فصل ششم

میدانهای متغیر با زمان Time-varying Fields

تـا کنـون میـدانهای بررسـی شـده سـاکن بودنـد یـا بعبـارتی نـامتغیر بـا زمـان. میـدانهای الکتریکـی و مغناطیـسی سـاکن هیچگونـه وابـستگی بـه یکـدیگر نـدارد امـا ایـن موضـوع در مـورد میـدانهایی کـه تغییـرات زمـانی دارنـد صـادق نمـی باشـد. وابـستگی متقابـل و وجـود همزمان میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متغیر با زمان اجتناب ناپذیر است.

قانون فاراده Faraday

شـاید بتـوان گفـت کـه اسـاس میـدانهای متغیـر بـا زمـان بـر پایـه قـانون فـارادی نهـاده شـده اسـت. بـر طبـق ایـن قـانون تغییـرات زمـانی فلـوی میـدان مغناطیـسی ایجـاد نیـروی محرکـه الکتریکی می کند که با عامل بوجود آورنده خود مخالف می کند یا بعبارتی:

$$e=-\frac{d\psi}{dt}$$

از طرفی

$$\psi=\int_s \vec{B}.d\vec{s}$$

تغییـرات زمـانی ψ مـی توانـد ناشـی از تغییـرات زمـانی $\vec{B}$ (یـا عامـل اصـلی آن i) باشـد یـا ناشـی از تغییـرات زمـانی سـطح s باشـد کـه ψ از آن عبـور مـی کنـد و یـا تغییـرات تـوأم هـر دو $(S,\vec{B})$

$$e=emf=\oint_c \vec{E}.d\vec{l}$$

در حالت اول

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}.d\vec{s}=\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.d\vec{s}$$

و یا (شکل انتگرالی قانون فارادی)

$$\oint_c \vec{E}.d\vec{l}=-\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.d\vec{s}$$

$$\int_s \nabla\times\vec{E}.d\vec{s}=-\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.d\vec{s}$$

$$\int_s\left(\nabla\times\vec{E}+\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right).d\vec{s}=0 \quad\Rightarrow\quad \nabla\times E+\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=0$$

قانون اول ماکسول (شکل دیفرانسیلی قانون فارادی) $\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

یعنی تغییرات زمانی میدان مغناطیسی، ایجاد میدان الکتریکی می کند.

در حالت دوم: سطح ds دارای تغییرات زمانی باشد.

یعنی اگر قطعه $d\vec{\ell}$ در مدت dt با سرعت $\vec{V}$ در میدان $\vec{B}$ حرکت کند:

$$d\vec{s}=\vec{V}dt\times d\vec{l}$$

میزان فلوئی که از این سطح در مدت dt می گذرد:

$$d\psi = \int_s \vec{B}.d\vec{s} = \oint_c \vec{B}.\left(\vec{V}dt \times d\vec{l}\right)$$

یا به عبارتی

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -\oint_c \vec{B}.\left(\vec{V} \times d\vec{l}\right) = \oint_c \vec{B}.\left(d\vec{\ell} \times \vec{V}\right)$$

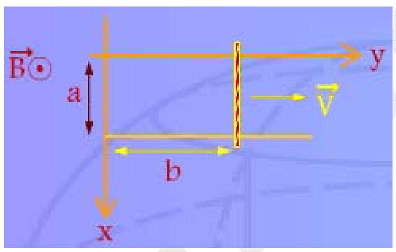
طبق روابط برداری:

$$e = \oint_c \left(\vec{V} \times \vec{B}\right).d\vec{\ell}$$

و یا بطور کلی (ترکیب دو حالت)

$$e = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.d\vec{s} + \oint_c \left(\vec{V} \times \vec{B}\right).d\vec{\ell}$$

مثال: محاسبه ولتاژ القائی در مداری که در میدان مغناطیسی متغیر با زمان $\vec{B} = \hat{a}_z B_0 \cos\omega t$ قرار دارد و قسمتی از آن با سرعت $\vec{V} = v_0 \hat{a}_y$ حرکت می کند.



$$d\vec{s} = \hat{a}_z dxdy \quad , \quad d\vec{\ell} = dx\hat{a}_x$$

$$\begin{aligned} e &= -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.d\vec{s} + \oint_c \vec{V} \times \vec{B}.d\vec{\ell} \\ &= -\int_s \left(-\hat{a}_z B_0 \omega \sin\omega t\right).\left(\hat{a}_z dxdy\right) + \int_a^0 v_0 \hat{a}_y \times \hat{a}_z B_0 \cos\omega t.dx\hat{a}_x \\ &= B_0 \omega ab \sin(\omega t) - av_0 B_0 \cos\omega t \end{aligned}$$

جریان جابجائی Displacement current

در میدان الکتریکی ساکن از تغییرات زمانی صرفنظر شد و حالت ماندگار را در نظر گرفتیم

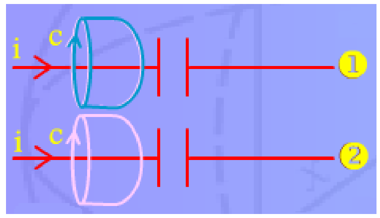
$$\nabla.\vec{J} = 0$$

اما می دانیم که (اصل بقاء بار الکتریکی)

$$\nabla.\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

از طرفی می دانیم $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$

برای یک سیستم (مدار) خازنی که جریان i از مدار می گذرد



برای سیستم ۱

$$\oint_c \vec{H}.d\vec{l} = I_{total} \quad \Rightarrow \quad H2\pi r = 0 \quad \Rightarrow \quad H = 0$$

برای سیستم ۲

$$\oint_c \vec{H}.d\vec{l} = I_{total} \quad \Rightarrow \quad H2\pi r = i \quad \Rightarrow \quad H = \frac{i}{2\pi r}$$

برای رفع تناقض بایستی

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_D$$

که $\vec{J}_D$ نامشخص است اما:

$$\nabla.\left(\nabla \times \vec{H}\right) = \nabla.\left(\vec{J} + \vec{J}_D\right)$$
$$0 = \nabla.\vec{J} + \nabla.\vec{J}_D$$

یا بعبارتی

$$\nabla.\vec{J}_D = -\nabla.\vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla.\vec{D}\right) = \nabla.\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$
$$\nabla.\left(\vec{J}_D - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

یعنی

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

بدین معنی که تغییرات زمانی میدان الکتریکی، ایجاد میدان مغناطیسی می کند.

معادلات ماکسول

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla.\vec{D} = \rho \end{cases}$$
$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla.\vec{B} = 0 \end{cases}$$