

فصل پنجم

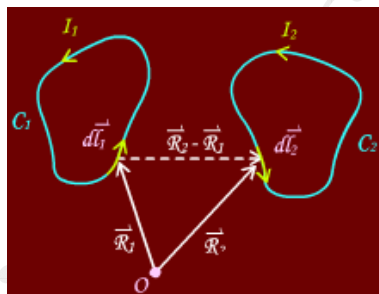
میدان های مغناطیسی ساکن Static Magnetic Fields

یونانیها در حدود ۶۰۰ سال قبل از میلاد با نیروی جاذبه قطعات طبیعی آهنربا آشنا بودند و از کلمه Magnesia (مکانی که اولین بار آهنربای طبیعی در آنجا دیده شده) برای لغت مغناطیس استفاده نمودند.

در سال ۱۶۰۰ میلادی پزشک دربار انگلستان بنام گیلیوت با آزمایشاتی به وجود آهنربای زمین پی برد. سپس افرادی مانند ولتا، آمپر و بیوساوار بررسی های بیشتر و کشفیات متعددی را بدست آوردند که منجر به ارائه قوانینی در میدان های مغناطیسی گردید.

قانون آمپر در فضای خالی

دو مدار بسته c_1, c_2 که بترتیب جریان های مستقیم I_1, I_2 از آنها می گذرد و در فضای خالی مستقر شده اند را در نظر می گیریم (I_2, I_1 جریان های مستقیم هستند)



نیروی وارد بر dl_2 از طرف dl_1

$$d\vec{F}_{21} = k \mu \frac{I_1 I_2}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^2} d\vec{l}_2 \times [d\vec{l}_1 \times (\vec{R}_2 - \vec{R}_1)]$$

جهت $d\vec{F}_{21}$: $d\vec{l}_2 \times [d\vec{l}_1 \times (\vec{R}_2 - \vec{R}_1)]$

$$d\vec{F}_{21} = k\mu \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times [I_1 d\vec{l}_1 \times (\vec{R}_2 - \vec{R}_1)]}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^3}$$

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-4} \text{ H/m} \quad \mu \text{ ضریب نفوذپذیری مغناطیسی Magnetic permeability محیط}$$

$$k = \frac{1}{4\pi}$$

بنابراین کل نیروی وارد بر c_2 حامل جریان I_2 به سبب کل مدار c_1 حامل جریان I_1 عبارتست

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \oint_{c_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (\vec{R}_2 - \vec{R}_1)}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^3} \quad \text{از:}$$

که بنام قانون آمپر معروف است.

چگالی فلوئی میدان مغناطیسی **Magnetic flux density**

در معادله قبل انتگرال دوم (روی مسیر c_1) را چگالی فلوئی میدان مغناطیسی تولید شده توسط جریان عبوری از کل مدار c_1 در نقطه \vec{R}_2 گفته می شود.

$$\vec{B}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (\vec{R}_2 - \vec{R}_1)}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^3}$$

بنابراین

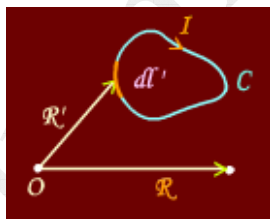
$$\vec{F}_{21} = \oint_{c_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{21}$$

واحد \vec{B} نیوتن بر آمپر یا وبر بر متر مربع می باشد که به آن تسلا گویند.

$$\frac{N}{Amp} \equiv \frac{Wb}{m^2} \equiv Tesla$$

بنابراین با توجه به تعریف فوق، در هر نقطه دلخواه \vec{R} بردار \vec{B} بعلت وجود یک مدار حامل جریان بصورت روبرو محاسبه می شود:

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_c \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$



که به قانون بیوساوار Biot & Savart مشهور است.

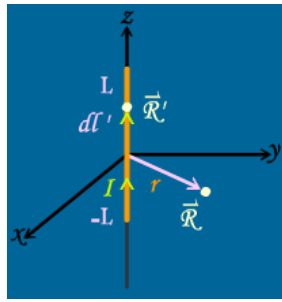
برای منابع جریان سطحی و حجمی بترتیب با چگالی جریان \vec{J}, \vec{J}_s بردار \vec{B} بصورت زیر خواهد بود:

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \frac{\vec{J}_s dS' \times (\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J} dV' \times (\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

نکته: از \vec{J} بجای \vec{J}_s نیز استفاده می شود واحد \vec{J}_s برابر $\frac{Amp}{m}$ است.

مثال: چنانچه جریان مستقیم I در یک سیم مستقیم بطول $2L$ جاری باشد، \vec{B} در نقطه ای واقع در صفحه عمودالمنصف این سیم که فاصله r از سیم قرار دارد را بدست آورید:



$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_c I d\vec{l}' \times \frac{(\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

$$\vec{R} = r\hat{a}_r$$

$$\vec{R}' = z'\hat{a}_z$$

$$d\vec{l}' = d\vec{l}_z = \hat{a}_z dz'$$

$$\vec{R} - \vec{R}' = r\hat{a}_r - z'\hat{a}_z$$

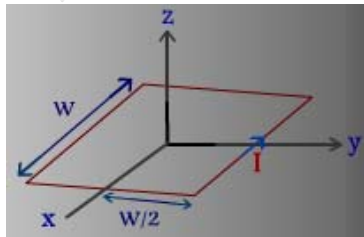
$$|\vec{R} - \vec{R}'| = \sqrt{r^2 + z'^2}$$

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{I dz' \hat{a}_z \times (r\hat{a}_r - z'\hat{a}_z)}{[r^2 + z'^2]^{3/2}}$$

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{rdz' \hat{a}_\phi - 0}{[r^2 + z'^2]^{3/2}} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(\frac{z'}{\sqrt{r^2 + z'^2}} \right) \Big|_{-L}^L$$

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 I L}{2\pi r \sqrt{r^2 + L^2}} \hat{a}_\phi \quad \text{Tesla}$$

مثال: مطلوبست محاسبه چگالی فلوئید میدان مغناطیسی در مرکز یک مدار مربع شکل که جریان I از آن عبور می کند طول ضلع مربع W می باشد.



$$\vec{B} = 4B_1$$

B_1 = چگالی فلوئید مغناطیسی ناشی از سیم بطول W در فاصله $\frac{W}{2}$

$$2L = W \quad , \quad r = \frac{W}{2}$$

با تکیه بر نتیجه مثال قبل:

$$\vec{B}_1\left(\frac{W}{2}\right) = \frac{\mu_0 I W/2}{2\pi \frac{W}{2} \sqrt{\left(\frac{W}{2}\right)^2 + \left(\frac{W}{2}\right)^2}} \hat{a}_z$$

$$\vec{B} = 4\vec{B}_1 = \frac{4\mu_0 I}{2\pi W/2 \sqrt{2}} \hat{a}_z \Rightarrow \vec{B} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi W} \hat{a}_z$$

پتانسیل مغناطیسی برداری

دیده می شود که محاسبه \vec{B} از طریق قانون بیوساوار که با انتگرال گیری برداری صورت می گیرد مشکل است. حال می توان نشان داد که \vec{B} براحتی از برداری که بنام پتانسیل مغناطیسی برداری تعریف می شود محاسبه کرد:

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left[\frac{\vec{J}(\vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \right] dv'$$

$$\vec{B} = \nabla \times \left[\frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|} dv' \right]$$

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|} dv'$$

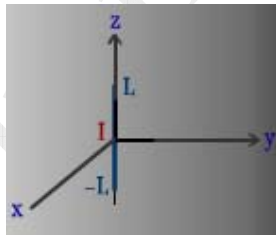
پتانسیل مغناطیسی برداری Vector magnetic potential

که برداری است همجهت با منبع جریان و کرل آن چگالی فلوی میدان را نتیجه می دهد.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

[مشابه پتانسیل الکتریکی که منفی گرادیان آن شدت میدان الکتریکی را نتیجه می دهد. $[\vec{E} = -\nabla V]$ واحد \vec{A} برابر با Web/m است. طبق رابطه بالا عمود بودن جهت \vec{A}, \vec{B} (یا منبع) طبق قانون دست راست نشان می دهد.

مثال: مطلوبست محاسبه \vec{B} ناشی از یک سیم مستقیم بطور $2L$ حامل جریان I در نقطه ای بر روی صفحه عمودالمنصف سیم با استفاده از محاسبه \vec{A} با توجه به مثال های گذشته



$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{l}'}{|\vec{R} - \vec{R}'|}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz' \hat{a}_z}{\sqrt{r^2 + z'^2}} = \hat{a}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(z' + \sqrt{z'^2 + r^2} \right) \Big|_{-L}^L$$

$$\vec{A}(\vec{R}) = \hat{a}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{\sqrt{L^2 + r^2} - L} \quad Web/m$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \hat{a}_r \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \hat{a}_\varphi \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

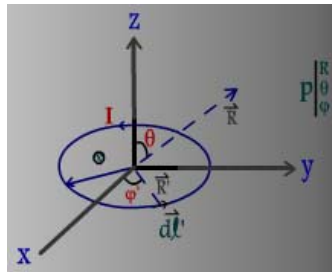
$$\vec{B} = \hat{a}_\varphi \frac{\mu_0 I L}{2nr \sqrt{L^2 + r^2}}$$

چون $\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} = 0$ است بنابراین:

یعنی I (یا \vec{A}) که در جهت \hat{a}_z است، طبق قانون دست راست $(\vec{B} = \nabla \times \vec{A})$ که انگشت شست در جهت I است، جهت \vec{B} در جهت جمع شدن سایر انگشتان یعنی \hat{a}_φ خواهد بود.

دو قطبی مغناطیسی Magnetic Dipole

یک دو قطبی مغناطیسی متشکل از یک حلقه دایره ای کوچک بشعاع مشخصی است که جریان الکتریکی از آن عبور می کند. بعنوان مثال مطابق شکل یک مدار دایره ای شعاع b که جریان الکتریکی از آن عبور می کند بعنوان مثال مطابق شکل یک مدار دایره ای بشعاع b که جریان I از آن می گذرد را در نظر بگیرید چگالی فلوی میدان مغناطیسی بعلت این ساختار در فواصل دور ($R \gg b$) بصورت زیر محاسبه می شود.



موقعیت نقطه کلی P در مختصات کروی (R, θ, φ) و موقعیت دیفرانسیل منبع Idl' بصورت $\left(b, \frac{\pi}{2}, \varphi'\right)$ است.

$$\vec{A}(\vec{R}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_c \frac{Id\vec{l}}{|\vec{R} - \vec{R}'|}$$

$$\vec{R} = \hat{a}_x x + \hat{a}_y y + \hat{a}_z z = R\hat{a}_R$$

$$\vec{R}' = \hat{a}_x b \cos \varphi' + \hat{a}_y b \sin \varphi' = b\hat{a}_{\varphi'}$$

$$\vec{R} - \vec{R}' = (x - b \cos \varphi')\hat{a}_x + (y - b \sin \varphi')\hat{a}_y + z\hat{a}_z$$

$$|\vec{R} - \vec{R}'| = \sqrt{(x - b \cos \varphi')^2 + (y - b \sin \varphi')^2 + z^2}$$

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|} = [x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - 2bx \cos \varphi' - 2by \sin \varphi']^{-\frac{1}{2}}$$

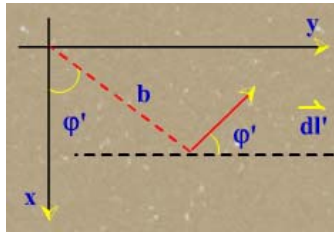
$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|} = [R^2 + b^2 - 2bx \cos \varphi' - 2by \sin \varphi']^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|} = R^{-1} \left[1 + \frac{b^2}{R^2} - \frac{2bx}{R^2} \cos \varphi' - \frac{2by}{R^2} \sin \varphi' \right]^{-\frac{1}{2}}$$

برای فواصل دور:

$$R \gg b \Rightarrow \frac{b^2}{R^2} \rightarrow 0$$

بنابراین با تقریب فوق و استفاده از دو جمله ای نیوتن:



$$\frac{1}{|\bar{R} - \bar{R}'|} \approx \frac{1}{R} \left[1 + \frac{bx}{R^2} \cos \varphi' + \frac{by}{R^2} \sin \varphi' \right]$$

$$d\bar{l}' = \hat{a}_\varphi b d\varphi' = -\hat{a}_x b \sin \varphi' d\varphi' + \hat{a}_y b \cos \varphi' d\varphi'$$

$$d\bar{l}' = b d\varphi' [-\hat{a}_x \sin \varphi' + \hat{a}_y \cos \varphi']$$

$$\bar{A}(\bar{R}) \approx \frac{\mu_0 I b}{4\pi R} \int_0^{2\pi} (-\hat{a}_x \sin \varphi' + \hat{a}_y \cos \varphi') \left[1 + \frac{bx}{R^2} \cos \varphi' + \frac{by}{R^2} \sin \varphi' \right] d\varphi'$$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0 I b}{4\pi R} \left(-\hat{a}_x \frac{yb}{R^2} \pi + \hat{a}_y \frac{xb}{R^2} \pi \right)$$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0 I b^2 \pi}{4\pi R^3} (-\hat{a}_x y + \hat{a}_y x)$$

ممان دو قطبی مغناطیسی بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\bar{M} = \hat{a}_z SI$$

$$S = \text{Dipole Area} = \pi b^2$$

بنابراین

$$\bar{A}(\bar{R}) = \frac{\mu_0 \bar{M}}{4\pi R^3} [\hat{a}_z \times \bar{R}]$$

با توجه به آنکه

$$\hat{a}_z \times \bar{R} = -\hat{a}_x y + \hat{a}_y x$$

در نتیجه

$$\bar{A}(\bar{R}) = \frac{\mu_0 \bar{M} \times \bar{R}}{4\pi R^3} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{\bar{M}}{R} \right)$$

$$\bar{A}(\bar{R}) = \hat{a}_\varphi \frac{\mu_0 M}{4\pi R^2} \times \sin \theta$$

و یا:

$$\hat{a}_z \times \hat{a}_R = \hat{a}_\varphi \sin \theta \quad \text{چون}$$

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} = \frac{\mu_0 I \pi b^2}{4\pi R^3} [\hat{a}_R 2 \cos \theta + \hat{a}_\theta \sin \theta]$$

- تشابه و دوگان در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی

با توجه به:

$$V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\rho dv'}{|\bar{R} - \bar{R}'|} \quad \text{الکتریکی}$$

$$V = \frac{\bar{P} \cdot \hat{a}_R}{4\pi \epsilon_0 R^2}$$

$$\bar{E} = -\nabla V$$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\bar{J} dv'}{|\bar{R} - \bar{R}'|} \quad \text{مغناطیسی}$$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0 \bar{M} \times \hat{a}_R}{4\pi R^2}$$

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$$

می توان گفت که:

∇	0	$\frac{1}{\epsilon_0}$	\vec{E}	\vec{P}	v	ρ	الکتریکی
$\nabla \times$	X	μ_0	\vec{B}	\vec{M}	\vec{A}	\vec{J}	مغناطیسی
	ضرب تفوذپذیری	میدان	ممان دوقطبی	پتانسیل	منبع		

- دیورژانس و کرل \vec{B}

می دانیم که دیورژانس کرل هر بردار برابر صفر است بنابراین

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

و یا:

صفر شدن دیورژانس \vec{B} به این مفهوم است که خطوط میدان \vec{B} خطوط بسته ای هستند که نقطه شروع و نقطه ختم مشخص ندارد و یا عبارتی قطب مثبت یا منفی مانند میدان الکتریکی نداشته و عبارتی تک قطب در میدان مغناطیسی وجود ندارد بلکه بصورت دو قطبی است.

از طرفی B بعنوان چگالی فلوی مغناطیسی می تواند در محاسبه فلوی میدان مغناطیسی عمل نماید یعنی کل فلوی مغناطیسی که از سطح S خارج می شود:

$$\psi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

اگر S سطح بسته ای باشد

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{B} dv = 0$$

$$\psi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

همچنین

می دانیم که طبق قضیه هلمهولتز برای مشخص کردن یک میدان بایستی کرل و دیورژانس آن میدان معین نمائیم.

محاسبه کرل:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$$

می دانیم که برای هر برداری

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}}{|R - R'|} DV'$$

از طرفی

چنانچه از طرفین کرل بگیریم، می توان ثابت کرد که:

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \vec{J}$$

همچنین باتوجه به روابط برداری می توان ثابت کرد که:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

که مشابه $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ در میدان الکتریکی ساکن است.

قانون مداری آمپر Ampere's circuital law

می دانیم که:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

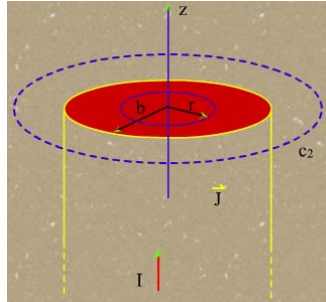
$$\int_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot D\vec{S}$$

یا عبارتی انتگرال \vec{B} روی یک مسیر بسته C برابر است با μ_0 برابر کل جریانی که از سطح S که مسیر بسته C آنرا احاطه کرده است.

رابطه فوق مشابه قانون گاوس در میدان الکتریکی است که می تواند جهت محاسبه \vec{B} که روی همه نقاط مسیری مقدار مساوی داشته باشد بکار گرفته شود.

مثال: یک هادی مستقیم و بسیار طویل با سطح مقطع دایره ای به شعاع b جریان ماندگار I را حمل می کند چگالی فلوی میدان مغناطیسی در کل فضا را بدست آورید:



با فرض توزیع یکنواخت جریان در سطح مقطع هادی:

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi b^2} \hat{a}_z$$

$r \leq b$: یک مسیر دایره ای به شعاع r است که B روی نقاط آن مقدار ثابتی است.

$$\oint_{C_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{s}'$$

$$\vec{B}_1 = B_1 \hat{a}_\phi, \quad d\vec{l} = r d\phi \hat{a}_\phi, \quad d\vec{s}' = r' dr' d\phi'$$

بنابراین

$$\oint_{C_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B_1 \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_\phi r d\phi = B_1 2\pi r$$

$$\int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{s}' = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{I}{\pi b} \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z r' dr' d\phi' = \frac{I}{\pi b^2} \pi r^2$$

در نتیجه

$$B_1 2\pi r = \mu_0 \frac{I r^2}{b^2} \Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi b^2} \hat{a}_\phi$$

اما برای ناحیه $r > b$

$$\oint_{C_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{s}' = \mu_0 I_{total}$$

$$2\pi r B_2 = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$



مثال: مطلوبست تعیین چگالی فلوی میدان مغناطیسی در داخل سیم پیچ حلقوی دارای تعداد دور برابر با N با هسته هوایی که جریان I از سیم پیچ می گذرد. سطح مقطع هسته آن دایره ای و شعاع متوسط آن برابر b و شعاع هسته (هر دور سیم) برابر a می باشد.

در فاصله $r < b - a$ چون هیچ جریانی از یک مسیر دایره ای بشعاع r عبور نمی کند طرف دوم قانون آمپر صفر و بنابراین $B = 0$ می شود.
همچنین برای $r > b + a$ چون کل جریان $I_{total} = NI - NI = 0$ است باز $B = 0$ خواهد بود.

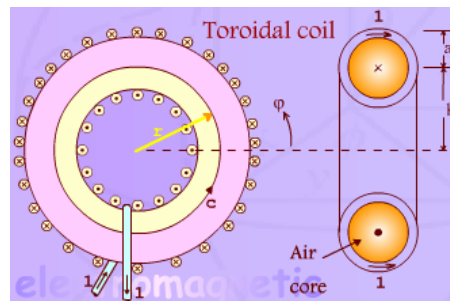
اما $b - a < r < b + a$

$$\int_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{total}$$

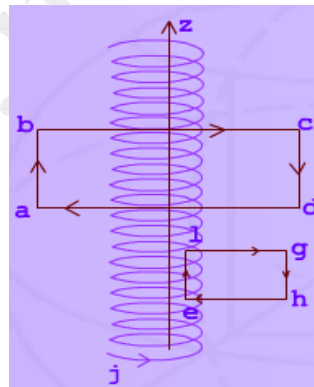
$$B 2\pi r = \mu_0 NI$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{\ell_{eff}} \hat{a}_\phi$$



مثال: مطلوبست محاسبه \vec{B} ناشی از یک سلفوئید طولی، یکنواخت و پیوسته. شعاع سلفوئید برابر a با جریان عبور از آن برابر I و تعداد دورهای سیم پیچ در واحد طول برابر n است. با فرض آنکه محور سلفوئید منطبق با محور z است، با عنایت به قانون دست راست و نامحدود بودن طول سیم پیچ و یکنواختی آن B تنها دارای مولفه z است.



برای نقاط خارج از سلفوئید:
با مسیر مستطیلی $abcd$

$$\oint_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{total}$$

$$I_{total} = (nI - nI)ab = 0$$

$$\oint_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$= \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + 0 + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} + 0 = 0$$

$$= B_1(ab) - B_2(cd) = 0$$

چون \vec{B} , $d\vec{l}$ در دو مسیر bc و da بر هم عمودند

چون B در جهت z است

چون فاصله اضلاع ab و cd از سیم پیچ الزاماً برابر نیستند دو حالت ممکن است وجود داشته باشد یا B_1 و B_2 (میدان در خارج از سلفوئید) صفر است و یا در همه جا (خارج از سلفوئید) ثابت.

اما حالت ثابت بودن غیرممکنست بنابراین:

$$B_1 = B_2 = B_{\text{خارج}} = 0$$

برای نقاط داخل سلفوئید:

با مسیر مستطیلی $efgh$

$$\oint_{efgh} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{total}}$$

$$I_{\text{total}} = nI(ef)$$

از چهار زیر مسیر تنها مسیر ef انتگرال مقدار دارد

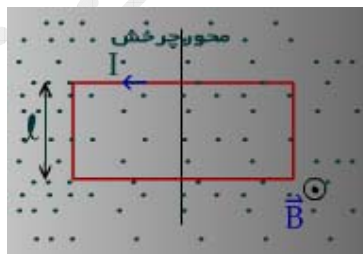
$$\oint_{efgh} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_e^f \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(ef)$$

بنابراین

$$B(ef) = \mu_0 nI(ef) \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 nI \hat{a}_z$$

نکته: زمانی که یک قاب (حلقه) حامل جریان (دو قطبی مغناطیسی) در یک میدان مغناطیسی قرار گیرد بر دو قطبی نیروی وارد می شود (گشتاور) بنحوی که ممان مغناطیسی دو قطبی را در جهت میدان قرار گیرد.

بعنوان مثال: اگر یک دو قطبی مغناطیسی به ابعاد l, a (با مساحت $s=al$) که جریان I از آن عبور می کند در یک میدان یکنواختی با چگالی \vec{B} قرار گیرد، کوپل حرکتی وارد بر دو قطبی را به قرار زیر بدست می آید.



(α زاویه بین \vec{B} و \vec{M})

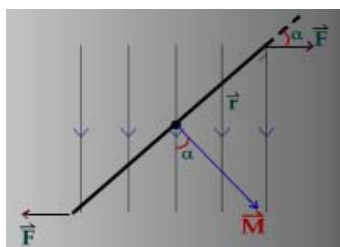
$$\vec{M} = Ial\hat{a}_n$$

$$\vec{M} = IS\hat{a}_n$$

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$$

$$F = IlB \sin 90^\circ = IlB$$

طبق قانون بیوساوار \vec{F} نیروی وارد بر اضلاع بطول l کوپل نیرو وارد بر دو قطبی، ایجاد گشتاور زیر می کند.



$$\vec{T} = \vec{r} \times 2\vec{F} \Rightarrow T = \frac{a}{2} \times 2IlB \sin \alpha$$

$$T = aIlB \sin \alpha$$

$$T = SIB \sin \alpha$$

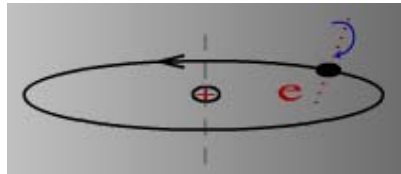
$$T = MB \sin \alpha$$

$$\vec{T} = \vec{M} \times \vec{B}$$

بنابراین دو قطبی تحت تأثیر این گشتاور قرار گرفته و حرکت می کند تا α به مقدار صفر برسد و یا بعبارتی \vec{M} در امتداد \vec{B} قرار گیرد.

انواع اجسام مغناطیسی و میدان مغناطیسی در حضور آنان

در ساختار تمام مواد و عناصر دو قطبی های مغناطیسی که ناشی از چرخش الکترون روی مدار به دور هسته اتم آنان است وجود دارد. علاوه برآن حرکت هر الکترون به دور خود نیز دو قطبی مغناطیسی بوجود می آورد بنابراین در داخل هر اتم دو نوع ممان دو قطبی دیده می شود.



براساس آنکه ممان کل هر اتم در حالت عادی (تعادل) به چه صورت است و عکس العمل آن در زمان اعمال یک میدان مغناطیسی خارجی چگونه است مواد به دسته های زیر تقسیم می شوند.

مواد Diamagnetic: ممان کل هر اتم برابر صفر است وقتی که در یک میدان قرار می گیرد، میدان کل کاهش جزئی می یابد موادی مانند: بیسموت، هیدروژن، هلیم، مس، طلا، سیلیکون و جرمانیم

مواد Paramagnetic: ممان کل هر اتم برابر صفر نمی باشد.

وقتی که در یک میدان قرار می گیرد، میدان کل افزایش جزئی می یابد.

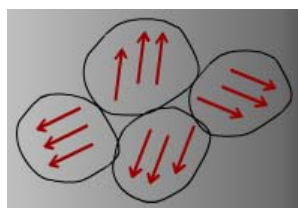
موادی مانند: پتاسیم، اکسیژن و نگستن

این دو مواد را مواد غیر مغناطیسی گویند Nonmagnetic Materials

اما نوع سوم:

مواد مغناطیسی است که بنام Ferromagnetic مشهورند.

در این نوع ممان کل هر اتم دارای مقدار قابل توجه است و هر دسته بر روی هم اثر گذاشته و حوزه های کوچک مغناطیسی بوجود می آورند که دارای ابعادی تا چند mm^3 هستند.



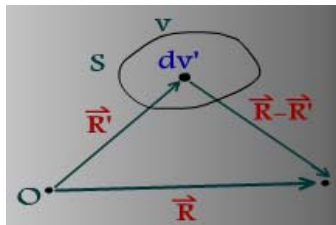
اما در کل بدلیل نامنظم بودن این حوزه ها، اثر یکدیگر را خنثی می کنند. اما وقتی در یک میدان قرار می گیرند، میدان کل را شدیداً افزایش می دهند. موادی مانند: آهن، نیکل و کوبالت

جریانهای معادل مغناطیسی

در صورتی که مواد خصوصاً مغناطیسی قرار گیرند، مسئله از حالت ساده یعنی فضای آزاد خارج می شود و قوانین موجود که تا کنون ارائه شده تحت تأثیر و تغییر قرار می گیرد. در این مرحله در پی بررسی موضوع خواهیم بود.

اگر \bar{m} ممان یک اتم جسم مغناطیسی باشد و N تعداد اتم های جسم در واحد حجم بنابراین $\bar{M} = N\bar{m}$ ممان دو قطبی در واحد حجم خواهد بود.

حال می توان میدان مغناطیسی حاصل از جسم مغناطیسی برای ناحیه دور را محاسبه کرد که البته قابل تعمیم برای فواصل نزدیک نیز می باشد.



$$d\bar{A}(\bar{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left\{ \frac{\bar{M}}{|\bar{R} - \bar{R}'|} \right\} dv'$$

$$\bar{A}(\bar{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left\{ \frac{\bar{M}(R')}{|\bar{R} - \bar{R}'|} \right\} dv'$$

می توان ثابت کرد:

$$\bar{A}(\bar{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \bar{M}}{|\bar{R} - \bar{R}'|} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\bar{M} \times \hat{n}}{|\bar{R} - \bar{R}'|} ds'$$

\hat{n} بردار واحد عمود بر سطح S است.

با مقایسه رابطه اخیر با رابطه اصلی برای منبع جریان حجمی $\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\bar{J} dv'}{|\bar{R} - \bar{R}'|}$ و یا

برای منبع جریان سطحی می توان گفت که:

$$\nabla' \times \bar{M} \equiv \bar{J}_m \quad \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

$$\bar{M} \times \hat{n} \equiv \bar{J}_{ms} \quad \left[\frac{A}{m} \right]$$

\bar{J}_m جریان معادل حجمی مغناطیسی و \bar{J}_{ms} جریان معادل سطحی مغناطیسی که می توانند جایگزین یک ماده مغناطیسی شده و مسئله را به مسئله ساده محیط خلاء تبدیل نمود.

شدت میدان مغناطیسی Magnetic Field Intensity

در صورت وجود جسم مغناطیسی و یک منبع جریان حقیقی

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} + \vec{J}_m}{|\vec{R} - \vec{R}'|} dv'$$

$$\vec{B}(\vec{R}) = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{\vec{J} + \vec{J}_m}{|\vec{R} - \vec{R}'|} dv'$$

و یا:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 [\vec{J} + \vec{J}_m]$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 [\vec{J} + \nabla \times \vec{M}]$$

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J} + \nabla \times \vec{M}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \left[\frac{Amp}{m} \right], \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

یعنی کرل بردار \vec{H} که به آن شدت میدان مغناطیسی گفته می شود تنها وابسته جریانهای حقیقی است شکل انتگرالی رابطه اخیر بصورت:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{total} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

از طرفی در محاسبه دیوژانس شدت میدان مغناطیسی

$$\nabla \cdot \vec{H} = \nabla \cdot \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \vec{B} - \nabla \cdot \vec{M} = 0 - \nabla \cdot \vec{M}$$

یعنی دیوژانس \vec{H} تابع وضعیت مغناطیسی جسم (\vec{M}) می باشد اما در عمل در بسیاری از

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

مسائل $\nabla \cdot \vec{M} = 0$ خواهد بود و بنابراین

صفر بودن \vec{H} یا (\vec{M}) نشان دهنده یکنواختی \vec{M} (یا \vec{H}) است و اینکه خطوط میدان از نقطه

ای شروع و یا به نقطه ای ختم نمی شود و عبارتی با رمغناطیسی وجود ندارد.

رابطه بین \vec{H} و \vec{M} در اجسام غیر مغناطیسی (مواد پارامگنتیک و دیامگنتیک) خطی است اما

در مواد فرومگنتیک به جز در مقادیر کوچک غیر خطی است.

$$\vec{M} = X_m \vec{H}$$

X_m ضریب تأثیرپذیری مغناطیسی (Magnetic Susceptibility) می گویند که تعیین کننده میزان

وضعیت مغناطیسی در اثر اعمال مقدار معین \vec{H} است که بطور تجربی بدست می آید.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

می دانیم که:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

و یا:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 X_m \vec{H} = \mu_0 (1 + X_m) \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

که در آن

$$\mu = \mu_0(1 + X_m) = \mu_0\mu_r$$

$$\mu_r = 1 + X_m$$

μ ضریب نفوذپذیری مغناطیسی مطلق absolute permeability

μ_r ضریب نفوذ پذیری مغناطیسی نسبی relative permeability

در اجسام دیامگنیتیک μ_r کوچکتر از یک و نزدیک به یک است (و X_m آن عدد منفی خیلی نزدیک به صفر)

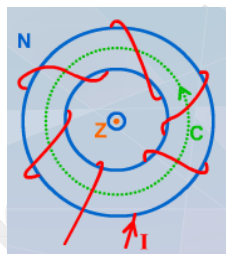
در اجسام پارامگنیک μ_r بزرگتر از یک و نزدیک به یک است (و X_m آن عدد مثبت و خیلی نزدیک به صفر)

اما در اجسام فرومگنیتیک μ_r خیلی بزرگتر از یک (بین ۳۰۰ تا ۳۰۰۰ یا حتی بیشتر) است که بستگی به میزان H دارد.

بعنوان مثال: برای بیسموت بعنوان یک ماده دیامگنیتیک $\mu_r = 0.99983$

$\mu_r = 1.00002$ برای آلومینیم بعنوان یک ماده پارامگنیتیک

مثال: یک سیم پیچ حلقوی که دارای N دور سیم یکنواخت دور هسته آهنی بطول متوسط l متر و مقطع دایره ای شکل به سطح S متر مربع پیچیده شده، جریان I عبور می کند مطلوبست شدت میدان مغناطیسی و چگالی در نقاط داخل هسته، چنانچه ضریب نفوذپذیری مغناطیسی هسته μ باشد.



$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$H\ell = NI \Rightarrow \vec{H} = \frac{NI}{\ell} \hat{a}_\phi$$

چنانچه از طول متوسط استفاده نشود:

$$H 2\pi r = NI$$

$$\vec{H} = \frac{NI}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

$$\phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = BS$$

برای محاسبه کل:

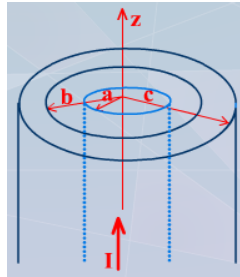
$$\phi = \frac{\mu N I S}{2\pi r}$$

S سطح مقطع هسته است که فلو از آن عبور می کند .

مثال: حول یک سیم که از آن جریان یکنواخت I عبور می کند و دارای مقطع دایره ای بشعاع a است و در جهت +z قرار گرفته استوانه تو خالی از جسم مغناطیسی با $\mu_r = 100$ قرار دارد

به نحوی که محور استوانه مغناطیسی و سیم حامل جریان محور z هاست. شعاع داخلی و خارجی استوانه به ترتیب b و c می باشد ($c > b$). مطلوبست محاسبه $\vec{M}, \vec{B}, \vec{H}$ در داخل

جسم مغناطیسی و چگالی جریانهای مغناطیسی بر حسب I, c, b, a برای منحنی بسته c دایره ای به شعاع r و $b < r < c$



$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} \Rightarrow 2\pi r H = I$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \frac{100\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = (\mu_r - 1)\vec{H} = \frac{99I}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\phi r & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r \frac{99I}{2\pi r} & 0 \end{vmatrix}$$

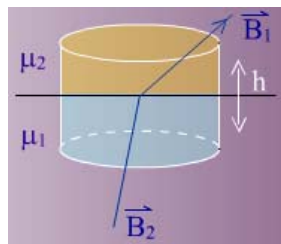
$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n}$$

$$r = b: \quad \vec{J}_{ms} = (\vec{M} \times \hat{n})_{r=b} = \frac{99I}{2\pi b} \hat{a}_\phi \times (-\hat{a}_r) = \frac{99I}{2\pi b} \hat{a}_z$$

$$r = c: \quad \vec{J}_{ms} = (\vec{M} \times \hat{n})_{r=c} = \frac{99I}{2\pi c} \hat{a}_\phi \times (\hat{a}_r) = -\frac{99I}{2\pi c} \hat{a}_z$$

شرایط مرزی برای میدان های مغناطیسی

در شرایط واقعی و عملی عموماً با چند ناحیه (جسم) در تماس با هم و با سطح مشترک مواجه هستیم.



$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \int \nabla \cdot \vec{B} dv = 0$$

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{s}_2 + \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

قاعده پائین قاعده بالا سطح جانبی

$$\vec{B} = \vec{B}_n + \vec{B}_t$$

چون $h \rightarrow 0$ بنابراین:

$$-B_{1n} \Delta S + B_{2n} \Delta S + 0 = 0$$

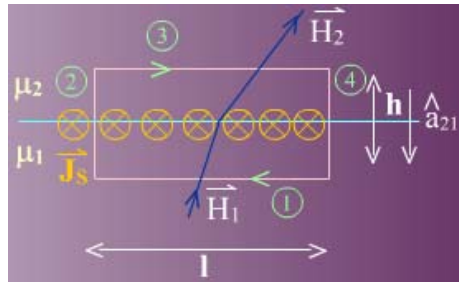
$$B_{1n} = B_{2n}$$

و نیز

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \Rightarrow \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}$$

با توجه به $\vec{M} = \frac{B}{\mu_0} - \vec{H}$ مولفه های عمودی M نیز در هر دو ناحیه با هم برابر نمی باشند.

برای مولفه های مماسی:



چنانچه بین دو محیط جریان حقیقی سطحی \vec{J}_s عمود بر صفحه و در جهت داخل صفحه روی سطح مشترک جاری باشد

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \int_s \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} \Rightarrow$$

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{H} \cdot d\vec{l}_1 + \int_2 \vec{H} \cdot d\vec{l}_2 + \int_3 \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}_3 + \int_4 \vec{H} \cdot d\vec{l}_4$$

دو انتگرال صفر می شود.

$$= -H_{1t} \ell + 0 + H_{2t} \ell + 0 = (H_{2t} - H_{1t}) \ell$$

انتگرال J روی سطح به انتگرال خطی بطول ℓ تبدیل می شود.

$$\int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = J_s \ell$$

$$(H_{2t} - H_{1t}) \ell = J_s \ell \Rightarrow H_{2t} - H_{1t} = J_s$$

بنابراین

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \hat{a}_{21} = \vec{J}_s$$

$$\hat{a}_{21} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$$

و یا

\hat{a}_{21} برداری که عمود بر سطح مشترک از محیط ۲ بطرف محیط ۱ است.

$$H_{1t} = H_{2t}$$

چنانچه جریان سطحی بین دو محیط وجود نداشته باشد:

مدارهای مغناطیسی و مقاومت مغناطیسی

در یک مدار یا سیستم مغناطیسی سیم پیچ حلقوی ملاحظه شد که:

$$\vec{H} = \frac{NI}{\ell} \hat{a}_\phi$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu NI}{\ell} \hat{a}_\phi$$

$$\phi = BS = \frac{\mu NIS}{\ell}$$

می توان فلوی عبور کرده از هسته را به این صورت مرتب نمود:

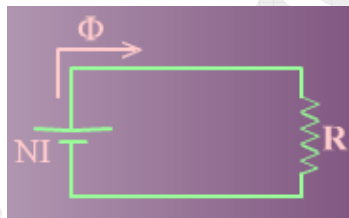
$$\phi = \frac{NI}{\frac{\ell}{\mu_s}}$$

با کمی دقت می توان رابطه فوق را به مشابه قانون اهم $(I = \frac{V}{R})$ در میدان الکتریک در نظر گرفت به نحوی که ϕ همانند I و NI همانند V که emf مدار الکتریکی است، تلقی نمود و یا عبارتی NI بصورت نیروی محرکه مغناطیسی یا magnetomotive force یا mmf برای یک مدار مغناطیسی که فلوی ϕ را به داخل مقاومت مغناطیسی بنام رلکتانس Reluctance جاری می کند.

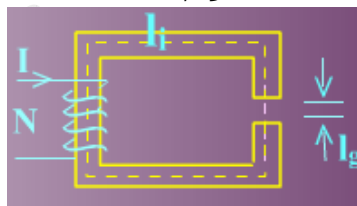
$$R = \text{Reluctance} = \frac{\ell}{\mu_s}$$

(مشابه $R = \frac{\ell}{\sigma S}$ مقاومت الکتریکی)

مدار معادل مغناطیسی بصورت شکل زیر در خصوص سیستم های (مدارهای) مغناطیسی در نظر گرفت که تمام قوانین مدار الکتریکی در آن صادق است از جمله KVL و KCL .
واحد mmf آمپر دور، واحد مقاومت مغناطیسی $1/H$ است.
جهت منبع NI با توجه به جهت \vec{B} در هسته تعیین می شود به نحوی که ϕ از قطب مثبت منبع خارج می شود:



مثال: در مدار روبرو مطلوبست محاسبه B و ϕ



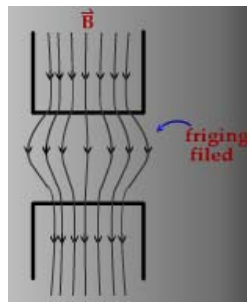
ضریب نفوذپذیری نسبی هسته = μ_r

Effective length (طول موثر هسته) طول متوسط هسته = l_i

(air gap) طول فاصله هوایی = l_g

سطح مقطع هسته = S $l_g \ll l_i$

بدلیل آنکه طول فاصله هوایی خیلی کوچکتر از طول هسته است و یا ضخامت هسته آهنی خیلی بزرگتر از فاصله هوایی است، می توان از فوران میدان مغناطیسی fringing field صرفنظر کرد یعنی خطوط \vec{B} که از هسته خارج می شوند انحرافی پیدا نمی کنند و صرفاً بطور عمود از هسته خارج و پس از طی فاصله هوایی دوباره وارد هسته آهنی می شوند.



$$B_i \simeq B_g = B_n = B$$

$$H_g = \frac{B}{\mu_0}, H_i = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}$$

برای یک مسیر بسته که قسمتی از آن فاصله هوایی عبور می کند.

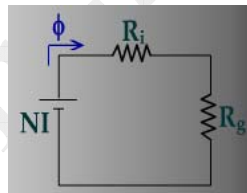
$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$\int_{c_i} \vec{H}_i \cdot d\vec{l} + \int_{c_g} \vec{H}_g \cdot d\vec{l} = NI$$

$$\frac{B}{\mu_0} \ell_g + \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \ell_i = NI \Rightarrow B = \frac{NI}{\frac{\ell_g}{\mu_0} + \frac{\ell_i}{\mu_0 \mu_r}}$$

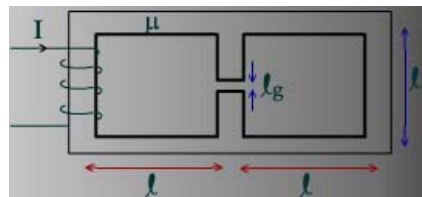
$$\phi = BS \Rightarrow \phi = \frac{NI}{\frac{\ell_g}{\mu_0 S} + \frac{\ell_i}{\mu_0 \mu_r S}} \Rightarrow \phi = \frac{NI}{R_g + R_i}$$

$$R_g = \frac{\ell_g}{\mu_0 S}, \quad R_i = \frac{\ell_i}{\mu_0 \mu_r S}$$

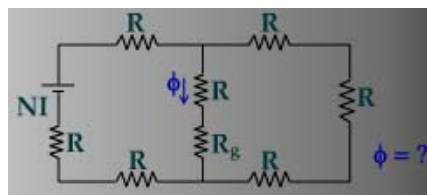


عموماً با توجه به مقادیر کمیتها $R_g \gg R_i$ است.

تمرین: چنانچه شکل روبرو برشی از یک مدار مغناطیسی باشد، مطلوبست چگالی فلوی میدان مغناطیسی در فاصله هوایی برحسب پارامترهای مدار و مدار مغناطیسی.

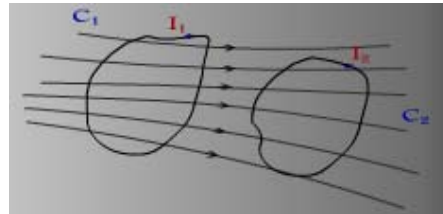


راهنمایی: مدار مغناطیسی بصورت زیر بدست می آید.



خود القاء و القاء متقابل Self Inductance & mutual Inductance

دو مدار C_1 و C_2 که بترتیب جریان I_1 و I_2 از آنها عبور می کند و در مجاور یکدیگر هستند را در نظر بگیرید.



هر یک از دو مدار (حلقه) به ترتیب دارای سطوح S_1 , S_2 می باشند.

اگر \vec{B}_1 چگالی فلوی مغناطیسی ایجاد شده توسط مدار C_1 ناشی از جریان I_1 باشد.

فلوی مغناطیسی بوجود آمده از مدار ۱ که از سطح S_1 عبور می کند (قطع می کند)

$$\phi_{11} = \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_1$$

فلوی مغناطیسی بوجود آمده از مدار ۱ که از سطح S_2 عبور می کند (قطع می کند)

$$\phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_2$$

اگر مدار ۱ و ۲ بترتیب شامل N_1 و N_2 دور باشند.

کل فلوی پیوند شده در مدار C_1 توسط \vec{B}_1 $\psi_{11} = N_1 \phi_{11} = \text{flux linkage}$

کل فلوی پیوند شده در مدار C_2 توسط \vec{B}_1 $\psi_{12} = N_2 \phi_{12} = \text{flux linkage}$

طبق تعریف:

$$L_{11} \triangleq \frac{\psi_{11}}{I_1} \quad (\text{عامل جریان فلوی تولیدی}) / (\text{کل فلوی عبور از خود سلف}) = \text{خود القاء (Self Inductance)}$$

$$L_{12} \triangleq \frac{\psi_{12}}{I_1} \quad (\text{عامل جریان فلوی تولیدی}) / (\text{کل فلوی عبور از سلف مجاور}) = \text{القاء متقابل (Mutual Inductance)}$$

و بهمین ترتیب برای مدار ۲

$$\phi_{22} = \int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{s}_2 \quad , \quad \phi_{21} = \int_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{s}_1$$

$$\psi_{22} = N_2 \phi_{22} \quad , \quad \psi_{21} = N_1 \phi_{21}$$

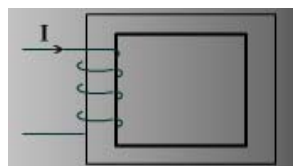
$$L_{22} = \frac{\psi_{22}}{I_2} \quad , \quad L_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_2}$$

این تعاریف برای محیط های خطی و میدانهای ساکن و یا میدانهای با تغییرات زمانی آهسته (نیمه ساکن) صادق است.

اما تعریف کامل:

$$L_{11} = \frac{d\psi_{11}}{dI_1} \quad , \quad L_{12} = \frac{d\psi_{12}}{dI_1}$$

مثلاً برای یک سیم پیچ شامل N دور سیم و با هسته مسدود:



=L طول موثر هسته

=A سطح مقطع هسته

=B چگالی فلوئید میدان مغناطیسی در هسته ناشی از عبور جریان I

$$\phi = AB$$

$$d\phi = AdB$$

$$\psi = N\phi \Rightarrow d\psi = Nd\phi = NAdB$$

$$NI = \ell H$$

$$NdI = \ell dH \Rightarrow dI = \frac{\ell}{N} dH$$

$$L = \frac{d\psi}{dI} = \frac{NAdB}{\frac{\ell}{N} dH} \Rightarrow L = \frac{N^2 A}{\ell} \frac{dB}{dH}$$

چنانچه هسته دارای پرمیولیت خطی باشد (μ ثابت باشد) و یا بعبارتی محیط خطی باشد

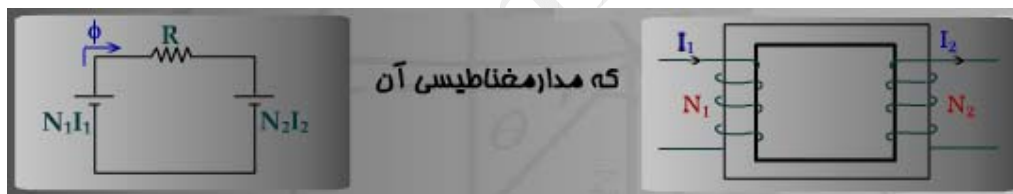
$$\frac{dB}{dH} = \mu$$

$$\Rightarrow L = \frac{N^2 A \mu}{\ell}$$

$$L = \frac{N^2}{\frac{\ell}{\mu A}} \Rightarrow L = \frac{N^2}{R}$$

از طرفی رلکتانس هسته $R = \frac{\ell}{\mu A}$ بنابراین:

چنانچه بر روی هسته مثال قبل سیم پیچ دومی پیچیده شود:



در مدار مغناطیسی داریم: $\phi R = N_1 I_1 - N_2 I_2$
 اگر هسته ایده آل (ترانسفورماتور ایده آل) باشد:

$$\mu \rightarrow \infty$$

$$R = \frac{\ell}{\mu A} = 0$$

در نتیجه

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{و یا} \quad N_1 I_1 = N_2 I_2$$

یا بعبارتی

اگر $I_2 = 0$ باشد:

$$B_1 = \mu H = \frac{\mu N_1 I_1}{\ell} \Rightarrow \phi_{11} = B_1 S = \frac{\mu N_1^2 I_1 A}{\ell}$$

$$\psi_{11} = N_1 \phi_{11} \Rightarrow L_{11} = \frac{\psi_{11}}{I_1} = \frac{\mu N_1^2 A}{\ell} \Rightarrow L_{11} = \frac{N_1^2}{R}$$

که همان نتیجه قبل است. همچنین

$$\phi_{12} = B_1 A, \quad \psi_{12} = N_2 \phi_{12}$$

$$L_{12} = \frac{\psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu N_1 N_2 A}{\ell} \Rightarrow L_{12} = \frac{N_1 N_2}{\ell}$$

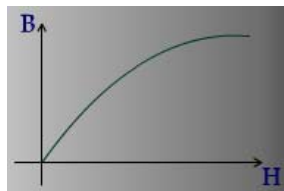
و چنانچه $I_1 = 0$ باشد:

$$L_{22} = \frac{N_2^2}{R}, \quad L_{21} = \frac{N_1 N_2}{R} = L_{12}$$

ملاحظه می شود که خود القاء و القاء متقابل صرفاً وابسته به مشخصات فیزیکی قطعات هستند و مستقل از پارمترهای الکتریکی و میدانی مغناطیسی که مشابه ظرفیت یک خازن است.

انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی

همانگونه که مشخص شد با اعمال جریان به یک مدار (سیم پیچ) ایجاد میدانی مغناطیسی به چگالی فلوی مغناطیسی \vec{B} می نماید در واقع اعمال I ایجاد \vec{H} و آن به نوبه خود \vec{B} را بوجود می آورد ارتباط B به H از طریق منحنی مربوطه مشخص می شود.



این منحنی در مقادیر بزرگ جریان به حالت اشباع می رود.

شیب منحنی $\frac{dB}{dH}$ ضریب نفوذ پذیری را نتیجه خواهد داد که در مقادیر کم B و H رابطه خطی دارند و شیب ثابت است.

در اثر تغییر جریان نسبت به زمان ، ولتاژی القاء می شود که از رابطه قانون فارادی بدست می آید:

$$e = -\frac{d\psi}{dt}$$

می دانیم که: $H = \frac{Ni}{\ell}$ و یا $i = \frac{H\ell}{N}$ ، $\phi = BA$ ، $\psi = N\phi$

بنابراین ولتاژ منبع مورد نیاز $V = \frac{d\psi}{dt} = NA \frac{dB}{dt}$

از طرفی توان گرفته شده از منبع $P = Vi$ است بنابراین:

$$P = NA \frac{dB}{dt} \times \frac{H\ell}{N}$$

$$P = A\ell H \frac{dB}{dt}$$

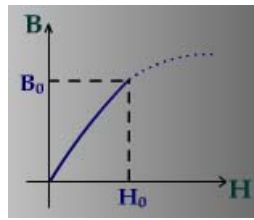
$$dw_m = pdt = A\ell H dB$$

$$w_m = \int dw_m = \int A\ell H dB = A\ell \int H dB$$

$$w_m = \int H dB \quad \left[\frac{\text{Joul}}{\text{m}^3} \right]$$

انرژی ذخیره شده مغناطیسی $A\ell$ حجم هسته مغناطیسی است بنابراین چگالی انرژی مغناطیسی یعنی w_m سطح محصور بین منحنی و خط B_0 و محور B هاست.

چنانچه محیط خطی باشد و $B = \mu H$



$$w_m = \int_0^{B_0} H dB = \int_0^{B_0} \frac{B}{\mu} dB$$

$$w_m = \frac{1}{2\mu} B_0^2$$

$$w_m = \int_0^{H_0} \mu H dH = \frac{1}{2} \mu H_0^2 = \frac{1}{2} B_0 H_0$$

برای مقدار B و H در ناحیه خطی $w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$

$$W_m = \int_V w_m dv = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dv'$$

و کل انرژی

رابطه دیگر:

$$\psi = LI$$

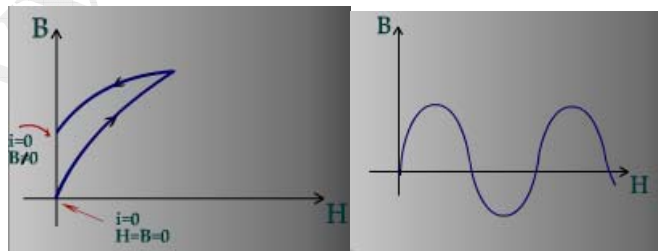
$$W_m = \int p dt = \int VI dt = \int \frac{d\psi}{dt} I dt = \int \frac{d(LI)}{dt} I dt$$

$$W_m = \int LI dI \Rightarrow W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

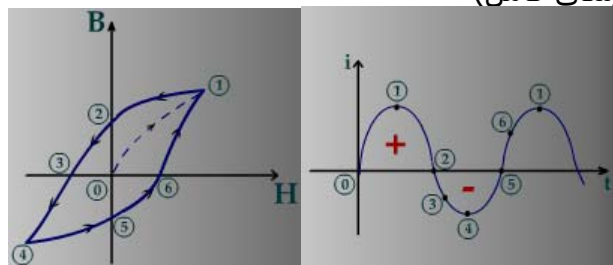
که شکل پارامتری مداری W_m است.

منحنی پسماند مغناطیسی Hysteresis

چنانچه جریان اعمالی به یک سیم پیچ را از مقدار صفر افزایش دهیم و به مقدار مشخصی برسانیم و سپس جریان را کاهش دهیم، مسیر تغییر B نسبت به H در دو مرحله فوق یکی نمی باشد علت این موضوع پسماند مغناطیسی است که در سیستم (هسته مغناطیسی) بوجود می آید.



چنانچه این روند را ادامه دهیم بدین معنا که i در جهت منفی افزایش یابد (مشابه نیم سیکل منفی یک جریان سینوسی کامل)



و زمانهای مختلف را مطابق منحنی جریان i دنبال کنیم به حلقه ای می رسمیم که در سیکلهای بعدی تکرار می شود.

می توان ثابت کرد که مساحت این حلقه برابر است با میزان انرژی تلف شده در واحد حجم هسته در واحد زمان. این تلفات، تلفات هستریس گویند. و این حلقه را حلقه هستریس Hysteresis loop گویند.

نیروی میدان مغناطیسی

در این قسمت دنبال محاسبه نیروی خواهیم بود که در اثر یک تغییر مکان مجازی قابل محاسبه خواهد بود. محاسبه این نیرو از طریق تغییرات انرژی تعیین می گردد.

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{L}$$

چنانچه سیستم بسته باشد بایستی

$$\Delta W + \Delta W_m = 0$$

بنابراین

$$\Delta W = -\Delta W_m = \vec{F} \cdot \Delta \vec{\ell} = F \Delta \ell$$

($\Delta \ell$ تغییر مکان مجازی است)

و یا عبارتی در تغییرات جزئی طول

$$F = -\frac{\Delta W_m}{\Delta \ell} = -\frac{dW_m}{d\ell}$$

بنابراین

$$\vec{F} \Big|_{\phi=\text{ثابت}} = -\nabla W_m$$

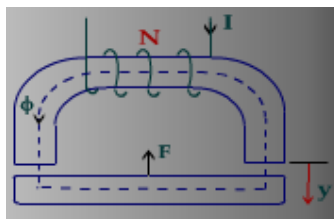
چنانچه مدار (سیستم) به منبع متصل باشد و یا عبارتی سیستم باز باشد، هر گونه تغییر در انرژی می تواند از طریق منبع جریان متصل به مدار تأمین شود بنحویکه I ثابت بماند.

$$\Delta W = \Delta W_m$$

یعنی

$$\vec{F} \Big|_{I=\text{ثابت}} = +\nabla W_m$$

مثال: در مدار سیستم الکترومکانیکی نشان داده شده شکل که می تواند یک سیستم صنعتی جرثقیل یا کنتاکتور (رله) باشد دارای دو قسمت هسته آهنی و دو فاصله هوایی است چنانچه سیم پیچ آن دارای N دور باشد و جریان I ایجاد فلوی ϕ در مدار مغناطیسی کند مطلوبست محاسبه نیروی بالابر بر روی قسمت متحرک هسته آهنی (قسمت U شکل هسته ثابت است) S سطح مقطع هسته می باشد.



چنانچه قسمت متحرک هسته دارای جابجائی مجازی بمیزان dy باشد و فلوی ثابت بماند، در اثر تغییر در فاصله هوائی تغییر انرژی ایجاد شده، از طریق تغییر انرژی ذخیره شده مغناطیسی سیستم تأمین می گردد ($\Delta W = -\Delta W_m$)

تغییر انرژی مغناطیسی در دو فاصله هوائی عبارتند از:

$$dW = -dW_m = -2 \times \left(\frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0} \right) S dy$$

بنابراین

$$\vec{F} = -\nabla W_m = -\hat{a}_y \frac{B_0^2 S}{\mu_0} = -\hat{a}_y \frac{\phi_0^2}{\mu_0 S}$$

اگر در این مثال سیستم به یک منبع جریان ثابت I متصل می گردید، نیروی وارد بر قسمت متحرک هسته را بصورت زیر می توان بدست آورد.

در اثر جابجایی مجازی dy سبب تغییر فلوی بمیزان $d\phi$ و تغییر مقاومت مغناطیسی به اندازه dR می شود.

اما از طرفی

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow dW_m = \frac{1}{2} I^2 dL$$

$$\phi = \frac{NI}{R}$$

$$R = R_i + R_g$$

$$R_g = 2 \times \frac{y}{\mu_0 S}$$

$$\phi = \frac{NI}{R_i + 2y/\mu_0 S}$$

بنابراین

تغییرات R را می توان در L ملاحظه نمود:

$$L = \frac{N\phi}{I} = \frac{N^2}{R_i + 2y/\mu_0 S}$$

$$dL = N^2 \frac{-2 dy/\mu_0 S}{\left(R_i + 2y/\mu_0 S \right)^2} = -\frac{2N^2 dy}{\mu_0 S \left(R_i + 2y/\mu_0 S \right)^2}$$

$$dW_m = \frac{1}{2} \frac{-2N^2 I^2 dy}{\mu_0 S \left(R_i + 2y/\mu_0 S \right)^2} = -\frac{1}{\mu_0 S} \left(\frac{NI}{R_i + 2y/\mu_0 S} \right)^2 dy$$

$$dW_m = -\frac{1}{\mu_0 S} \phi_0^2 dy$$

$$\vec{F} = \nabla W_m = -\hat{a}_y \frac{\phi_0^2}{\mu_0 S}$$

که همان نتیجه قبل است.