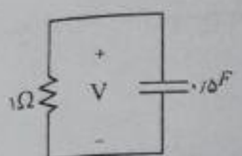
$$t > ۱ \Rightarrow V(t) = \int_{۰}^{۱} (۱ - \lambda)۲e^{-۲(t-\lambda)}d\lambda = ۲٫۱۹e^{-۲t}$$

پاسخ حالت صفر
$$\begin{cases} t < ۰ & V(t) = ۰ \\ ۰ < t < ۱ & V(t) = ۱٫۵ - t - ۱٫۵e^{-۲t} \\ t > ۱ & V(t) = ۲٫۱۹e^{-۲t} \end{cases}$$

یا
$$V(t) = (۱٫۵ - t - ۱٫۵e^{-t})u(t) + (۲/۱۹e^{-۲t} - ۱٫۵ + t + ۱٫۵e^{-۲t})u(t - ۱)$$

برای تعیین پاسخ ورودی صفر مدار، ورودی مدار را حذف می‌کنیم ولی شرط اولیه وجود دارد



$$V(۰^+) = ۵^V \left\langle \begin{array}{ll} t < ۰ & V(t) = ۵ \\ t > ۰ & V(t) = Ae^{-t/RC} = Ae^{-۲t} = ۵e^{-۲t} \end{array}\right.$$

پاسخ ورودی صفر $\Rightarrow V(t) = ۵ + (۵e^{-۲t} - ۵)u(t)$

پاسخ کامل
$$V(t) = \begin{cases} ۵ & t < ۰ \\ ۱٫۵ - t + ۳٫۵e^{-۲t} & ۰ < t < ۱ \\ ۷٫۱۹e^{-۲t} & t > ۱ \end{cases}$$

یا

$$V(t) = ۵ + (-۳٫۵ - t + ۳٫۵e^{-۲t})u(t) + (-۱٫۵ + t + ۳٫۶۹e^{-۲t})u(t - ۱)$$

۶-۶ تبدیل لاپلاس

در فصول گذشته با مدارهایی آشنا شدیم که با ورودی‌های dc، نمائی، سینوسی یا سینوسی نمایی تحریک می‌شدند. در حالیکه امواج بسیاری وجود دارند که هیچ‌کدام از چهار حالت بالا را شامل نمی‌شود مانند امواج مربعی و دندان اره‌ای و غیره. در چنین مواردی می‌توان از تبدیل لاپلاس استفاده نمود. در واقع تبدیل لاپلاس یک روش جامع برای تحلیل مدار بدون توجه به تابع ورودی می‌باشد. از ویژگی‌های تبدیل لاپلاس می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- در حوزه لاپلاس شرایط اولیه درنظر گرفته شده و پس از حل نیاز به تعیین ضرایب ثابت نمی‌باشد.
- تبدیل لاپلاس پاسخ شبکه را به‌طور کامل در اثر شرایط اولیه و ورودی‌ها تعیین می‌کند.
- با استفاده از تبدیل لاپلاس تابع شبکه تعریف شده و از به‌کار بردن پاسخ ضربه، حل مسئله را ساده‌تر می‌کند.

تعریف تبدیل لاپلاس

برای تابع زمانی $f(t)$ که در حوزه زمان و در فاصله $[۰, \infty]$ تعریف شده است، تبدیل لاپلاس تابع در حوزه فرکانس مختلط به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{۰^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad \text{یا} \quad f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

عکس تبدیل لاپلاس نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \quad \text{یا} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\delta_0 - j\infty}^{\delta_0 + j\infty} e^{st}F(s)ds$$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = a$ را به‌دست آورید.

حل:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \times a dt = a \times \frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{-a}{s}(0 - 1) = \frac{a}{s}$$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = 2u(t-3)$ را پیدا کنید.

حل:

$$F(s) = \int_{0^-}^\infty e^{-st} \times 2u(t-3)dt = 2\int_3^\infty e^{-st}dt = \frac{-2}{s}e^{-st}\Big|_3^\infty = \frac{-2}{s}(0 - e^{-3s}) = \frac{2}{s}e^{-3s}$$

تبدیل لاپلاس برخی از توابع زمانی ساده

در این بخش لیستی از تبدیل لاپلاس را برای توابع زمانی که مکرراً با آن‌ها در تحلیل مدارها مواجه‌ایم، معرفی خواهیم کرد.

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
k	$\frac{k}{s}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$tu(t)$	$1/s^2$
$t^n u(t)$	$n!/s^{n+1}$
$te^{-at}u(t)$	$1/(s+a)^2$
$\cos\omega_0 t u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
$\sin\omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
$e^{-\delta t}\cos\omega_0 t u(t)$	$\frac{s+\delta}{(s+\delta)^2+\omega_0^2}$
$e^{-\delta t}\sin\omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\delta)^2+\omega_0^2}$

خواص مهم تبدیل لاپلاس

برای محاسبه تبدیل لاپلاس توابع بدون محاسبه انتگرال می‌توان از ویژگی‌های تبدیل لاپلاس استفاده کرد. که در این قسمت به‌صورت اختصار بیان می‌شود.

۱ـ خطی بودن

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s)$$

$$\mathcal{L}\{af(t)\} = aF(s)$$

۲ـ انتقال در حوزه زمان

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

۳ـ انتقال در حوزه فرکانس

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$$

۴ـ مشتق‌گیری در حوزه لاپلاس

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = \frac{-dF(s)}{ds}$$

۵ـ مشتق‌گیری در حوزه زمان

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

۶ـ انتگرال‌گیری در حوزه زمان

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(t)dt\} = \frac{1}{s}F(s)$$

۷ـ انتگرال در حوزه لاپلاس

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s)ds$$

۸ـ تغییر مقیاس زمان

$$\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = aF(as)$$

۹ـ قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی: مقدار تابع $f(t)$ در 0^+ و ∞ با توجه به تبدیل لاپلاس برابر است با

$$\lim_{t\to 0^+} = f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

۱۰ـ انتگرال کانولوشن: پاسخ حالت صفر $y(t)$ مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به ورودی $x(t)$ که پاسخ ض[...] آن $h(t)$ می‌باشد، را می‌توان با استفاده از انتگرال زیر به‌دست آورد.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_0^t x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

برای محاسبه انتگرال کانولوشن می‌توان از تبدیل لاپلاس استفاده کرد. اگر $x(t)$ و $h(t)$ قطعه قطعه پیوسته مرتبه نمایی باشند، تبدیل لاپلاس $y(t)$ برابر است با

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

اکنون به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال‌ها:

$$\mathcal{L}\{۲\delta(t)+۳u(t-۲)\}=۲+\frac{۳}{s}e^{-۲s}$$

$$\mathcal{L}\{(t-۱)u(t-۱)\}=\frac{۱}{s^۲}\cdot e^{-s}$$

$$\mathcal{L}\{tu(t-۱)\}=\mathcal{L}\{(t-۱)u(t-۱)+u(t-۱)\}$$

$$=\frac{۱}{s^۲}e^{-s}+\frac{۱}{s}e^{-s}=e^{-s}\left(\frac{۱}{s^۲}+\frac{۱}{s}\right)$$

$$\mathcal{L}\{e^{-۲t}u(t-۵)\}=\frac{۱}{s}e^{-۵s}\Big|_{s\to s+۲}=\frac{۱}{s+۲}e^{-۵(s+۲)}$$

$$\mathcal{L}\{te^{-۲t}u(t-۳)\}=\left[\frac{-d}{ds}\left(\frac{۱}{s}e^{-۳s}\right)\right]_{s\to s+۲}=e^{-۳(s+۲)}\left[\frac{۱}{(s+۲)^۲}+\frac{۱}{s+۲}\right]$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\}=۱\quad \mathcal{L}\left\{\frac{d\delta(t)}{dt}\right\}=s\quad \mathcal{L}\left\{\frac{d^۲\delta(t)}{dt^۲}\right\}=s^۲$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\}=\frac{۱}{s}\quad \mathcal{L}\{tu(t)\}=\frac{۱}{s^۲}\quad \mathcal{L}\{t^۲u(t)\}=\frac{۲}{s^۳}$$

مثال: تبدیل لاپلاس $x(t)=\frac{۱}{t}(e^{-at}-e^{-bt})u(t)$ را تعیین کنید.

حل: تابع $x(t)$ را می‌توان به‌صورت زیر درنظر گرفت:
با استفاده از خاصیت انتگرال در حوزه لاپلاس

$$x(t)=\frac{۱}{t}y(t)\to X(s)=\int_s^{\infty}Y(s)ds$$

$$Y(s)=\frac{۱}{s+a}-\frac{۱}{s+b}\Rightarrow X(s)=\Big[\operatorname{Ln}(s+a)-\operatorname{Ln}(s+b)\Big]_s^{\infty}$$

$$Y(s)=\operatorname{Ln}\frac{s+a}{s+b}\Big|_s^{\infty}=\operatorname{Ln}\frac{s+b}{s+a}=-\operatorname{Ln}\frac{s+a}{s+b}$$

مثال: مقدار انتگرال زیر را تعیین کنید.

$$I=\int_۰^{\infty}e^{-۲t}\cos ۳t\,dt$$

حل: با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس مقدار $F(s)$ در $s=۰$ برابر است با:

$$F(۰)=\int_{۰^-}^{\infty}f(t)dt$$

و با توجه به اینکه تبدیل لاپلاس $(e^{-at}\cos bt)u(t)$ برابر $\frac{s+a}{(s+a)^۲+a^۲}$ می‌باشد، بنابراین مقدار I برابر است با

$$I=\frac{s+۲}{(s+۲)^۲+۹}\Big|_{s=۰}=\frac{۲}{۱۳}$$

مثال: به کمک قضیه مقدار نهائی $f(\infty)$ را برای تابع $(1-e^{-at})u(t)$ به‌دست آورید که در آن $a>0$ است.

حل:

$$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}=\frac{a}{s(s+a)}$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0}[sF(s)]=\lim_{s\to 0}\frac{a}{s+a}=1$$

عکس تبدیل لاپلاس

هرگاه تبدیل لاپلاس یک تابع در دست باشد و بخواهیم خود آن تابع را به‌دست آوریم به آن لاپلاس معکوس می‌گویند که در واقع عکس عمل تبدیل لاپلاس بوده و با نماد زیر نمایش داده می‌شود

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$$

همان‌طور که قبلاً اشاره شد وارون لاپلاس یک تابع به کمک انتگرال‌گیری صورت می‌گیرد که به دلیل پیچیده بودن کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. در بعضی از زمان‌ها تبدیل لاپلاس معکوس را می‌توان با استفاده از جدول لاپلاس و یا کمی تغییرات به‌دست آورد ولی در اکثر مواقع نیاز به گسترش به کسرهای جزئی می‌باشد.

ابتدا با حل چند مثال تبدیل لاپلاس معکوس توابع معلوم را به‌دست می‌آوریم.

مثال: تبدیل لاپلاس معکوس تابع $F(s)=\frac{1}{(s+2)^3}$ را بیابید.

حل: تبدیل لاپلاس $e^{-2t}u(t)$ برابر $\frac{1}{s+2}$ می‌باشد. با توجه به روابط لاپلاس داریم

$$te^{-2t}u(t)\to\frac{1}{(s+2)^2}$$

$$t^2e^{-2t}u(t)\to\frac{2}{(s+2)^3}$$

لذا تابع $f(t)$ برابر است با

$$f(t)=\frac{1}{2}t^2e^{-2t}u(t)$$

مثال: وارون لاپلاس تابع $F(s)=\frac{30}{s^4}$ را تعیین کنید.

حل: همان‌طور که می‌دانیم

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)=\frac{1}{s^n}$$

چون $n=4$ می‌باشد $n-1=3$ بوده و $3!=3\times2\times1=6$ می‌باشد و داریم:

$$\frac{30}{s^4}=\frac{5\times3!}{s^4}=5\times\frac{3!}{s^4}\Rightarrow f(t)=5t^3$$

گسترش به کسرهای جزئی

اگر درجه چندجمله‌ای صورت از درجه چندجمله‌ای مخرج در تابع $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ بیشتر باشد $(n \geq m)$، ابتدا $P(s)$ بر $Q(s)$ تقسیم شده و سپس گسترش به کسرهای جزئی صورت می‌گیرد. لذا فرض می‌کنیم که $n < m$ بوده و قطب‌ها به‌صورت زیر می‌باشند:

الف) قطب‌های حقیقی مرتبه اول: در این حالت می‌توان $F(s)$ را به‌صورت زیر نشان داد

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{P(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_m)}=\frac{k_1}{s-s_1}+\frac{k_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{k_m}{s-s_m}$$

که در آن ضریب k از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$k_1=(s-s_1)F(s)\Big|_{s=s_1} \cdots ,\ k_r=(s-s_r)F(s)\Big|_{s=s_r}$$

مثال: تبدیل لاپلاس معکوس $F(s)$ را به‌دست آورید.

$$F(s)=\frac{4s^2+9s+1}{2s^2+4s}$$

حل:

$$F(s)=2+\frac{s+1}{2s^2+4s}=2+\frac{\frac{1}{2}(s+1)}{s(s+2)}=2+\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+2}$$

$$k_1=\frac{\frac{1}{2}(s+1)}{s+2}\Big|_{s=0}=\frac{1}{4}\ ,\ k_2=\frac{\frac{1}{2}(s+1)}{s}\Big|_{s=-2}=\frac{1}{4}$$

لذا $f(t)$ برابر است با

$$f(t)=2\delta(t)+\frac{1}{4}u(t)+\frac{1}{4}e^{-2t}u(t)$$

ب) قطب‌های حقیقی تکراری: اگر قطب s_r حقیقی و از مرتبه r باشد، ضریب k آن به‌صورت زیر تعیین می‌شود.

$$k_r=\frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{(r-1)}}{ds^{(r-1)}}\Big[(s+s_r)^r\cdot F(s)\Big]_{s=s_r}$$

مثال: تبدیل معکوس تابع $F(s)$ را به‌دست آورید.

$$F(s)=\frac{5s-1}{(s+1)^2(s+2)}=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{(s+1)^2}+\frac{k_3}{s+2}$$

$$k_3=(s+2)F(s)\Big|_{s=-2}=-11\ ,\ k_2=(s+1)^2F(s)\Big|_{s=-1}=-6$$

$$k_1=\frac{d}{ds}[(s+1)^2F(s)]\Big|_{s=-1}=\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{5s-1}{s+2}\right)\right]_{s=-1}=11$$

$$F(s)=\frac{11}{s+1}-\frac{6}{(s+1)^2}-\frac{11}{s+2}$$
$$f(t)=(11e^{-t}-6te^{-t}-11e^{-2t})u(t)$$

مثال:
$$f(t)=? \leftarrow F(s)=\frac{s+3}{s^3(s+1)(s+2)}$$

حل:
$$F(s)=\frac{k_{11}}{s^3}+\frac{k_{12}}{s^2}+\frac{k_{13}}{s}+\frac{k_2}{s+1}+\frac{k_3}{s+2}$$
$$k_2=\frac{(2)}{(-1)^3\times(1)}=-2\ ,\ k_3=\frac{(1)}{(-2)^3(-1)}=\frac{1}{8}$$
$$k_{11}=\Big[s^3F(s)\Big]_{s=0}=\frac{3}{2}\ ,\ k_{12}=\frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\Big[s^3F(s)\Big]_{s=0}=\frac{-s^2-6s-7}{(s^2+3s+2)^2}\Big|_{s=0}=\frac{-7}{4}$$
$$k_{13}=\frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2}{ds^2}\Big[s^3F(s)\Big]_{s=0}=\frac{2s^3-18s^2+42s+3}{(s^2+3s+2)^3}\Big|_{s=0}=\frac{30}{8}=\frac{15}{4}$$

بنابراین داریم
$$f(t)=\left(\frac{3}{4}t^2-\frac{7}{4}t+\frac{15}{4}\right)u(t)-2e^{-t}u(t)+\frac{1}{8}e^{-t}u(t)$$

ج) قطب‌ها به‌صورت مختلط: به‌صورت حالت الف می‌توانیم عمل کنیم و ضرایب را به‌دست بیاوریم به مثال زیر توجه کنید.

مثال:
$$F(s)=\frac{1}{s^2+2s+5}=\frac{1}{(s+1-j2)(s+1+j2)}=\frac{k_1}{s+1-j2}+\frac{k_2}{s+1+j2}$$
$$k_1=\frac{1}{s+1+j2}\Big|_{s=-1+j2}=\frac{1}{4}<-90^\circ\ ,\ k_2=\frac{1}{s+1-j2}\Big|_{s=-1-j2}=\frac{1}{4}<90^\circ$$

یعنی $k_1=k_2^*$ می‌باشد

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{4}<-90^\circ}{s+1-j2}+\frac{\frac{1}{4}<90^\circ}{s+1+j2}\right\}=?$$

ابتدا حالت کلی زیر را درنظر می‌گیریم

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k<\theta}{s+\delta-j\omega}+\frac{k<-\theta}{s+\delta+j\omega}\right\}=$$
$$f(t)=ke^{j\theta}e^{-(\delta-j\omega)t}u(t)+ke^{-j\theta}e^{-(\delta+j\omega)t}u(t)$$

$$= ke^{-\sigma t}[e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}]u(t)$$

$$\Rightarrow f(t) = 2ke^{-\sigma t}\cos(\omega t+\theta)u(t)$$

یعنی یک تابع سینوسی نمایی است.
برای مثال بالا می‌توان نتیجه گرفت

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\cos(2t-90^\circ)u(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t\,u(t)$$

مثال: تبدیل معکوس تابع $F(s)$ را بدست آورید.

حل:

$$F(s) = \frac{s+15}{s^2(s^2+2s+5)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s^2} + \frac{k_3}{s+1-j2} + \frac{k_4}{s+1+j2}$$

$$k_2 = s^2F(s)\Big|_{s=0} = 3\ ,\ k_1 = \left[\frac{d}{ds}s^2F(s)\right]_{s=0} = -1$$

$$k_3 = \frac{s+15}{s^2(s+1+j2)}\Big|_{s=-1+j2} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 45^\circ\ ,\ k_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\angle -45^\circ$$

$$F(s) = \frac{-1}{s} + \frac{3}{s^2} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\angle 45^\circ}{s+1-j2} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\angle -45^\circ}{s+1+j2}$$

$$f(t) = -u(t) + 3tu(t) + 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t}\cos(2t+45^\circ)u(t)$$

مثال: $f(t)$ را بیابید. $F(s) = \dfrac{4}{s^2(s^2+2s+2)}$

حل:

$$F(s) = \frac{k_{11}}{s^2} + \frac{k_{12}}{s} + \frac{As+B}{s^2+2s+2}$$

$$k_{11} = 2\ ,\ k_{12} = -2$$

روش اول:

$$\frac{As+B}{s^2+2s+2} = F(s) - \frac{k_{11}}{s^2} - \frac{k_{12}}{s} = \frac{2s^2(s+1)}{s^2(s^2+2s+2)} \Rightarrow A = B = 2$$

$$f(t) = [2(t-1) + 2e^{-t}\cos t]u(t)$$

روش دوم:

$$F(s) = \frac{(A-2)s^3 + (B-2)s^2 + 4}{s^2(s^2+2s+2)}$$

با مقایسه با رابطه اصلی $F(s)$ می‌توان نوشت

$$A-2=0\ ,\ B-2=0 \Rightarrow A=B=2$$

۶-۷ کاربرد تبدیل لاپلاس در تحلیل مدار

به کمک تبدیل لاپلاس می‌توان منابع جریان و ولتاژ، و عناصر مقاومت، سلف و خازن در حوزهٔ زمان را به حو
S تبدیل کرد. و به کمک کلیه قوانینی که قبلاً مطالعه شده است می‌توان مدار را در حوزه S تحلیل کرد و سپ
به حوزه زمان برگشت. برای این منظور ابتدا باید مدار معادل R و L و C در حوزه لاپلاس را تعیین نمود.

الف) مقاومت الکتریکی: طبق قانون اهم داریم

$$V = Ri$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف

$$V(s) = RI(s)$$

یعنی:

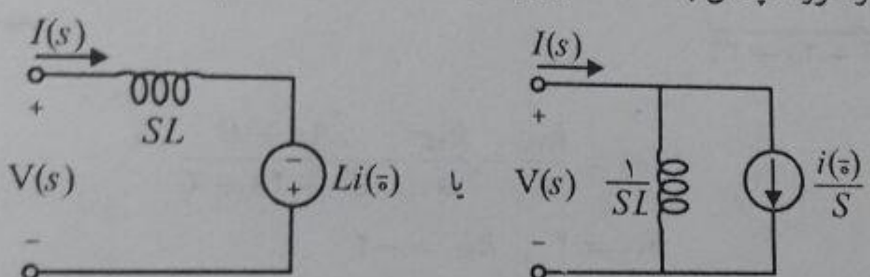
$$Z(s) = R$$

ب) سلف: معادله ولتاژ القایی سلف را نوشته و از طرفین لاپلاس می‌گیریم

$$V = L\frac{di}{dt} \Rightarrow V(s) = L[SI(s) - i(\circ^-)]$$

$$V(s) = SLI(s) - Li(\circ^-) \quad \text{یا} \quad I(s) = \frac{V(s)}{SL} + \frac{i(\circ^-)}{S}$$

مدل‌های سلف در حوزه لاپلاس با استفاده از روابط بالا در شکل زیر رسم شده است



در مواردی که انرژی اولیه ذخیره شده در سلف صفر باشد (یعنی $i(\circ^-) = \circ$) داریم

$$Z(s) = SL$$

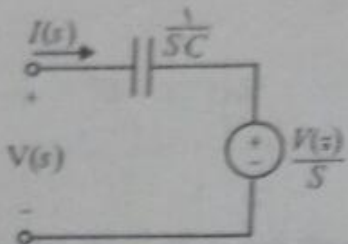
و اگر فقط علاقمند به پاسخ ماندگار سینوسی باشیم خواهیم داشت

$$Z(j\omega) = j\omega L$$

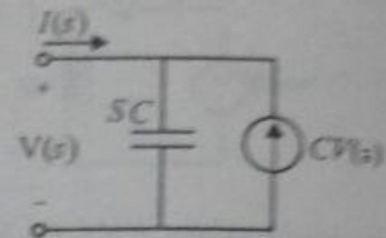
ج) خازن: و به‌طور مشابه برای خازن در حوزه لاپلاس خواهیم داشت

$$i = C\frac{dv}{dt} \Rightarrow I(s) = C[SV(s) - V(\circ^-)] = SCV(s) - CV(\circ^-)$$

$$I(s)=\frac{V(s)}{۱/SC}-CV(۰^-) \text{ یا } V(s)=\frac{۱}{SC}I(s)+\frac{V(۰^-)}{S}$$



یا



اگر مدار دارای انرژی ذخیره شده نباشد داریم

$$Z(s)=\frac{۱}{SC}$$

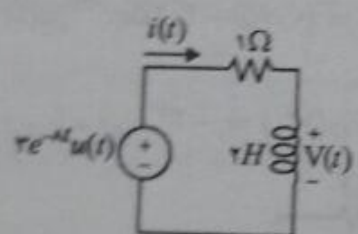
حل مدارهای با شرایط اولیه با استفاده از تبدیل لاپلاس

اکنون باید به این نکته توجه داشت که برای حل مدارها می‌توان به دو روش عمل نمود

روش اول ـ نوشتن معادلات دیفرانسیل مدار و حل آن‌ها با تبدیل لاپلاس.

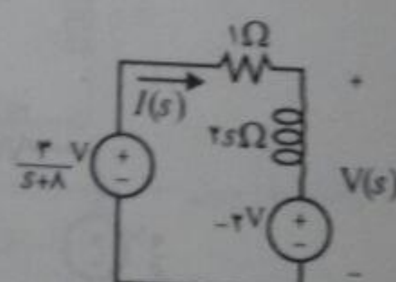
روش دوم ـ بردن مدار به حوزه لاپلاس و حل این مدار (روش کلاسیک)

مثال: ولتاژ $V(t)$ را در شکل مقابل محاسبه کنید.



$$i(۰^-)=۱^A$$

حل: عناصر مدار را به حوزه S می‌بریم پس به هر روشی می‌توان مدار را حل نمود که ساده‌ترین آن به‌صورت زیر است



$$I(s)=\frac{\left[\frac{۳}{s+۸}+۲\right]}{۱+۲s}=\frac{s+۹/۵}{(s+۸)(s+۰/۵)}$$

و

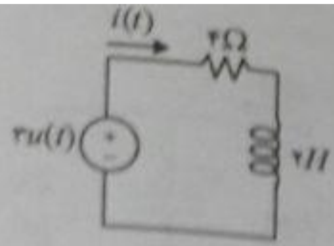
$$V(s)=۲sI(s)-۲$$

$$V(s)=\frac{۲s(s+۹/۵)}{(s+۸)(s+۰/۵)}-۲=\frac{۲s-۸}{(s+۸)(s+۰/۵)}$$

با به کارگیری تجزیه به کسرهای جزئی داریم

$$V(s)=\frac{۳/۵}{s+۸}-\frac{۱/۲}{s+۰/۵}\Rightarrow V(t)=[۳/۲e^{-۸t}-۱/۲e^{-۰/۵t}]u(t)V$$

مثال: برای مدار مقابل معادله جریان $i(t)$



$$i_L(0^-) = 5^A$$

حل: اکنون به روش دوم مدار را حل می‌کنیم یعنی ابتدا به کمک KVL معادله دیفرانسیل مدار را می‌نویسیم سپس از طرفین لاپلاس می‌گیریم

$$2\frac{di}{dt} + 4i = 3u(t)$$

$$\mathcal{L}\left[2\frac{di}{dt} + 4i\right] = \mathcal{L}[3u(t)] \Rightarrow \mathcal{L}\left[2\frac{di}{dt}\right] + \mathcal{L}[4i] = \mathcal{L}[3u(t)]$$

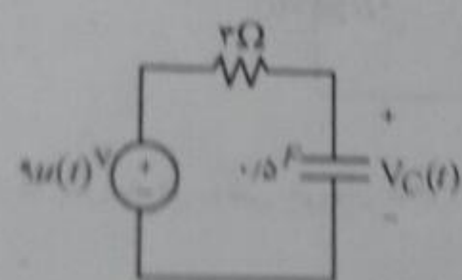
$$\Rightarrow 2[sI(s) - 5] + 4I(s) = \frac{3}{s} \Rightarrow I(s)(2s + 4) = \frac{3}{s} + 10$$

$$I(s) = \frac{3}{2s(s+2)} + \frac{10}{2(s+2)} = \frac{1.5}{s(s+2)} + \frac{5}{s+2}$$

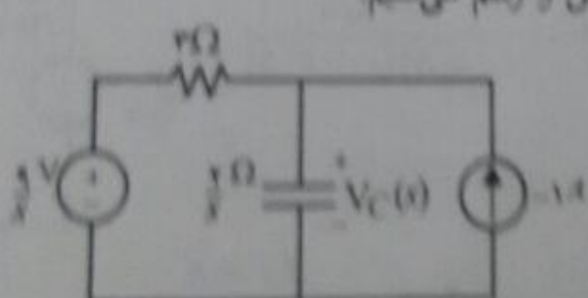
حال به روش کسرهای جزئی عکس تبدیل لاپلاس را به‌دست می‌آوریم

$$I(s) = \frac{0.75}{s} + \frac{4.25}{s+2} \Rightarrow i(t) = [0.75 + 4.25e^{-2t}]u(t)\ A$$

مثال: در مدار شکل زیر با فرض $V_C(0^-) = -2^V$، $V_C(t)$ را به‌دست آورید.



حل: معادل مدار در حوزهٔ فرکانس را رسم می‌کنیم:



با نوشتن معادله گره داریم

$$-1 = \frac{V_C}{2/s} + \frac{V_C - \frac{9}{s}}{3}$$