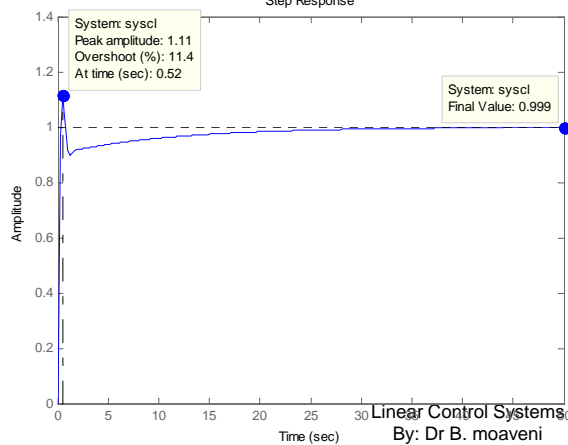
55

طراحی جبران‌ساز *Lead-Lag*:

ادامه مثال ۱۱:

(طراحی بخش *lag*)

پاسخ پله سیستم جبران‌شده



$$e_{ss} = \frac{1}{1 + G(0)C_{lead}(0)} = 0.001 \Rightarrow k = 116$$

$$\Rightarrow k_c = 0.0086$$

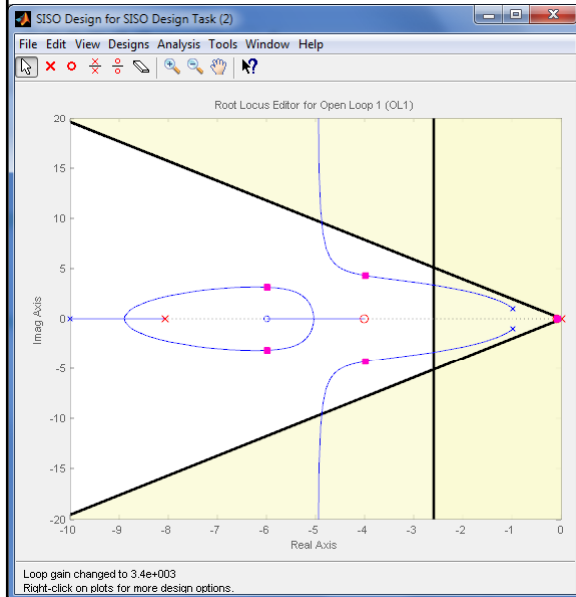
$$z_c = 0.1 \rightarrow p_c = 0.00086$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

56

طراحی جبران‌ساز *Lead-Lag*:

ادامه مثال ۱۱:
(در حضور *lead-lag*)



>> C

Transfer function:
 $0.4967 s^2 + 2.046 s + 0.1997$

 $s^2 + 8.07 s + 0.006956$

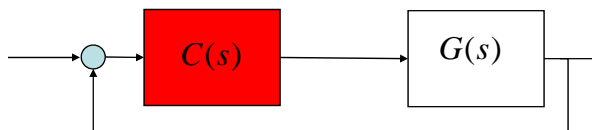
57

طراحی کنترل کننده *PD*:

کنترل کننده *PD*:

$$C(s) = k_D s + k_p = k_D \left(s + \frac{k_p}{k_D} \right) = k_D (s + z_c)$$

- این کنترل کننده به منظور دست یافتن به پاسخ حالت گذرای مطلوب کاربرد دارد.



Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

58

طراحی کنترل کننده PD:

روند طراحی کنترل کننده PD:

۱- مکان هندسی ریشه های سیستم جبران نشده را رسم کنید و لزوم اعمال یک کنترل کننده PD را بررسی کنید.

۲- با توجه به خواص مطلوب حلقه بسته (s_1) ، محدوده مناسب صفحه را مشخص کنید و قطب های (غالب) مطلوب را مشخص نمایید.

۳- محل صفر کنترل کننده PD را با استفاده از شرط زاویه برای قطب غالب پیدا کنید.

$$\theta_{z_c} + \sum_i \theta_{z_i} - \sum_j \theta_{p_j} = (2n+1)\pi$$

طراحی کنترل کننده PD:

روند طراحی کنترل کننده PD:

۴- با استفاده از شرط دامنه در محل قطب های غالب (s_1) بهره k_D را بدست آورید.

۵- بهره k_p را با استفاده از رابطه زیر محاسبه نمایید.

$$z_c = \frac{k_p}{k_D} \Rightarrow k_p = z_c k_D$$

طراحی کنترل کننده PD:

مثال ۱۲:

برای سیستم زیر یک کنترل کننده PD طراحی نمایید که شرایط زیر را برآورده نماید.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+5)}$$

$$\begin{cases} \xi = 0.707 \\ t_s = 2(\text{sec}) \end{cases}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

61

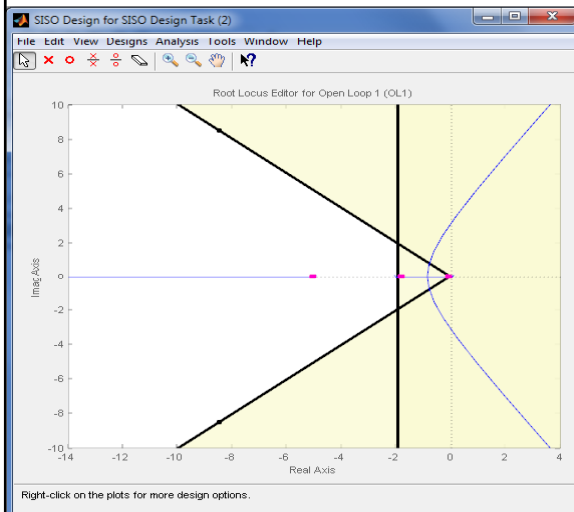
طراحی کنترل کننده PD:

ادامه مثال ۱۲:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+5)} \quad \begin{cases} \xi = 0.707 \\ t_s = 2(\text{sec}) \end{cases}$$

ابتدا رسم مکان هندسی سیستم جبران نشده و مشخص نمودن شرایط مطلوب

* توجه: با استفاده از بهره تناسبی امکان پایدارسازی وجود ندارد.



62

طراحی کنترل کننده PD:

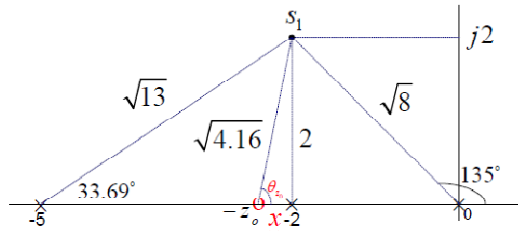
$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+5)} \quad \begin{cases} \xi = 0.707 \\ t_s = 2(\text{sec}) \end{cases}$$

ادامه مثال ۱۲:

۲- انتخاب محل قطب های
(غالب) مطلوب

$$s_1 = -2 \pm j2$$

۳- پیدا نمودن محل صفر با
استفاده از شرط زاویه در محل
قطب مطلوب



$$\theta_{z_0} - (33.69 + 90 + 135) = -180$$

$$\Rightarrow \theta_{z_0} = 78.69$$

$$\Rightarrow x = 2 \times \tan(78.69) = 0.4$$

$$\Rightarrow z_0 = 2.4$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

63

طراحی کنترل کننده PD:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+5)} \quad \begin{cases} \xi = 0.707 \\ t_s = 2(\text{sec}) \end{cases}$$

ادامه مثال ۱۲:

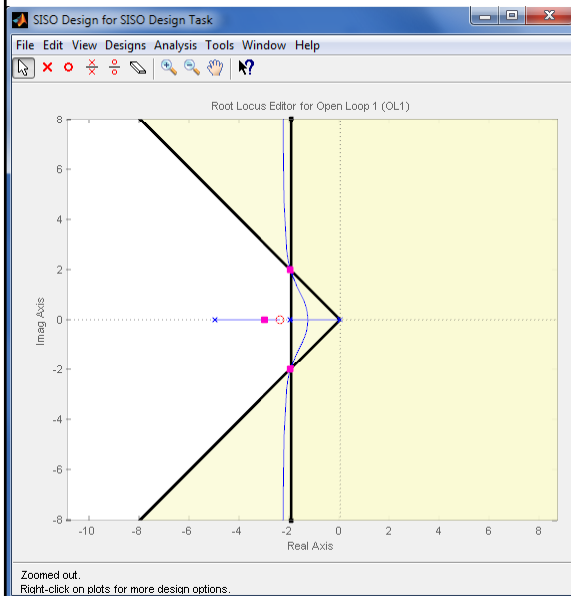
۴- یافتن بهره k_D با استفاده از
شرط دامنه برای قطب مطلوب

$$k_D = \frac{(\sqrt{8})(2)(\sqrt{13})}{(\sqrt{4.16})} \cong 10$$

۵- محاسبه k_p

$$k_p = z_0 \times k_D = 24$$

$$\Rightarrow C(s) = 24 + 10s$$

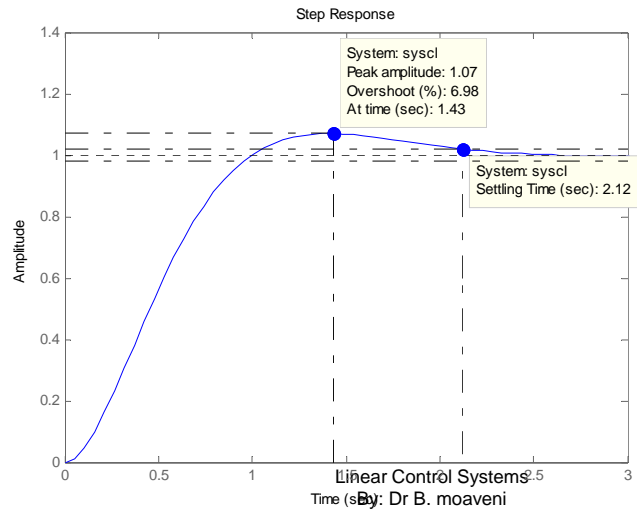


64

طراحی کنترل کننده PD:

ادامه مثال ۱۲:

مشاهده پاسخ زمانی

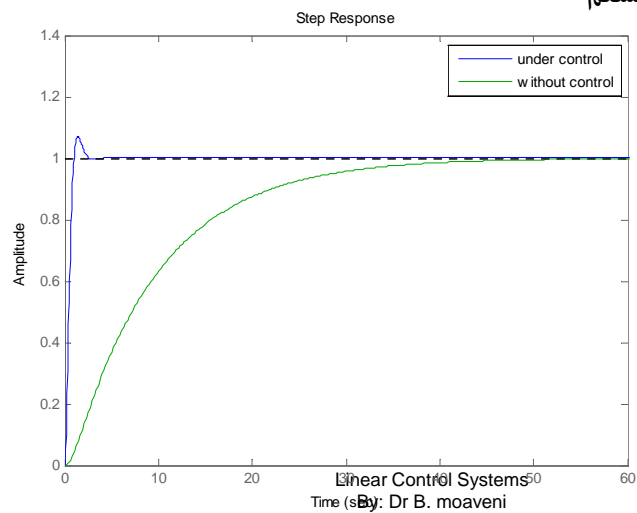


65

طراحی کنترل کننده PD:

ادامه مثال ۱۲:

مقایسه پاسخ زمانی سیستم با و بدون کنترل کننده



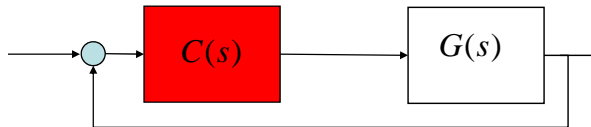
66

طراحی کنترل کننده PI:

کنترل کننده PI:

$$C(s) = k_p + \frac{k_I}{s} = \frac{k_p(s + \frac{k_I}{k_p})}{s} = \frac{k_p(s + z_0)}{s}$$

- این کنترل کننده به منظور دست یافتن به پاسخ حالت ماندگار مطلوب (افزایش نوع سیستم و حذف خطای حالت ماندگار) کاربرد دارد.



Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

67

طراحی کنترل کننده PI:

روند طراحی کنترل کننده PI:

* روند طراحی بسیار شبیه طراحی کنترل کننده PD است.

- ۱- مکان هندسی ریشه های سیستم جبران نشده را به همراه قطب در مبدا کنترل کننده رسم کنید.
- ۲- با توجه به خواص مطلوب حلقه بسته محدوده مناسب صفحه را مشخص کنید و قطب های (غالب) مطلوب (s_1) را مشخص نمایید.
- ۳- محل صفر کنترل کننده PI را با استفاده از شرط زاویه برای قطب غالب پیدا کنید.

$$\theta_{z_0} + \sum_i \theta_{z_i} - \sum_j \theta_{p_j} = (2n + 1)\pi$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

68

طراحی کنترل کننده PI:

روند طراحی کنترل کننده PI:

۴- با استفاده از شرط دامنه در محل قطب های غالب (s_1) بهره k_p را بدست آورید.

۵- بهره k_p را با استفاده از رابطه زیر محاسبه نمایید.

$$z_c = \frac{k_I}{k_p} \Rightarrow k_I = k_p z_c$$

طراحی کنترل کننده PI:

مثال ۱۳:

برای سیستم زیر یک کنترل کننده PI طراحی نمایید که خطای حالت ماندگار نسبت به ورودی پله را از بین برده و شرایط زیر را برآورده نماید.

$$G(s) = \frac{1}{(s+3)(s+7)}$$

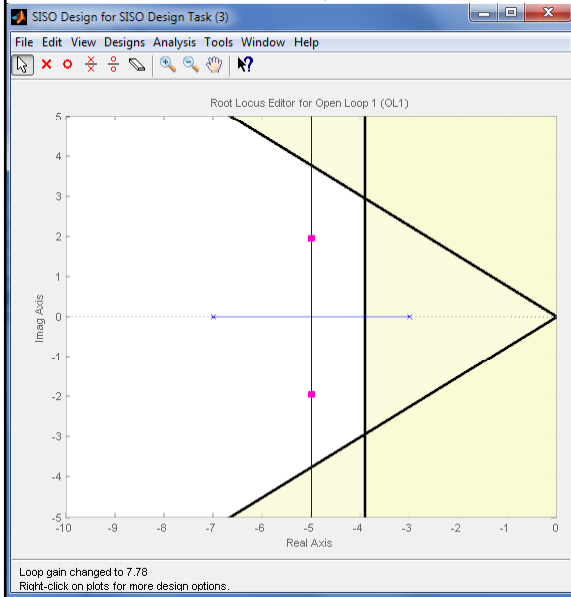
$$\begin{cases} \xi = 0.8 \\ t_s = 1(\text{sec}) \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+3)(s+7)}$$

$$\begin{cases} \xi = 0.8 \\ t_s = 1(\text{sec}) \end{cases}$$

طراحی کنترل کننده PI:

ادامه مثال ۱۳:



۱- رسم نمودار بود سیستم جبران نشده.

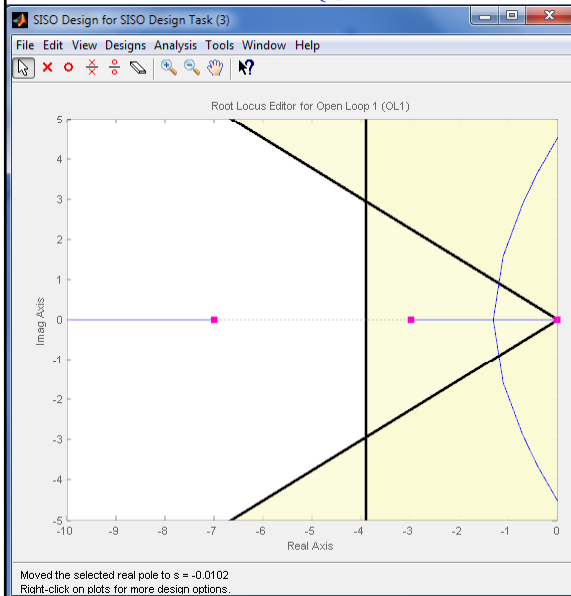
71

$$G(s) = \frac{1}{(s+3)(s+7)}$$

$$\begin{cases} \xi = 0.8 \\ t_s = 1(\text{sec}) \end{cases}$$

طراحی کنترل کننده PI:

ادامه مثال ۱۳:



۱- رسم نمودار بود سیستم جبران نشده با حضور قطب در مبدا کنترل کننده.

۲- تعیین محل قطب مطلوب

$$-4 \pm 3j$$

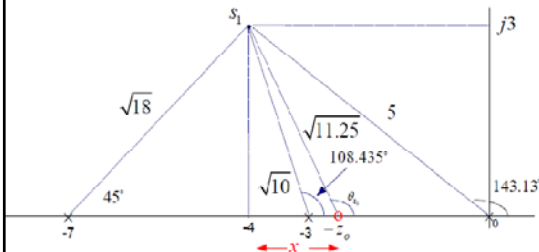
72

$$G(s) = \frac{1}{(s+3)(s+7)}$$

$$\begin{cases} \xi = 0.8 \\ t_s = 1(\text{sec}) \end{cases}$$

طراحی کنترل کننده PI:

ادامه مثال ۱۳:



۳- تعیین محل صفر کنترل کننده با استفاده از شرط زاویه

$$\theta_{z_0} - (143.13 + 108.435 + 45) = -180$$

$$\Rightarrow \theta_{z_0} = 116.565$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{\tan(180 - 116.565)} \Rightarrow z_0 = 4 - x = 2.5 = \frac{k_I}{k_p}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

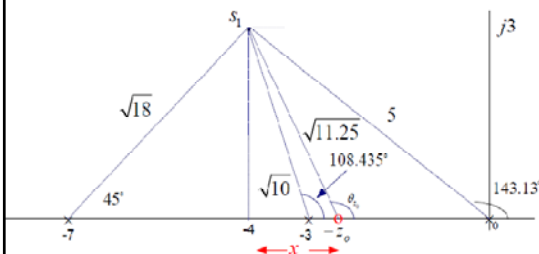
73

$$G(s) = \frac{1}{(s+3)(s+7)}$$

$$\begin{cases} \xi = 0.8 \\ t_s = 1(\text{sec}) \end{cases}$$

طراحی کنترل کننده PI:

ادامه مثال ۱۳:



۴- تعیین بهره k_p با استفاده از شرط دامنه

$$k_p = \frac{(\sqrt{18})(\sqrt{10})(5)}{(\sqrt{11.25})} = 20$$

۵- تعیین بهره انتگرالگیر

$$\Rightarrow k_I = 20 \times 2.5 = 50$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

74

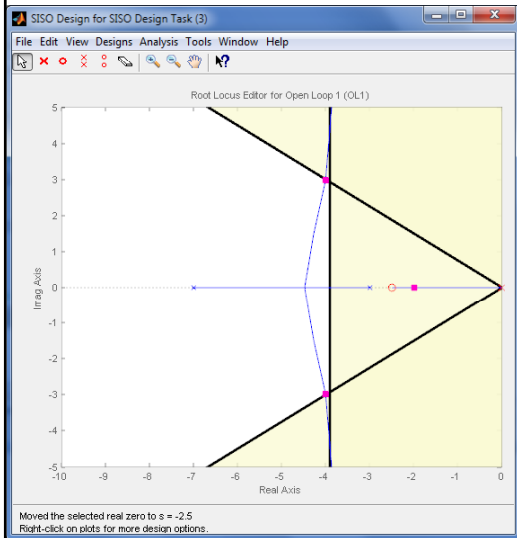
$$G(s) = \frac{1}{(s+3)(s+7)}$$

$$\begin{cases} \xi = 0.8 \\ t_s = 1(\text{sec}) \end{cases}$$

طراحی کنترل کننده PI:

ادامه مثال ۱۳:

رسم مکان هندسی ریشه های سیستم جبران شده و بررسی نتایج



systems
aveni

75

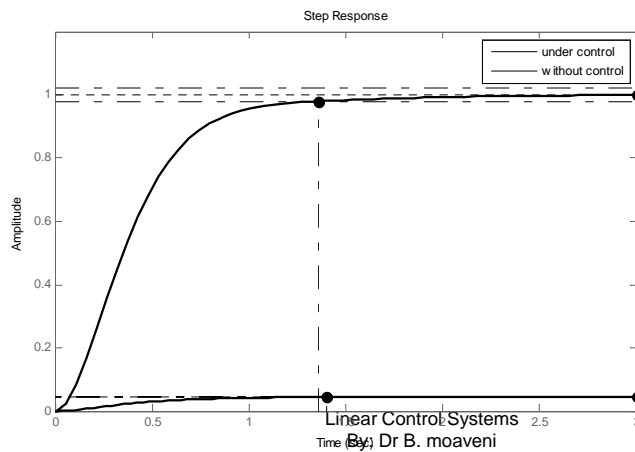
$$G(s) = \frac{1}{(s+3)(s+7)}$$

$$\begin{cases} \xi = 0.8 \\ t_s = 1(\text{sec}) \end{cases}$$

طراحی کنترل کننده PI:

ادامه مثال ۱۳:

پاسخ پله با حضور کنترل کننده و بدون حضور کنترل کننده



Linear Control Systems
By Dr B. moaveni

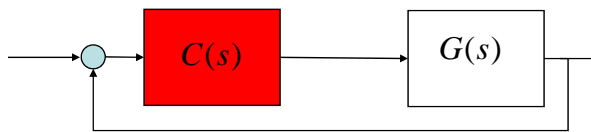
76

طراحی کنترل کننده PID:

کنترل کننده PID:

$$C(s) = k_p + \frac{k_I}{s} + k_D s = \bar{k}_D (s + z_{PD}) \frac{\bar{k}_p (s + z_{PI})}{s}$$

- این کنترل کننده به منظور دست یافتن به خواص هر دو کنترل کننده PI و PD کاربرد دارد.



Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

77

طراحی کنترل کننده PID:

روند طراحی کنترل کننده PID:

- ۱- مکان هندسی ریشه های سیستم جبران نشده را رسم نموده و تحلیل نمایید.
- ۲- یک کنترل کننده PD به منظور دست یافتن به خواص حالت گذرای مطلوب حلقه بسته طراحی نمایید.
- ۳- یک کنترل کننده PI به منظور دست یافتن به خواص حالت ماندگار مطلوب حلقه بسته طراحی نمایید.
- ۴- با رسم مکان هندسی سیستم جبران شده و مشاهده پاسخ زمانی درستی طراحی را بررسی نمایید.

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

78

طراحی کنترل کننده PID:

پروژه

برای سیستم زیر یک کنترل کننده طراحی نمایید که شرایط زیر را برآورده نماید.

$$G(s) = \frac{s + 10}{(s + 1)(s + 2)(s + 12)}$$

$$\begin{cases} \%MP \leq \%20 \\ t_s = 1.5(\text{sec}) \\ e_{ss} |_{r(t)=u(t)} = 0 \end{cases}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

79

ویژگی های جبران سازها و کنترل کننده ها:

Table 9.7 Types of cascade compensators

Function	Compensator	Transfer function	Characteristics
Improve steady-state error	PI	$K \frac{s + z_c}{s}$	<ol style="list-style-type: none"> Increases system type. Error becomes zero. Zero at $-z_c$ is small and negative. Active circuits are required to implement.
Improve steady-state error	Lag	$K \frac{s + z_c}{s + p_c}$	<ol style="list-style-type: none"> Error is improved but not driven to zero. Pole at $-p_c$ is small and negative. Zero at $-z_c$ is close to, and to the left of, the pole at $-p_c$. Active circuits are not required to implement.
Improve transient response	PD	$K(s + z_c)$	<ol style="list-style-type: none"> Zero at $-z_c$ is selected to put design point on root locus. Active circuits are required to implement. Can cause noise and saturation; implement with rate feedback or with a pole (lead).
Improve transient response	Lead	$K \frac{s + z_c}{s + p_c}$	<ol style="list-style-type: none"> Zero at $-z_c$ and pole at $-p_c$ are selected to put design point on root locus. Pole at $-p_c$ is more negative than zero at $-z_c$. Active circuits are not required to implement.

ویژگی های جبران ساز ها و کنترل کننده ها:

Table 9.7 Types of cascade compensators

Function	Compensator	Transfer function	Characteristics
Improve steady-state error and transient response	PID	$K \frac{(s + z_{lag})(s + z_{lead})}{s}$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Lag zero at $-z_{lag}$ and pole at origin improve steady-state error. 2. Lead zero at $-z_{lead}$ improves transient response. 3. Lag zero at $-z_{lag}$ is close to, and to the left of, the origin. 4. Lead zero at $-z_{lead}$ is selected to put design point on root locus. 5. Active circuits required to implement. 6. Can cause noise and saturation; implement with rate feedback or with an additional pole.
Improve steady-state error and transient response	Lag-lead	$K \frac{(s + z_{lag})(s + z_{lead})}{(s + p_{lag})(s + p_{lead})}$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Lag pole at $-p_{lag}$ and lag zero at $-z_{lag}$ are used to improve steady-state error. 2. Lead pole at $-p_{lead}$ and lead zero at $-z_{lead}$ are used to improve transient response. 3. Lag pole at $-p_{lag}$ is small and negative. 4. Lag zero at $-z_{lag}$ is close to, and to the left of, lag pole at $-p_{lag}$. 5. Lead zero at $-z_{lead}$ and lead pole at $-p_{lead}$ are selected to put design point on root locus. 6. Lead pole at $-p_{lead}$ is more negative than lead zero at $-z_{lead}$. 7. Active circuits are not required to implement.

10.9.7



بسمه تعالی

سیستم های کنترل کلاسیک

Lecture 7

تحلیل پایداری به روش پاسخ فرکانسی

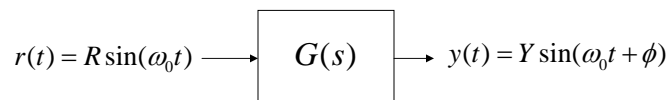
Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

1

مقدمه

پس از بررسی و تحلیل عملکرد سیستم ها در فصل های پیشین بر اساس تحلیل های حوزه زمان در این بخش به تحلیل حوزه فرکانس خواهیم پرداخت. نقاط قوت تحلیل حوزه فرکانس عبارت است از:

- امکان تحلیل عملکرد سیستم ها با مرتبه بالا وجود خواهد داشت.
- با توجه به ارتباط حوزه زمان و فرکانس امکان پیش بینی عملکرد حوزه زمان با استفاده از تحلیل حوزه فرکانس وجود دارد.
- امکان تحلیل حساسیت و نیز امکان تحلیل وضعیت حضور نویز وجود دارد.



Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

2

مقدمه

از طرفی

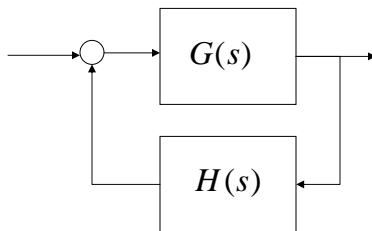
$$Y(s) = G(s)R(s) \xrightarrow{s=j\omega} Y(j\omega) = G(j\omega)R(j\omega)$$

و در نتیجه

$$Y(j\omega) = G(j\omega)R(j\omega) \Rightarrow \begin{cases} Y = |G(j\omega_0)|R \\ \phi = \angle G(j\omega_0) + 0 \end{cases}$$

لذا امکان پیش بینی عملکرد سیستم در حوزه زمان و برای دو حالت گذرا و ماندگار بر اساس خواص پاسخ فرکانسی سیستم (بررسی دامنه و فاز) وجود دارد.

تحلیل پاسخ فرکانسی یک سیستم حلقه بسته



$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + GH(s)}$$

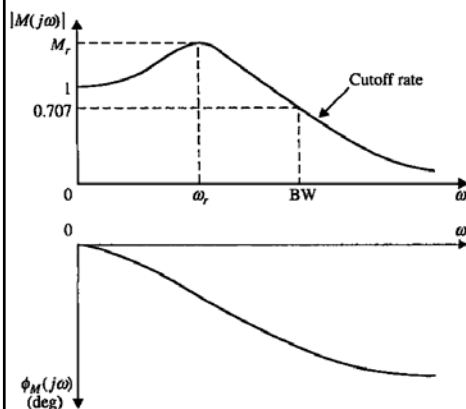
$$\Rightarrow M(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + GH(j\omega)} = |M(j\omega)| \angle M(j\omega) = \text{Re}[M(j\omega)] + \text{Im}[M(j\omega)]$$

$$\begin{cases} |M(j\omega)| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + GH(j\omega)|} \\ \angle M(j\omega) = \angle G(j\omega) - \angle (1 + GH(j\omega)) \end{cases}$$

تحلیل پاسخ فرکانسی یک سیستم حلقه بسته

پاسخ فرکانسی نوعی یک سیستم حلقه بسته

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+GH(s)}$$



M_r : Resonant Peak

- معیاری از پایداری نسبی
- مقدار مناسب $1.1 < M_r < 1.5$
- مقدار بزرگ M_r مقدار بزرگ فراجش را نتیجه می دهد.

ω_r : Resonant Frequency

BW : $|M(j\omega_c)| = 0.707$

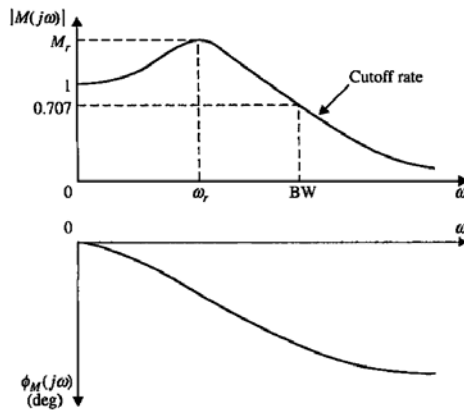
Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

5

تحلیل پاسخ فرکانسی یک سیستم حلقه بسته

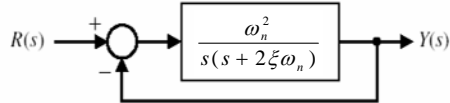
* پهنای باند بیشتر موجب زمان صعود (rise time) کمتر (سریعتر) می شود.

* در کنار پهنای باند، Cutoff rate معیار مکملی از نحوه حذف نویز می باشد.



6

پاسخ فرکانسی یک سیستم مرتبه دوم نوعی

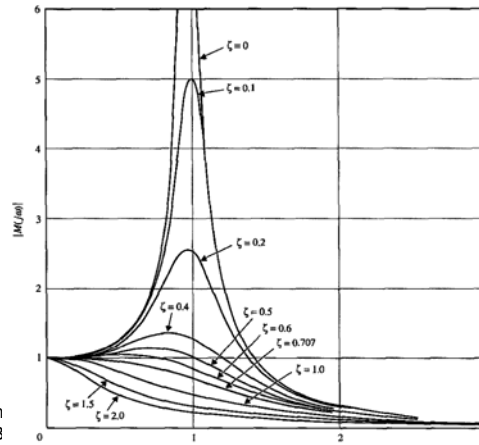


$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

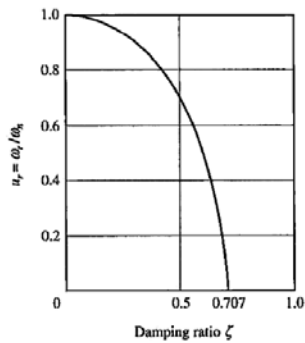
$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \\ M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} & \xi \leq 0.707 \\ M_r = 0 & \xi > 0.707 \end{cases}$$

$$BW = \omega_n \sqrt{(1 - 2\xi^2) + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}}$$

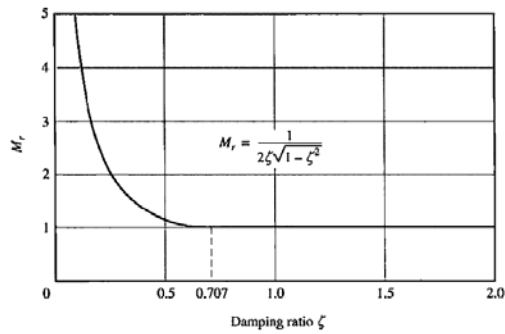
Linear Con
By: Dr B



پاسخ فرکانسی یک سیستم مرتبه دوم نوعی



$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

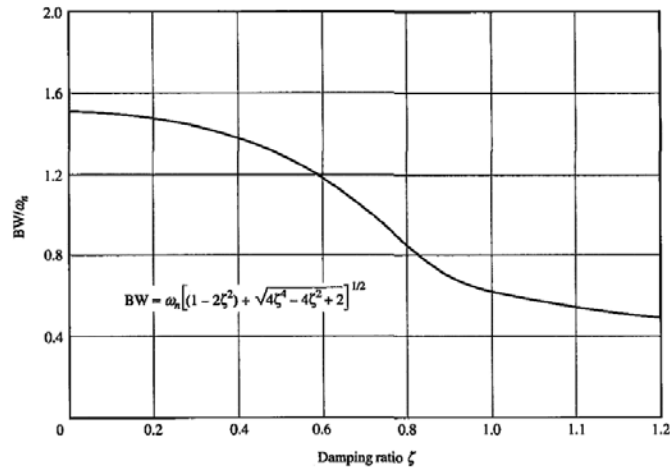


$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad \xi \leq 0.707$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

8

پاسخ فرکانسی یک سیستم مرتبه دوم نوعی

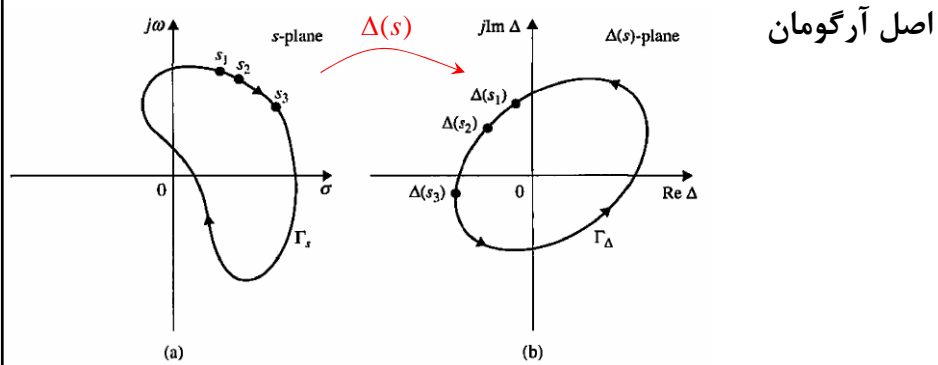


$$BW = \omega_n \sqrt{(1 - 2\xi^2) + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

9

تحلیل پایداری نایکوئیست



$$N = Z - P$$

- N = number of encirclements of the origin made by the $\Delta(s)$ -plane locus Γ_{Δ} .
- Z = number of zeros of $\Delta(s)$ encircled by the s -plane locus Γ_s in the s -plane.
- P = number of poles of $\Delta(s)$ encircled by the s -plane locus Γ_s in the s -plane.

Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

10

تحلیل پایداری نایکوئیست

اصل آرگومان

$$\Delta(s) = 1 + GH(s) = 1 + \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{q(s) + p(s)}{q(s)}$$

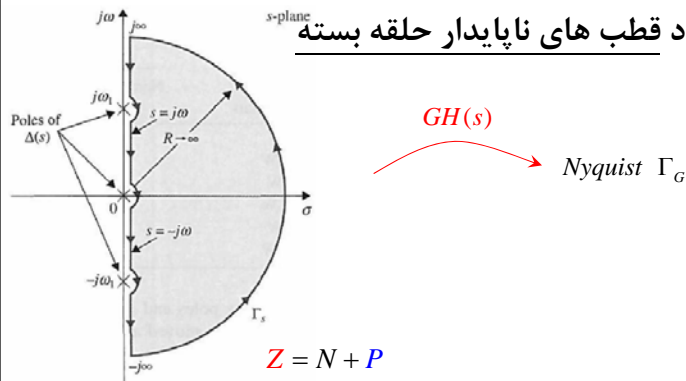
$$\Rightarrow \begin{cases} Z: \text{number of closed loop poles encircled by the s-plane locus } \Gamma_s \\ P: \text{number of open loop poles encircled by the s-plane locus } \Gamma_s \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z = N + P$$

تحلیل پایداری نایکوئیست

روش نایکوئیست:

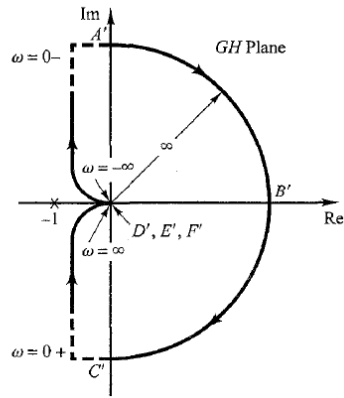
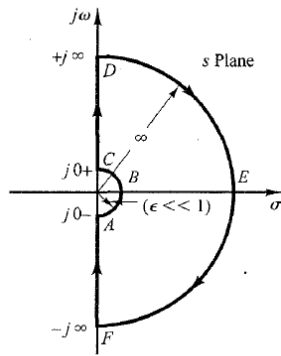
به منظور یافتن تعداد قطب های ناپایدار حلقه بسته



N : number of encirclements of $-1 + j0$ point made by Γ_G

تحلیل پایداری نایکوئیست

مثال ۱:



$$G(s) = \frac{1}{s(Ts+1)},$$

$$T > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} P = 0 \\ N = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Z = 0$$

سیستم حلقه بسته پایدار است

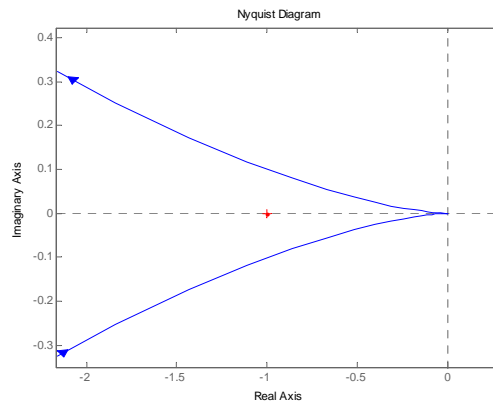
Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

13

تحلیل پایداری نایکوئیست

ادامه مثال ۱:

$$G(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)}$$



Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

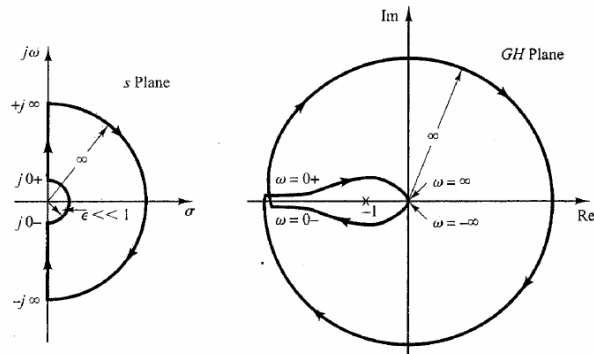
14

تحلیل پایداری نایکوئیست

مثال ۲:

$$G(s) = \frac{1}{s^2(Ts+1)},$$

$$T > 0$$



$$\left. \begin{matrix} P = 0 \\ N = 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow Z = 2$$

سیستم حلقه بسته دارای دو قطب نا پایدار است

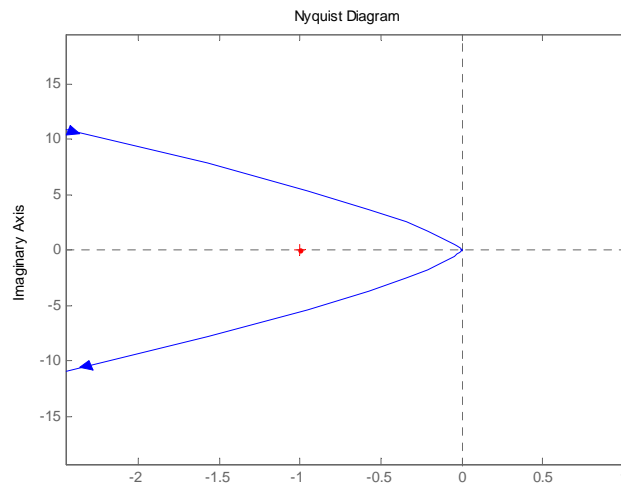
Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

15

تحلیل پایداری نایکوئیست

ادامه مثال ۲:

$$G(s) = \frac{1}{s^2(0.1s+1)}$$



Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

16

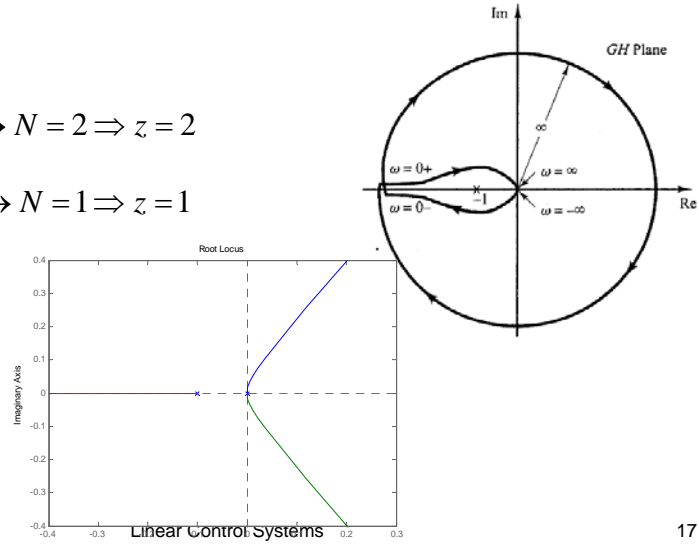
تحليل پایداری نایکوئیست

ادامه مثال ۲: تحلیل پایداری به ازای تغییرات بهره

$$G(s) = \frac{k}{s^2(Ts+1)}$$

$$-\frac{1}{k} < 0 \rightarrow k > 0 \rightarrow N = 2 \Rightarrow z = 2$$

$$-\frac{1}{k} > 0 \rightarrow k < 0 \rightarrow N = 1 \Rightarrow z = 1$$



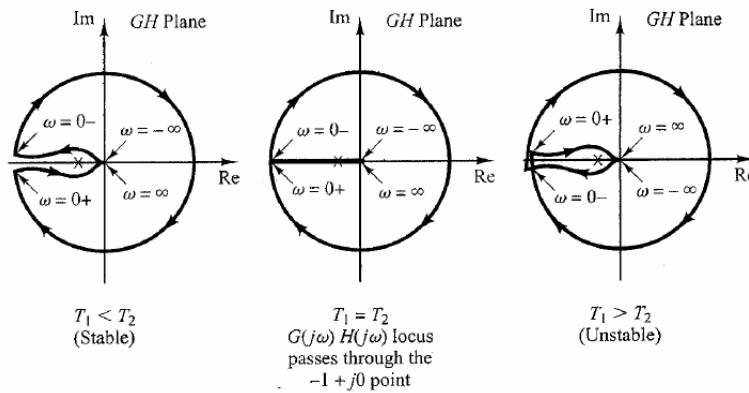
Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

17

تحليل پایداری نایکوئیست

مثال ۳:

$$G(s) = \frac{(T_2s+1)}{s^2(T_1s+1)}$$



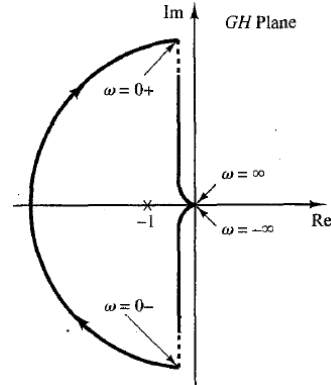
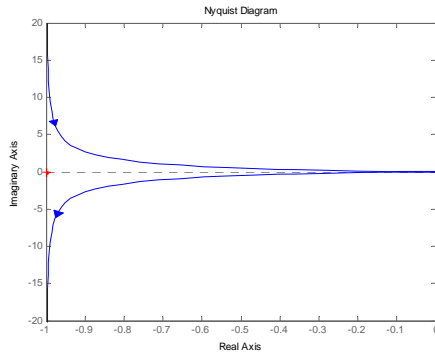
Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

18

تحلیل پایداری نایکوئیست

مثال ۴: (مثالی از سیستم های ناپایدار)

$$G(s) = \frac{1}{s(Ts-1)}$$



$$\left. \begin{matrix} P=1 \\ N=1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow Z=2$$

سیستم حلقه بسته دارای دو قطب ناپایدار است

Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

19

تحلیل پایداری نایکوئیست

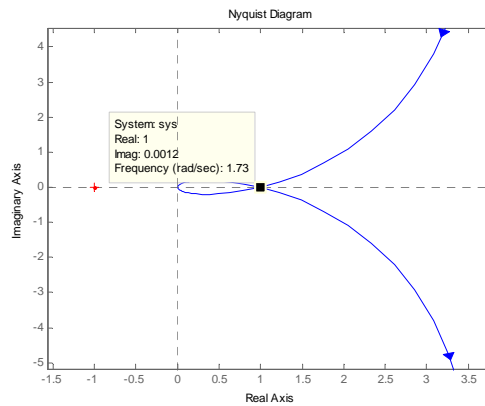
مثال ۵: (مثالی از سیستم های دارای صفر ناپایدار)

$$G(s) = \frac{k(s-3)}{s(s+1)}$$

$$-\frac{1}{k} < 0 \rightarrow N=1 \Rightarrow Z=1$$

$$0 < -\frac{1}{k} < 1 \rightarrow N=2 \Rightarrow Z=2$$

$$1 < -\frac{1}{k} \rightarrow N=0 \Rightarrow Z=0$$



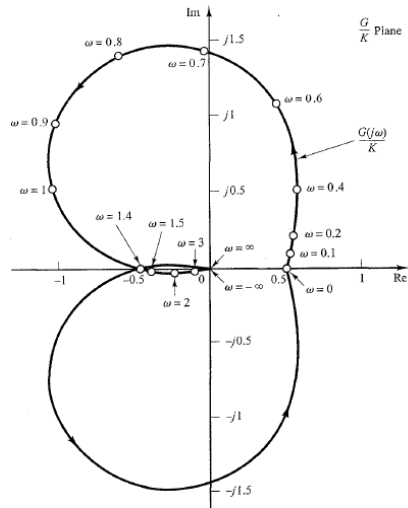
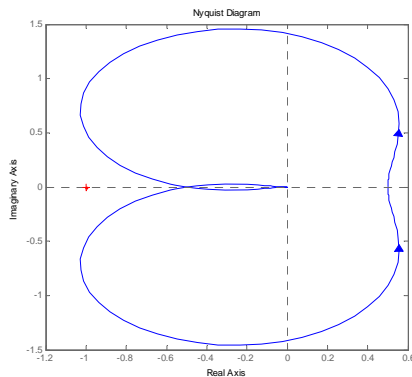
Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

20

تحلیل پایداری نایکوئیست

مثال ۶: (عدم وجود قطب در مبدا)

$$G(s) = \frac{s+0.5}{s^3+s^2+1}$$

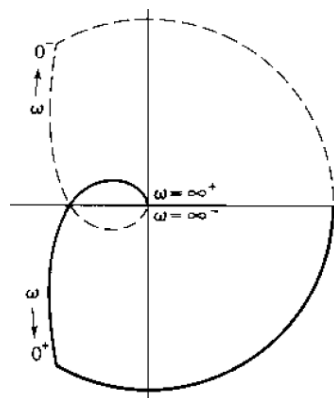


Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

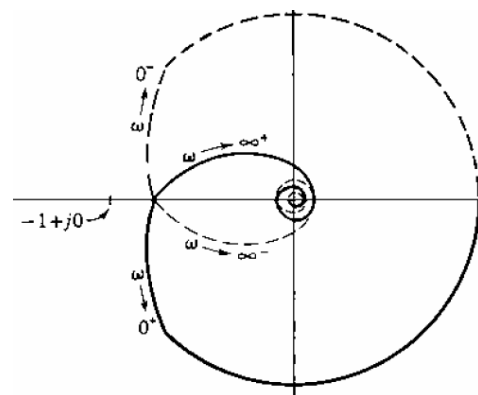
21

تحلیل پایداری نایکوئیست برای سیستم های تاخیردار

برای یک سیستم تاخیردار نوعی



$$G(s) = \frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$



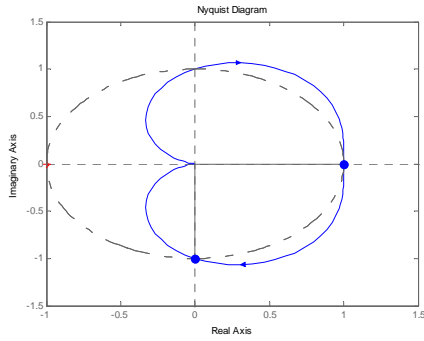
$$G_{delay}(s) = \frac{ke^{-t_d s}}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

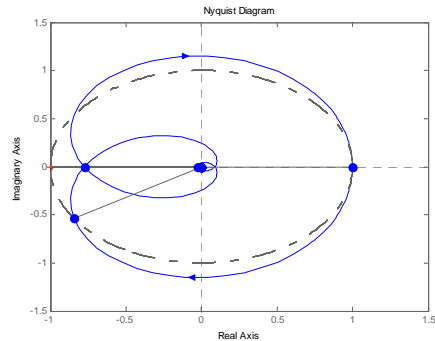
22

تحلیل پایداری نایکوئیست برای سیستم های تاخیردار

مثال ۷: (سیستم تاخیردار)



$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$



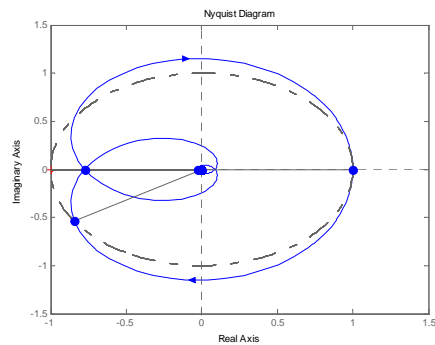
$$G_{delay}(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + s + 1}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

23

تحلیل پایداری نایکوئیست برای سیستم های تاخیردار

شرط پایداری سیستم های تاخیردار می نیمم فاز



$$G_{delay}(s) = e^{-t_d s} G(s)$$

$$G(j\omega_c) = 1 \rightarrow \omega_c$$

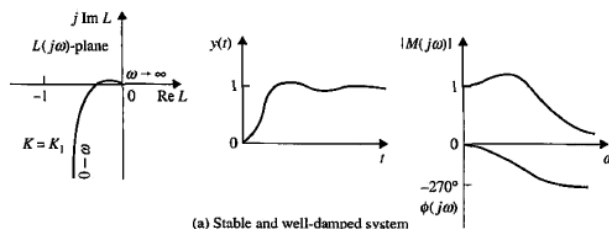
$$\angle G(j\omega_c) - t_d \omega_c > 180^\circ \Rightarrow t_d < \frac{\angle G(j\omega_c) - 180^\circ}{\omega_c}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

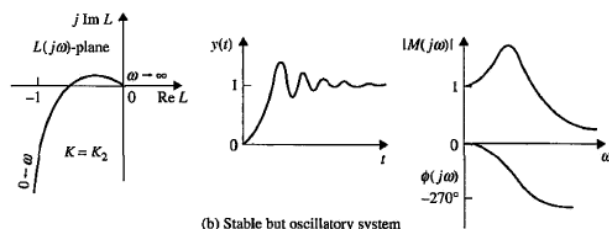
24

تحلیل پایداری نسبی با استفاده از روش نایکوئیست

مقایسه پاسخ فرکانسی و پاسخ زمانی



(a) Stable and well-damped system

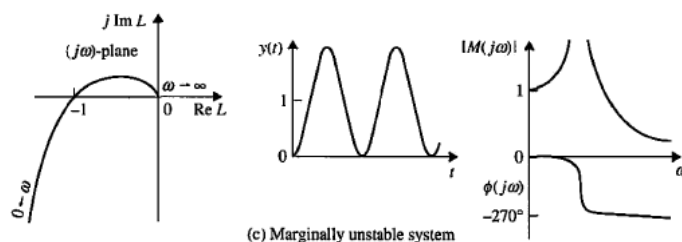


(b) Stable but oscillatory system

25

تحلیل پایداری نسبی با استفاده از روش نایکوئیست

مقایسه پاسخ فرکانسی و پاسخ زمانی

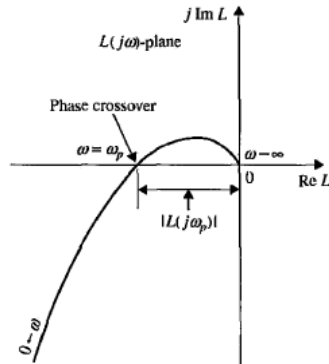


(c) Marginally unstable system

26

تحلیل پایداری نسبی با استفاده از روش نایکوئیست

حد بهره



$$\angle G(j\omega_p) = 180^\circ \Rightarrow G.M. = 20 \log \frac{1}{|G(j\omega_p)|} = -20 \log |G(j\omega_p)|$$

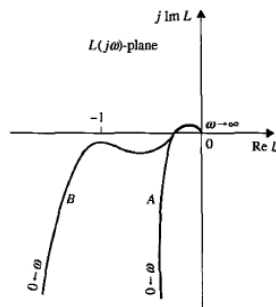
$$\text{stability condition} \Rightarrow G.M. > 0$$

Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

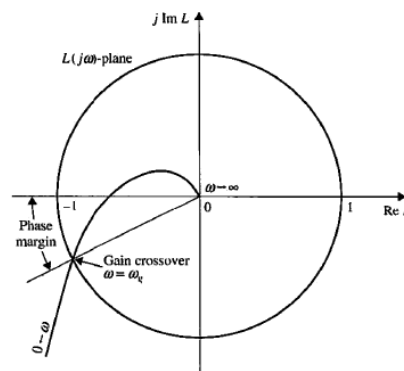
27

تحلیل پایداری نسبی با استفاده از روش نایکوئیست

حد فا



نقطه ضعف حد بهره



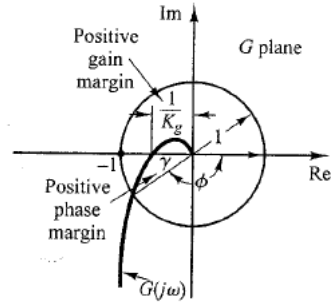
$$|G(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow P.M. = \angle G(j\omega_c) - 180$$

$$\text{stability condition} \Rightarrow P.M. > 0$$

Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

28

شرط پایداری مطلق در سیستم های می نیمم فاز



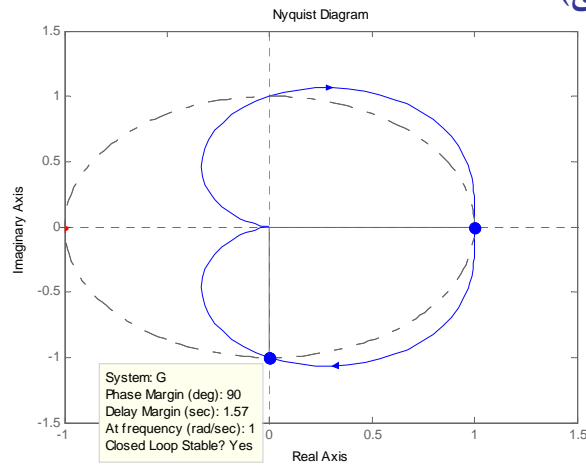
$$\begin{cases} G.M. > 0 \\ P.M. > 0 \end{cases}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

29

تحلیل پایداری با استفاده از روش نایکوئیست

مثال ۸: (تحلیل پایداری)



$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$P.M. = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega_c = 1$$

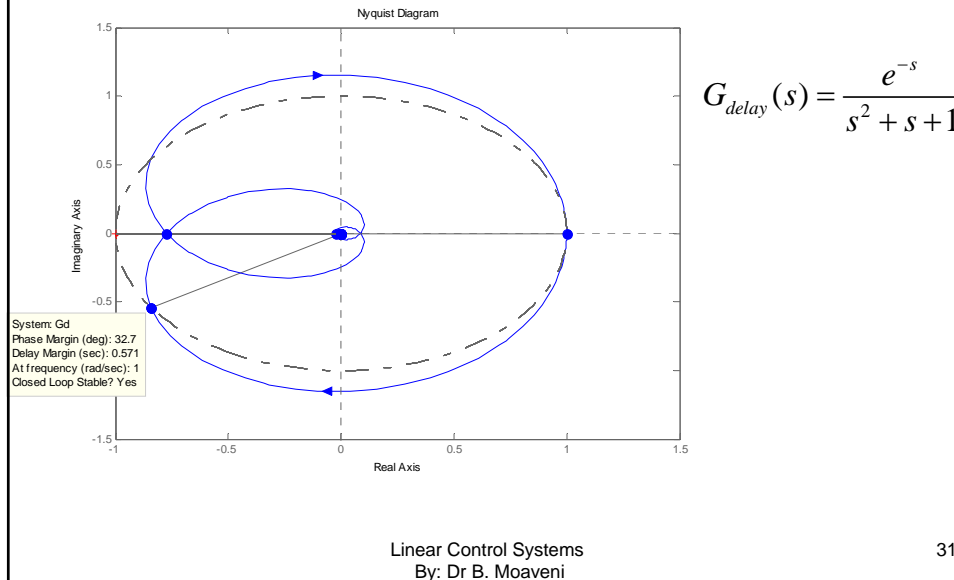
$$t_d \omega_c < P.M. \Rightarrow t_d < 1.57^{(s)}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

30

تحلیل پایداری با استفاده از روش نایکوئیست در حضور تاخیر

ادامه مثال ۸: (ارتباط تاخیر زمانی و حد فاز در تحلیل پایداری)

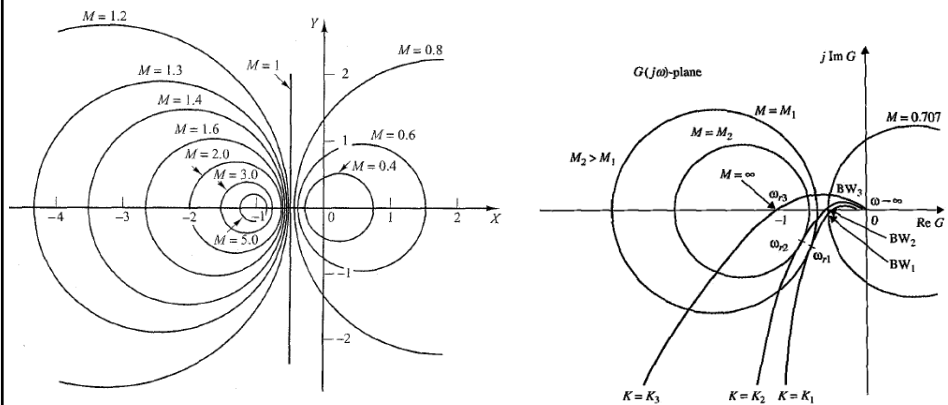


31

دایره های با شعاع (دامنه) ثابت

$$G = x + jy \rightarrow M = \frac{x + jy}{1 + x + jy} \rightarrow |M| = \frac{|x + jy|}{|1 + x + jy|}$$

$$\rightarrow M^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2} \Rightarrow \left(x + \frac{M^2}{M^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2}$$



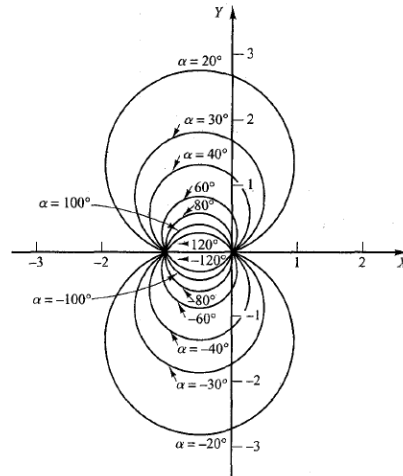
32

دایره های با فاز ثابت

$$G = x + jy \rightarrow M = \frac{x + jy}{1 + x + jy} \rightarrow \alpha = \angle \frac{x + jy}{1 + x + jy}$$

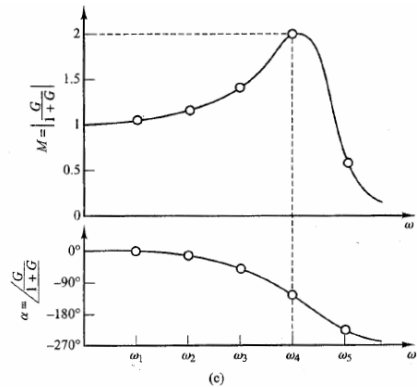
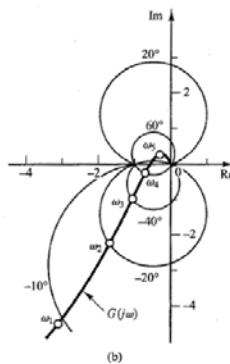
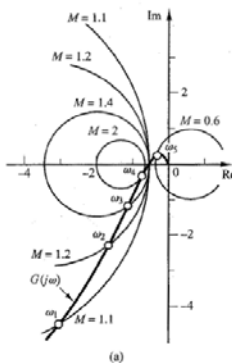
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y}{1+x}\right) \rightarrow N = \tan(\alpha) = \frac{y}{x^2 + x + y^2}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N}\right)^2$$



Linear Control Sys
By: Dr B. Moav

منحنی نایکوئیست و دایره های با دامنه و فاز ثابت

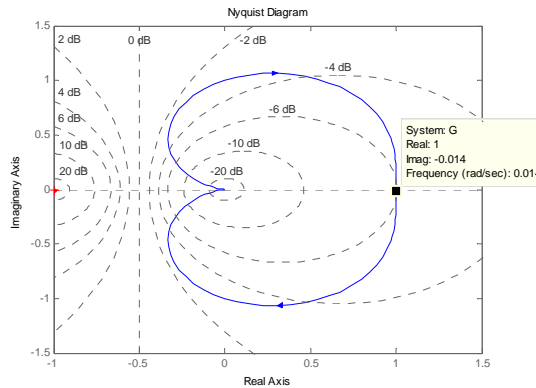


Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

34

منحنی نایکوئیست و دایره های با دامنه و فاز ثابت

مثال ۹:



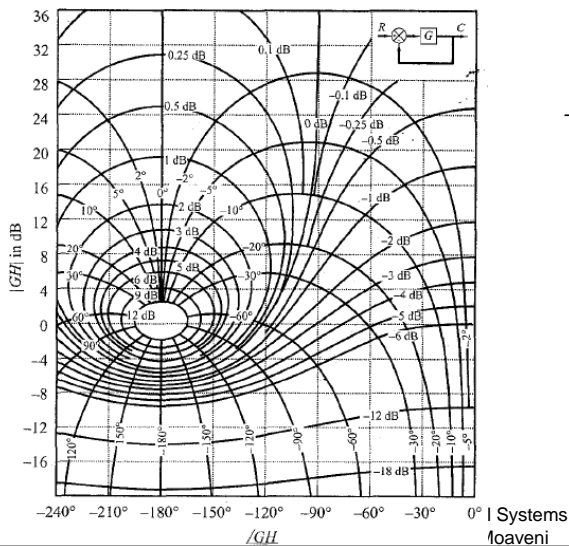
$$|M| = 10^{\frac{-6}{20}} = 0.5 = \frac{1}{1+!}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

35

چارت نیکولز

از ترکیب مکان های (دایره های) دامنه ثابت با مکان های فاز ثابت در یک چارت که دامنه را بر حسب فاز رسم می نماید چارت نیکولز حاصل می شود:



$$-1 + j0 \leftrightarrow (0, -180^\circ)$$

Systems
Moaveni

36

چارت نیکولز

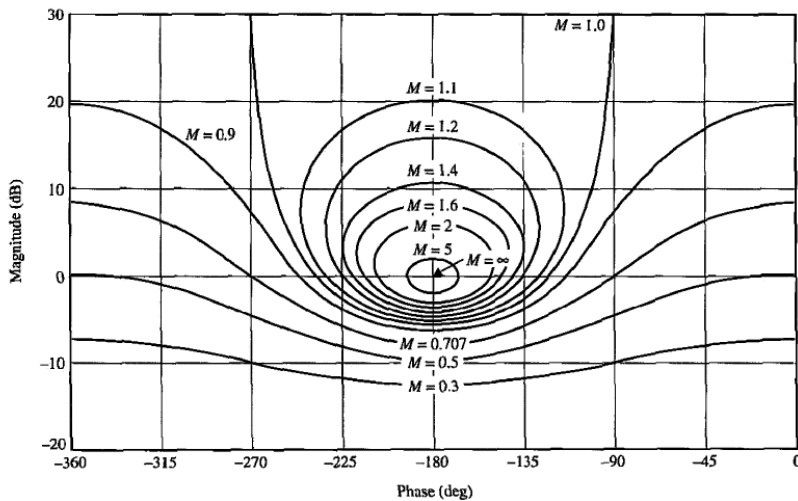
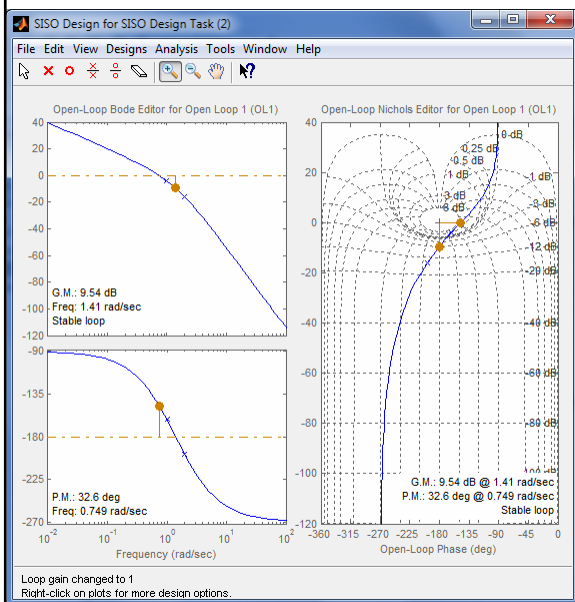


Figure 8-50 Nichols chart.

37

منحنی نایکوئیست و دایره های با دامنه و فاز ثابت

مثال ۱۰:

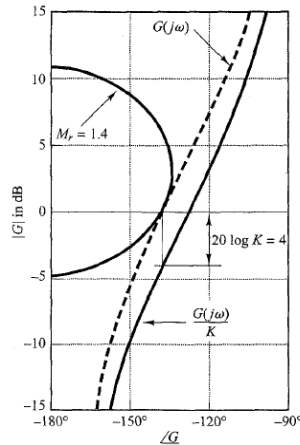


$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

38

منحنی نایکوئیست و دایره های با دامنه و فاز ثابت

مثال ۱۱: (محاسبه بهره به منظور دست یافتن به رفتار حلقه بسته مطلوب)



$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)}$$

$$20 \log k = 4 \Rightarrow k = 1.59$$

Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

39

نمودار Bode

نمودار Bode نمایشی دیگر از پاسخ فرکانسی را در اختیار می گذارد که در آن نمودار دامنه بر حسب فرکانس و نمودار فاز بر حسب فرکانس جداگانه رسم می گردند. **مزایای نمودار bode عبارتند از:**

- ۱- امکان رسم آن بدون استفاده از کامپیوتر
- ۲- امکان استخراج پارامترهای مهم از جمله فرکانس های عبور و حد بهره و فاز از روی نمودار **bode**
- ۳- اثر حضور جبران سازها و کنترل کننده ها بصورت ساده ای امکان پذیر است.

نقطه ضعف: تحلیل های پایداری مبتنی بر نمودار **bode** فقط برای سیستم های مینیمم فاز صحیح است.

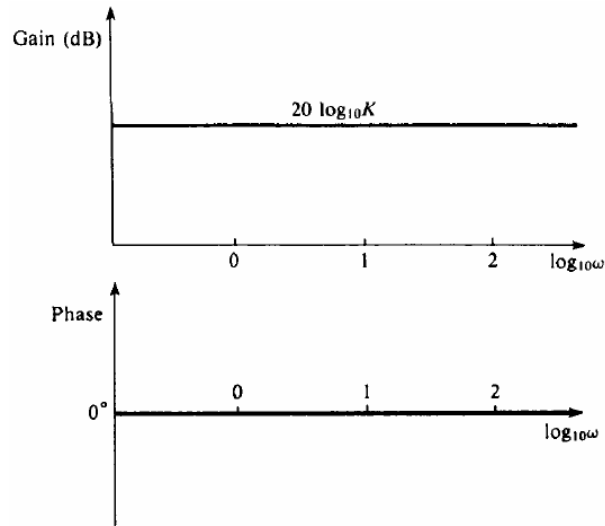
Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

40

نمودار Bode

نمودار bode بهره ثابت

$$G(s) = k$$

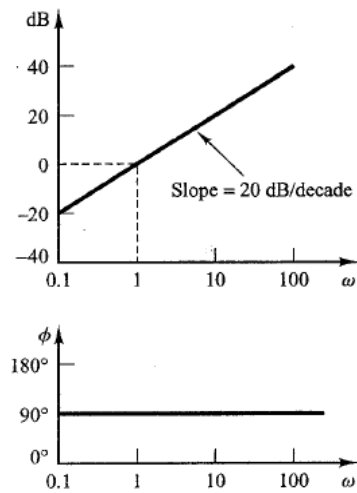


41

نمودار Bode

نمودار bode صفر در مبدا

$$G(s) = s$$

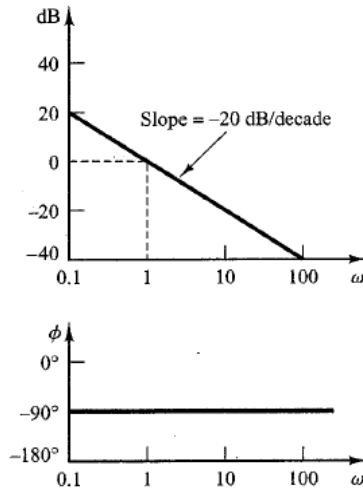


42

نمودار Bode

نمودار bode قطب در مبدا

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

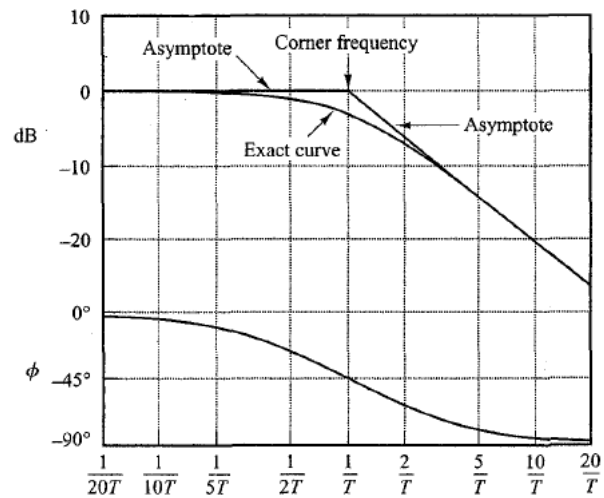


43

نمودار Bode

نمودار bode قطب حقیقی

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

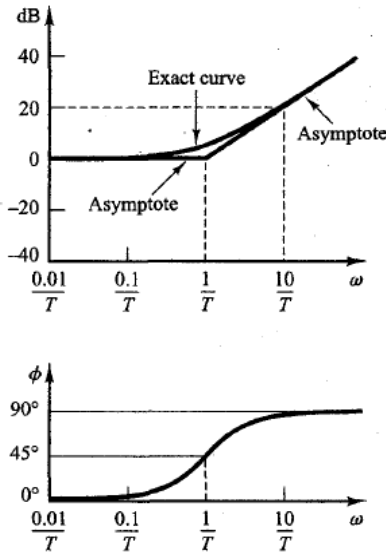


44

نمودار Bode

نمودار bode صفر حقیقی

$$G(s) = Ts + 1$$

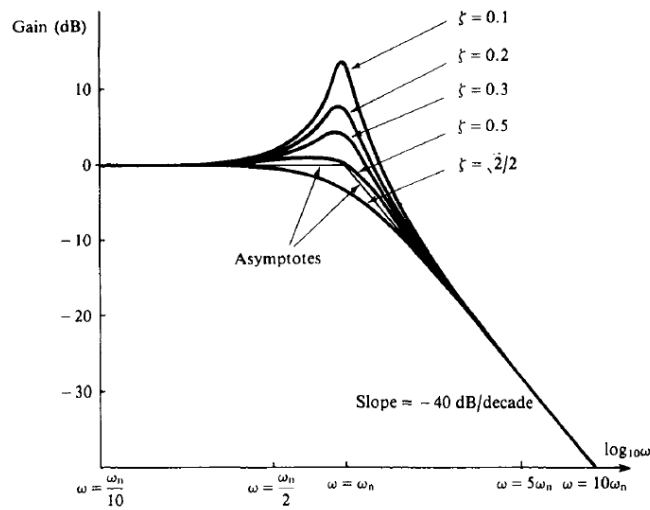


45

نمودار Bode

نمودار bode قطب مزدوج مختلط

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

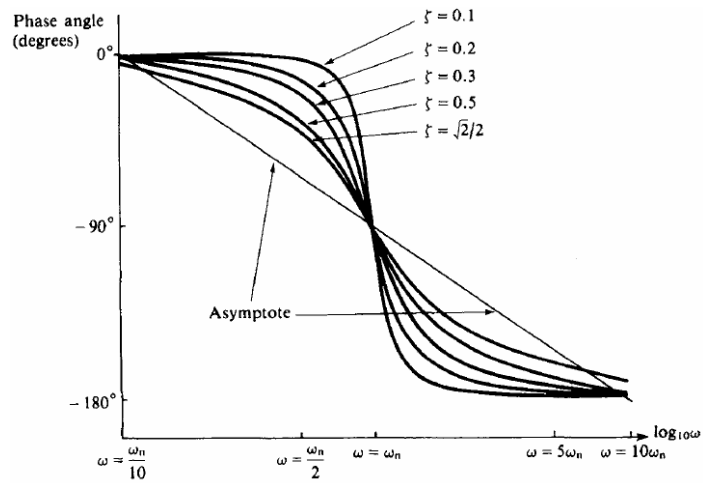


46

نمودار Bode

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

نمودار bode قطب مزدوج مختلط

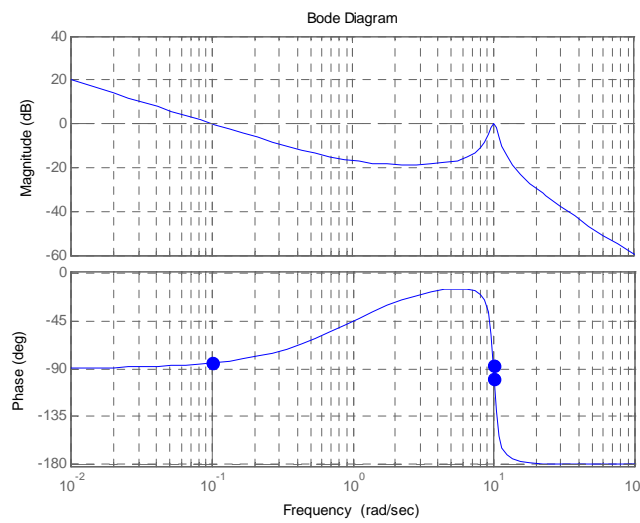


47

نمودار Bode

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{s(s^2 + s + 100)}$$

مثال ۱۲:



Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

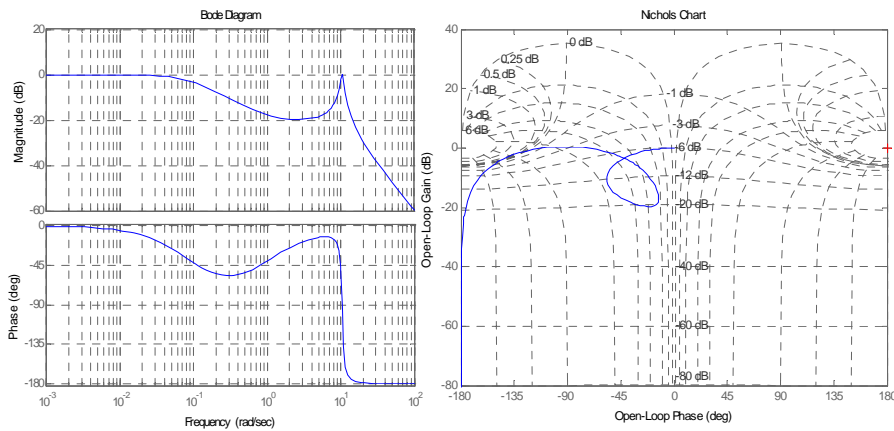
48

نمودار Bode

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{s(s^2 + s + 100)}$$

ادامه مثال ۱۲: (نتایج یکسان در نمودار بود حلقه بسته و چارت نیکولز)

$$T = \frac{G}{1+G}$$



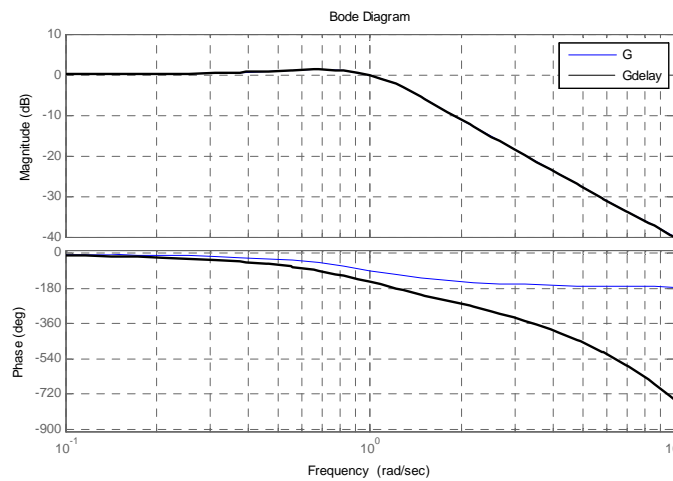
Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

49

نمودار Bode سیستم های تاخیر دار

$$G_{delay}(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + s + 1}$$

مثال ۱۳:



Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

50



بسم تعالی

سیستم های کنترل کلاسیک

Lecture 8

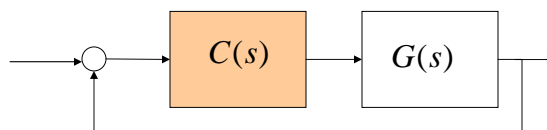
طراحی جبرانسازها در حوزه فرکانس

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

1

مقدمه

پس از مباحث مربوط به تحلیل عملکرد و تحلیل پایداری سیستم ها در بخش های پیشین، در صورتی که رفتار مطلوب حاصل نگردد، طراحی جبران سازها و کنترل کننده مورد توجه قرار می گیرد. این بخش به معرفی جبران سازها و نحوه طراحی آنها خواهد پرداخت.

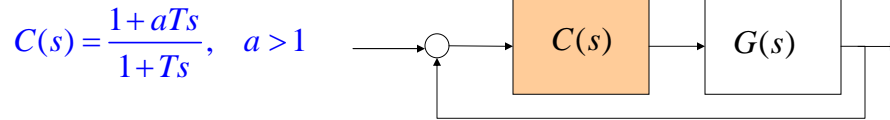


Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

2

جبران‌ساز پیش افت فاز (Phase Lead Comp.)

معرفی:



- ۱- این جبران‌ساز با افزایش فاز به بهبود رفتار سیستم کمک خواهد نمود.
- ۲- خطای حالت ماندگار را تغییر نمی دهد. (ولیکن با اضافه نمودن بهره ثابت می توان در جهت کاهش خطای حالت ماندگار تلاش نمود)
- ۳- این کنترل کننده موجب افزایش سرعت سیستم و/یا به عبارت دیگر کاهش زمان نشست می گردد. این امر به علت افزایش پهنای باند صورت می گیرد.
- ۴- کاهش فرجهش
- ۵- بهبود پایداری

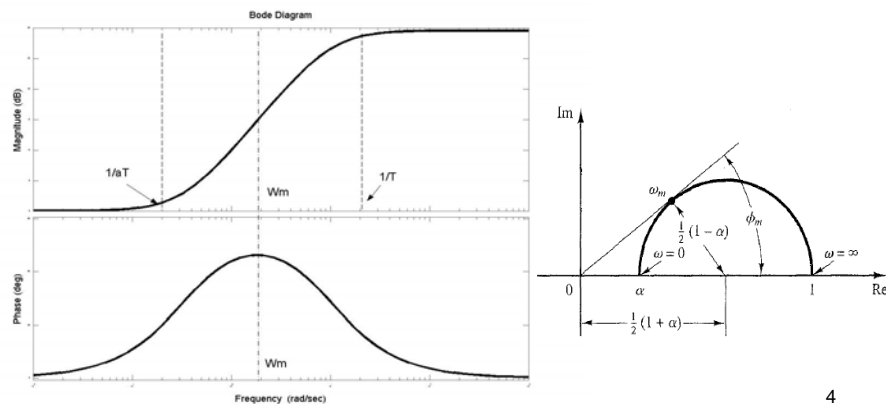
Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

3

جبران‌ساز پیش افت فاز (Phase Lead Comp.)

نمودار Bode جبران‌ساز lead:

$$C(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}, \quad a > 1$$



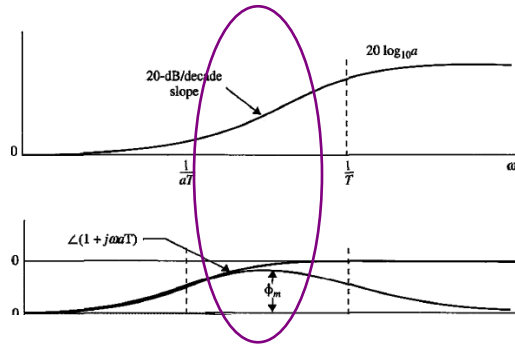
4

جبران ساز پیش افت فاز (Phase Lead Comp.)

روابط حاکم بر جبران ساز Lead:

$$C(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}, \quad a > 1$$

$$\omega_m^2 = \frac{1}{T} \frac{1}{aT} \Rightarrow \omega_m = \frac{1}{\sqrt{aT}}$$



$$\tan \phi_m = \frac{a-1}{2\sqrt{a}} \Rightarrow \sin \phi_m = \frac{a-1}{a+1} \longrightarrow a = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

5

طراحی جبران ساز پیش افت فاز

روند طراحی:

- ۱- محاسبه مقدار بهره ثابت (k), برای رسیدن به مقدار خطای حالت ماندگار مطلوب.
- ۲- رسم نمودار بود تابع تبدیل حلقه باز با حضور بهره ثابت ($kG(s)$) و محاسبه مقدار حاشیه فاز (ϕ_o) برای آن.
- ۳- محاسبه مقدار حاشیه فاز مطلوب (ϕ_d), با توجه به خواص مطلوب مساله (فراجهدش و ...) و استفاده از رابطه ($\phi_d = 100\xi$).
- ۴- محاسبه مقدار فاز لازم برای جبران: $\phi_m = \phi_d - \phi_o$

۵- محاسبه مقدار a با استفاده از

$$a = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m}$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

6

طراحی جبران‌ساز پیش افت فاز

ادامه روند طراحی:

فرکانس ω_m عبارت است از فرکانسی که در آن $20 \log_{10} G(j\omega_m) = -10 \log_{10} a$

$$T = \frac{1}{\sqrt{a\omega_m}}$$

۶- محاسبه مقدار T با استفاده از

۷- رسم نمودار Bode سیستم جبران شده و بررسی درستی طراحی

طراحی جبران‌ساز پیش افت فاز

مثال ۱:

برای سیستم زیر یک جبران‌ساز پیش افت فاز طراحی نمایید که شرایط زیر را برآورده نماید.

$$G(s) = \frac{2500}{s(s+25)}$$

$$\begin{cases} e_{ss} |_{r(t)=tu(t)} \leq 0.01 \\ Ph.M = 45^\circ \end{cases}$$

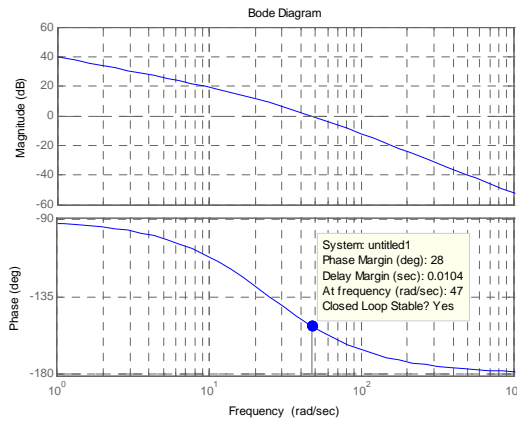
$$e_{ss} |_{r(t)=tu(t)} \leq 0.01 \Rightarrow k \geq 1$$

طراحی جبران‌ساز پیش افت فاز

مثال ۱:

$$G(s) = \frac{2500}{s(s+25)}$$

$$\begin{cases} e_{ss} |_{r(t)=tu(t)} \leq 0.01 \\ Ph.M = 45^\circ \end{cases}$$



$$Ph.M. = 45 = \phi_d \Rightarrow \phi_m = \phi_d - \phi_o = 45 - 28 = 17 \Rightarrow \phi_m = 25$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

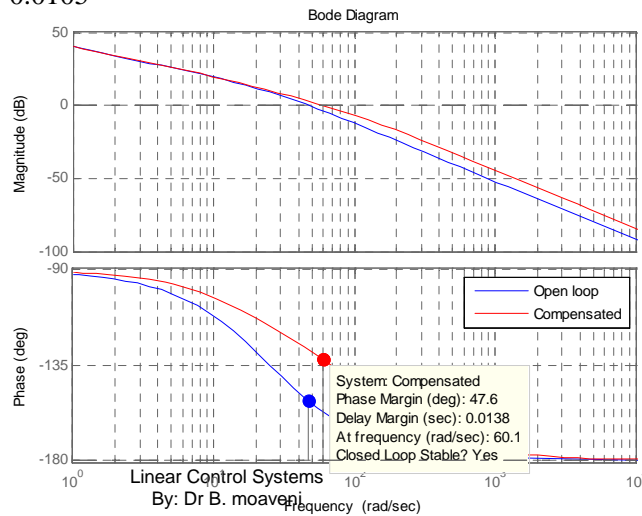
9

طراحی جبران‌ساز پیش افت فاز

ادامه مثال ۱:

$$G(s) = \frac{2500}{s(s+25)}$$

$$\omega_m = 60.4 \longrightarrow T = 0.0105$$



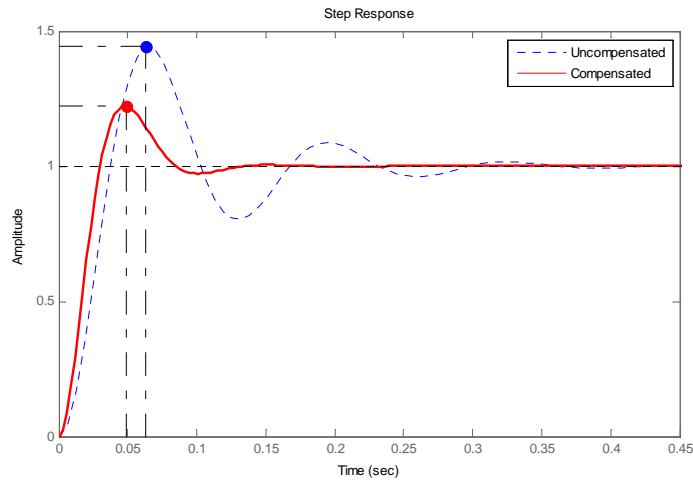
Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

10

طراحی جبران‌ساز پیش افت فاز

$$G(s) = \frac{2500}{s(s+25)}$$

ادامه مثال ۱: (پاسخ پله سیستم جبران شده)



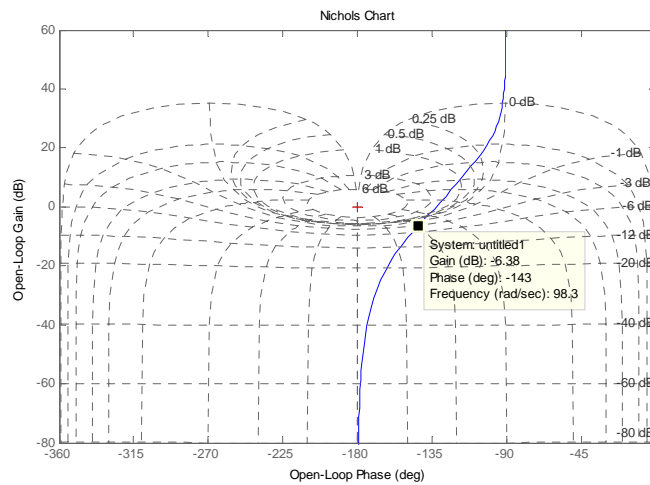
Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

11

طراحی جبران‌ساز پیش افت فاز

$$G(s) = \frac{2500}{s(s+25)}$$

ادامه مثال ۱: (خواص حلقه بسته)

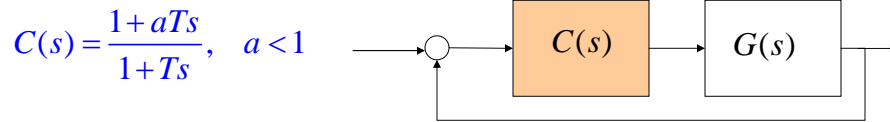


Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

12

جبران ساز پس افت فاز (Phase Lag Comp.)

معرفی:



- ۱- خطای حالت ماندگار را تغییر نمی دهد. (ولیکن با اضافه نمودن بهره ثابت می توان در جهت کاهش خطای حالت ماندگار تلاش نمود)
- ۲- این کنترل کننده موجب کاهش سرعت سیستم و/یا به عبارت دیگر افزایش زمان نشست می گردد. این امر به علت کاهش پهنای باند صورت می گیرد.
- ۳- کاهش فراجهدش
- ۴- بهبود پایداری

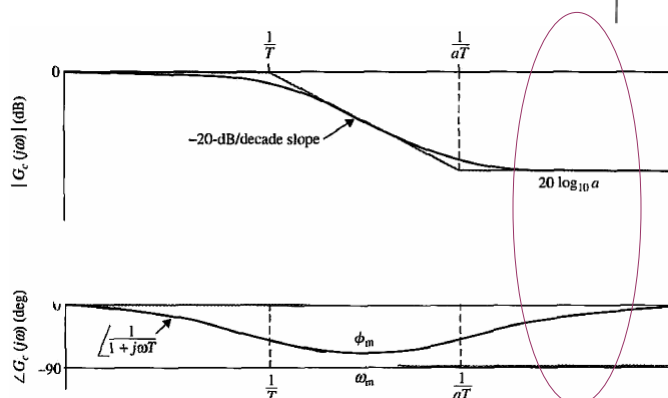
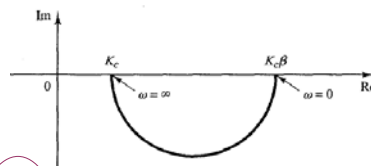
Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

13

جبران ساز پس افت فاز (Phase Lag Comp.)

نمودار Bode جبران ساز lag:

$$C(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}, \quad a < 1$$



14

جبران ساز پس افت فاز (Phase Lag Comp.)

$$C(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}, \quad a < 1$$

روند طراحی:

- ۱- محاسبه مقدار بهره ثابت (k), برای رسیدن به مقدار خطای حالت ماندگار مطلوب.
- ۲- رسم نمودار بود تابع تبدیل حلقه باز با حضور بهره ثابت ($kG(s)$) و محاسبه مقدار حاشیه فاز (ϕ_o) برای آن.
- ۳- تعیین فرکانسی (ω_c) که اگر این فرکانس به فرکانس گذر بهره تبدیل گردد، بتوان به مقدار حدفاز لازم دست یافت.
- ۴- جابجا نمودن منحنی دامنه به اندازه ای که ω_c به فرکانس گذر بهره تبدیل گردد. بر اساس رابطه:

$$20\log_{10} a + 20\log_{10} (G(j\omega_c)) = 0 \rightarrow 20\log_{10} a + |G(j\omega_c)|_{dB} = 0$$

جبران ساز پس افت فاز (Phase Lag Comp.)

$$C(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}, \quad a < 1$$

ادامه روند طراحی:

- ۵- به منظور حذف اثر کاهش فاز لازم است دره فاز به فرکانس های پایین تر انتقال یابد. لذا

$$\frac{1}{aT} \ll \omega_c \Rightarrow \frac{1}{aT} = \frac{\omega_c}{10}$$

- ۶- رسم نمودار Bode سیستم جبران شده و تحلیل نتایج حاصل.

طراحی جبران‌ساز پس افت فاز

مثال ۲:

برای سیستم زیر یک جبران‌ساز پس افت فاز طراحی نمایید که شرایط زیر را برآورده نماید.

$$G(s) = \frac{2500}{s(s+25)} \quad \begin{cases} e_{ss} |_{r(t)=tu(t)} \leq 0.01 \\ Ph.M = 45^\circ \end{cases}$$

$$e_{ss} |_{r(t)=tu(t)} \leq 0.01 \Rightarrow k \geq 1$$

Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

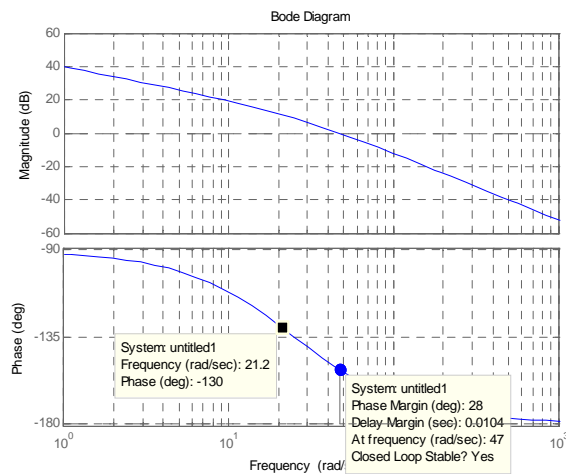
17

طراحی جبران‌ساز پس افت فاز

ادامه مثال ۲:

۲- رسم نمودار Bode، $kG(s)$ و بررسی حدفاز حلقه باز

۳- تعیین فرکانس ω_c



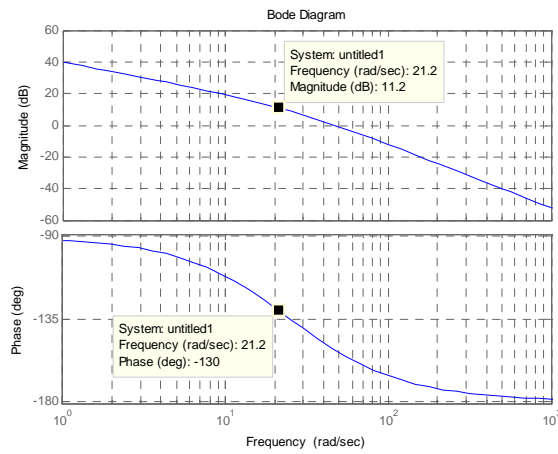
18

طراحی جبران‌ساز پس افت فاز

ادامه مثال ۲:

$$20 \log_{10} a + 11.2 = 0 \Rightarrow a = 0.2754$$

۴- تعیین مقدار a



19

طراحی جبران‌ساز پس افت فاز

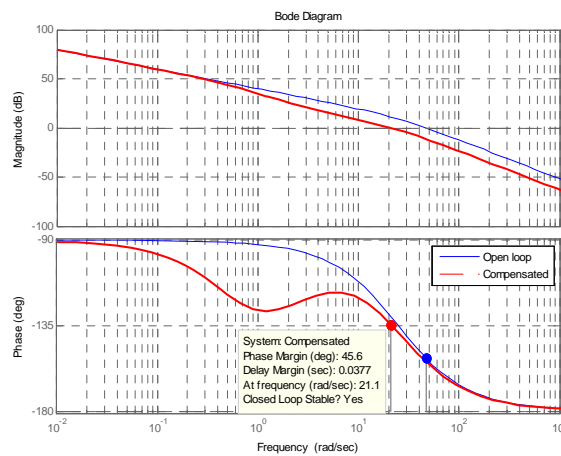
ادامه مثال ۲:

$$\frac{1}{aT} = \frac{\omega_c}{10} \Rightarrow T = 1.7126$$

۵- تعیین مقدار T

۶- رسم نمودار Bode

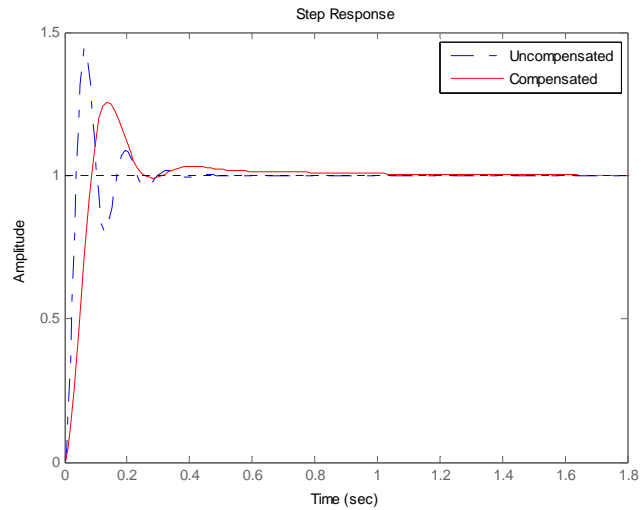
سیستم جبران شده



20

طراحی جبران‌ساز پس افت فاز

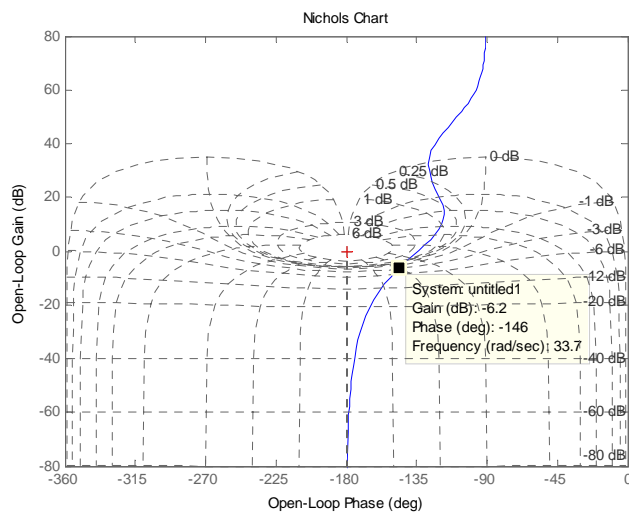
ادامه مثال ۲: (پاسخ زمانی)



21

طراحی جبران‌ساز پس افت فاز

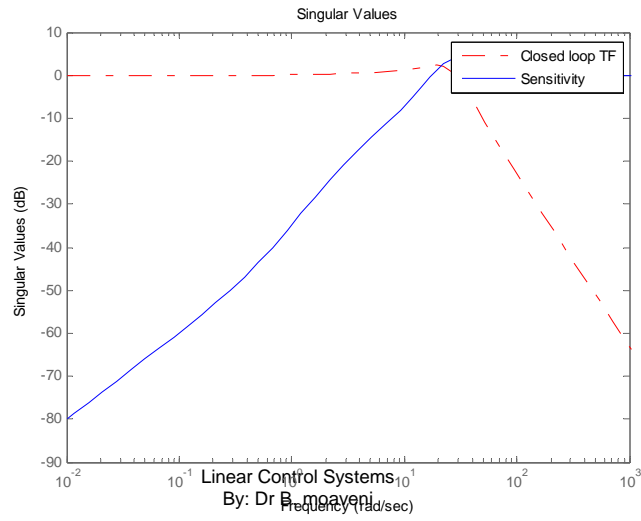
ادامه مثال ۲: (خواص حلقه بسته)



22

طراحی جبرانساز پس افت فاز

ادامه مثال ۲: (بررسی حساسیت)



Linear Control Systems
By: Dr. B. Moaveni

23