فصل دوم

ميدان‌هاي الكتريكي ساكن Static Electric Fields

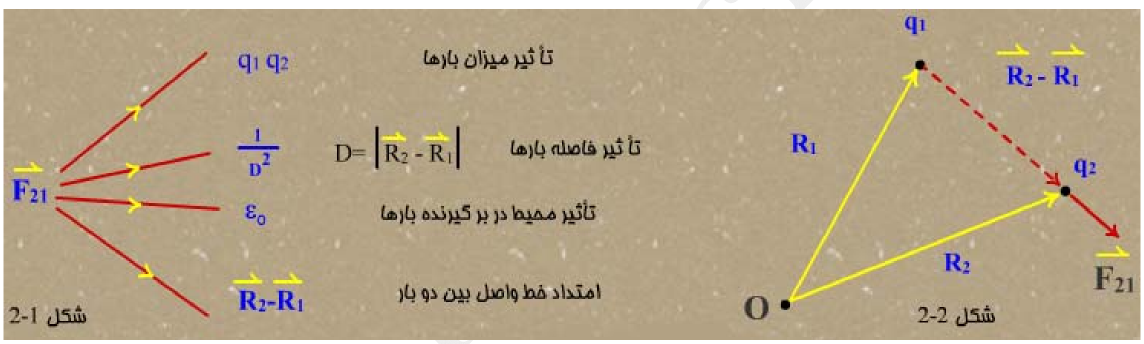
مبناي قوانين حاكم بر ميدان‌هاي الكتريكي ساكن نيروي جاذبه يا دافعه بين بارهاي الكتريكي مي‌باشد كه همان قانون كولمب است.

افرادي كه در اين زمينه مطالعات و بررسي‌هاي علمي انجام داده‌اند: تالس، گيلبرت و نهايتاً افسر فرانسوي بنام كولمب مي‌باشد كه توانست اندازه‌گيري‌هاي دقيقي روي اين نيرو انجام دهد.

قانون كولمب در فضاي آزاد (خلاء) Free space

در آزمايش‌هاي بعمل آمده توسط كولمب به نتايج زير در خصوص نيروي وارد بر يك بار الكتريكي ناشي از بار الكتريكي ديگر دست يافت:

با توجه به وجود دو بار الكتريكي q_1 و q_2 كه به ترتيب در موقعيت $\vec{R}_1$ و $\vec{R}_2$ قرار گرفته‌اند



بنابراين:

$$\vec{F}_{21} \propto \frac{q_1 q_2}{\varepsilon_0 |\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^2} \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|}$$

بردار واحد $\vec{R}_2 - \vec{R}_1$ برابر است با: $\frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|}$

ضريب نفوذپذيري الكتريكي خلاء Electric permitivity coeficient of Free-space

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} = 8.85 \times 10^{-12} \left[F/m \right] \text{ يا } \left[\frac{Nm^2}{C^2} \right]$$

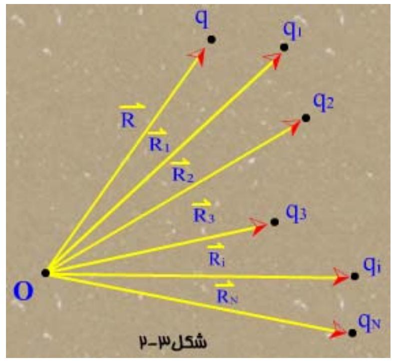
ضريب تناسب معادله محاسبه براي دستگاه اندازه‌گيري MKS يا SIبرابر $\frac{1}{4\pi}$ مي‌باشد.

بنابراين

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^3} (\vec{R}_2 - \vec{R}_1)$$

بدليل داشتن رابطه خطي نيروي فوق با ميزان بارها، چنانچه چندين بار در فضاي خلاء وجود داشته باشد مي‌توان چنين نوشت:

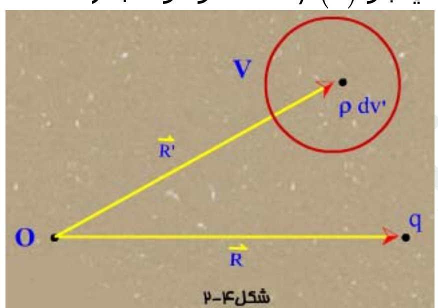
براي N بار گسسته:



شکل ۳-۲

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{qq_i\left(\vec{R}-\vec{R}_i\right)}{\left|\vec{R}-\vec{R}_i\right|^3}$$

و براي يك بار پيوسته به چگالي بار $\rho\left(\vec{R}\right)$ مستقر در حجم V



شکل ۴-۲

$$d\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\rho\left(\vec{R}'\right)dv'\left(\vec{R}-\vec{R}'\right)}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}$$

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{q\rho\left(\vec{R}'\right)dv'}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}\left(\vec{R}-\vec{R}'\right)$$

مثال: سه بار نقطه اي q_1، q_2 و q كه بترتيب در نقاط p_1 و p_2 و p در فضاي خالي قرار گرفته‌اند را در نظر بگيريد نيرو وارد بر بار q چقدر است؟

$$\begin{cases} q_1 = 3.2\times10^{-9}\,c \\ p_1(2,1,0) \end{cases} \qquad \begin{cases} q_2 = -4.8\times10^{-9}\,c \\ p_2(3,2,0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = -1.6\times10^{-9}\,c \\ p(1,2,0) \end{cases}$$

$$\vec{R} = \overrightarrow{OP} = \hat{a}_x(1-0)+\hat{a}_y(2-0)+\hat{a}_z(0-0) = \hat{a}_x + 2\hat{a}_y$$

$$\vec{R}_1 = \overrightarrow{OP_1} = 2\hat{a}_x + \hat{a}_y$$

$$\vec{R}_2 = \overrightarrow{OP_2} = 3\hat{a}_x + 2\hat{a}_y$$

$$\vec{R}-\vec{R} = \hat{a}_x(1-2)+\hat{a}_y(2-1) = -\hat{a}_x + \hat{a}_y$$

$$\left|\vec{R}-\vec{R}_1\right| = \sqrt{(-1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{R}-\vec{R}_2 = -2\hat{a}_x$$

$$\left|\vec{R}-\vec{R}_2\right| = 2$$

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{2}\frac{qq_i}{\left|\vec{R}-\vec{R}_i\right|^3}\left(\vec{R}-\vec{R}_i\right)$$

$$\vec{F}_q = \frac{-1.6\times10^{-9}}{4\pi\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}}\left[\frac{3.2\times10^{-9}}{\left(\sqrt{2}\right)^3}\left(-\hat{a}_x+\hat{a}_y\right)+\frac{-4.8\times10^{-9}}{2^3}\left(-2\hat{a}_x\right)\right]$$

$$\vec{F}_q = \left(-\hat{a}_x-\hat{a}_y 16.3\right)\times10^{-9} \qquad N$$

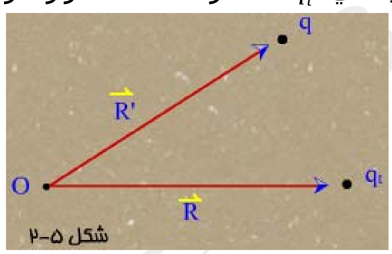
ميدان الكتريكي و شدت ميدان الكتريكي در فضاي خالي

وجود يك بار الكتريكي در فضا، به تمام نقاط آن فضا خاصيتي الكتريكي مي‌دهد (ميدان الكتريكي) به نحويكه بارهاي ديگر از وجود اين بار آگاه مي‌شوند.

بجاي محاسبه نيرو در معرفي يك ميدان، از شدت ميدان الكتريكي استفاده مي‌شود كه بصورت زير بيان و تعريف مي‌گردد:

$$\vec{E}(\vec{R}) = \lim_{q_t\to 0}\frac{\vec{F}(\vec{R})}{q_t} \qquad \left[{}^{N}\!/_{C}\right] \text{يا} \left[{}^{V}\!/_{m}\right]$$

$\vec{F}$ نيروي وارد بر بار كوچك آزمايشي q_t كه در نقطه $\vec{R}$ قرار دارد.



شکل ۵-۲

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\left(\vec{R}-\vec{R}'\right)}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}$$

بعبارتي $\vec{E}$ شدت ميدان الكتريكي در هر نقطه برابر است با نيروي وارد بر بار ۱+ كولمبي

بنابراين براي مجموعه بارهاي گسسته

$$\vec{E}(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i\left(\vec{R}-\vec{R}_i\right)}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}$$

براي بار پيوسته حجمي

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v\frac{\rho\left(\vec{R}'\right)dv'\left(\vec{R}-\vec{R}'\right)}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}$$

چگالي بار حجمي پيوسته $=\rho$ با واحد ${}^{c}\!/_{m^3}$

بار پيوسته سطحي

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_s\frac{\rho_s\left(\vec{R}'\right)ds}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}\left(\vec{R}-\vec{R}'\right)$$

چگالي بار پيوسته سطحي $=\rho_s$ با واحد ${}^{c}\!/_{m^2}$

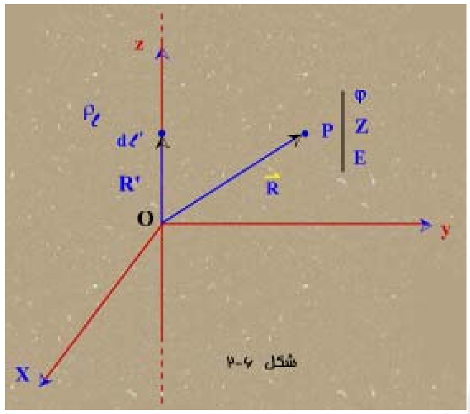
$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_c\frac{\rho_l\left(\hat{R}'\right)dl'}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}\left(\vec{R}-\vec{R}'\right)$$

چگالي بار پيوسته خطي $=\rho_\ell$ با واحد ${}^{c}\!/_{m}$

مثال: محاسبه شدت ميدان الكتريكي ناشي از يك بار خطي به طول نامحدود، مستقيم با چگالي بار يكنواخت ρ_l در فضاي خلاء

مي‌توان پيش بيني كرد كه $\vec{E}$ مؤلفه z و φ نخواهد داشت.

$$\vec{E}(\vec{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_c \frac{\rho_l(\vec{R}')dl'}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}(\vec{R}-\vec{R}')$$



$$\vec{R}=x\hat{a}_x+y\hat{a}_y+z\hat{a}_z=r\hat{a}_r+z\hat{a}_z$$

$$\vec{R}'=z'\hat{a}_z$$

$$\vec{R}-\vec{R}'=r\hat{a}_z+(z-z')\hat{a}_z$$

$$\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|=\sqrt{r^2+(z-z')^2} \qquad dl'=dz'$$

$$\vec{E}(\vec{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho_l dz'}{\left[r^2+(z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left[r\hat{a}_r+(z-z')\hat{a}_z\right]$$

$$=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\hat{a}_r\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{rdz'}{\left[r^2+(z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\hat{a}_z\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(z-z')dz'}{\left[r^2+(z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\hat{a}_r\left[\frac{z'-z}{r\sqrt{r^2+(z-z')^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\hat{a}_z\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}\right\}$$

$$=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\hat{a}_r\frac{2}{r}+0=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{a}_r$$

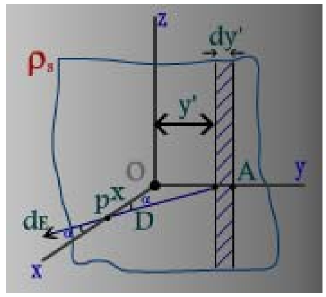
بنابراين $\bar{E}$ از نظر اندازه مستقل از z,φ است و تنها در جهت $\hat{a}_r$ مؤلفه دارد و صرفاً وابسته به فاصله (عمومي) از منبع (بار خطي) است (r)

بايد توجه كرد كه چون $\hat{a}_r$ وابسته به φ مي‌باشد، جهت $\bar{E}$ وابسته به φ خواهد بود.

مثال: تعيين شدت ميدان الكتريكي ناشي از يك بار صفحه‌اي مسطح، بي‌نهايت و با چگالي يكسان ρ_s.

براي حل صفحه را محدود را در موقعيت x=۰ (صفحه yz) قرار مي‌دهيم.

چون در دو جهت z , y نامحدود مي‌باشد پس $\bar{E}$ تنها در جهت x مؤلفه دارد.



ساده‌ترين نقطه براي محاسبه $\vec{E}$ نقطه $P\left|\begin{matrix}x\\0\\0\end{matrix}\right.$ يعني نقطه‌اي روي محور xهاست.

روش اول: استفاده از فرمول کلي $\vec{E}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_s\left(\vec{R}-\vec{R}'\right)dz'dy'}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}$ و با انتخاب ديفرانسيلي از سطح با مقدار بار $\rho_s dz'dy'$ و ادامه کار

روش دوم: بکارگيري از نتايج مثال قبل (بار خطي نامحدود)

$$dE\Big|_p=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 D}=\frac{\rho_s dy'}{2\lambda\varepsilon_0 D}\qquad,\qquad d\vec{E}=d\vec{E}_x+d\vec{E}_y$$

بدليل داشتن منبع بار خطي نا محدود $dE_y=0$ خواهد شد

$$dE_x=\frac{\rho_s dy'}{2\pi\varepsilon_0 D}\cos\alpha\equiv dE$$

با جايگزيني $\cos\alpha$ و D بر حسب پارمترهاي اصلي (با توجه به مثلث OPA)

$$D=\sqrt{x^2+y'^2}$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y'^2}}$$

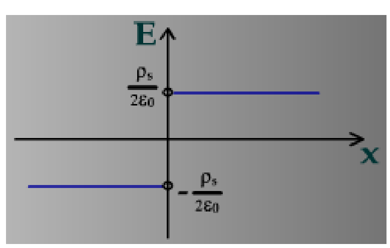
$$dE=\frac{xP_s dy'}{2\pi\varepsilon_0\left(x^2+y'^2\right)}$$

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\rho_s dy'}{2\pi\varepsilon_0\left(x^2+y'^2\right)}=\frac{\rho_s}{2\pi\varepsilon_0}\tan^{-1}\frac{y'}{x}\Bigg]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x\qquad x>0$$

$$\vec{E}=-\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x\qquad x<0$$

که هيچگونه وابستگي به موقعيت نقطه‌اي که شدت ميدان بدست خواهد آمد ندارد.
دليل: نامحدود بودن ابعاد بار صفحه‌اي



فلوي ميدان الكتريكي و قانون گاوس

با توجه به مفهوم انتگرال سطحي روي سطح بسته روشن است كه انتگرال زير فلوي ميدان الكتريكي خارج شده از سطح را محاسبه مي‌كند

$$\oint_s \vec{E}.d\vec{s}$$

چنانچه اين سطح كل منابع (بار الكتريكي) كه ميدان $\vec{E}$ را بوجود آورده را شامل شود اين انتگرال متناسب بار كل بار الكتريكي محصور شده در حجمي كه سطح s آنرا احاطه كرده خواهد بود.

بعبارتي:

$$\oint_s \vec{E}.d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{total}$$

$$Q_{total} = \int_V \rho dv'$$

و يا

$$\oint_s \vec{E}.d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_v \rho dv'$$

رابطه فوق قانون گاوس و سطح s، سطح گاوسي گفته مي‌شود. اين قانون مستقل از شكل سطح s است.

بعوان مثال براي يك بار نقطه‌اي واقع در مركز مختصات

براي يك سطح گاوسي كروي:

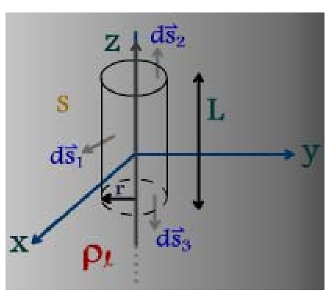
$$\oint_s \vec{E}.d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \hat{a}_R . \hat{a}_R R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0}$$

اصل مهم: براي حل مسائل با استفاده از قانون گاوس بايستي سطحي انتخاب نمود كه E روي آن سطح ثابت باشد.

مثال: بار خطي بطول نا محدود و به چگالي $\rho_l \; {}^{c}\!/_{m}$ روي محور zها قرار دارد مطلوبست شدت ميدان الكتريكي در هر نقطه.

انتخاب سطح گاوسي: استوانه‌اي به طول L و با شعاع قاعده برابر با r و با محور منطبق با محور zها



$$\oint_s \vec{E}.d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_v \rho dv'$$

$$\oint_s \vec{E}.d\vec{s} = \underset{\text{سطح جانبي}}{\int \vec{E}.d\vec{s}_1} + \underset{\text{قاعده بالا}}{\int \vec{E}.d\vec{s}_2} + \underset{\text{قاعده پائين}}{\int \vec{E}.d\vec{s}_3}$$

$$\underset{\text{سطح جانبي}}{\int \vec{E}.d\vec{s}} = E\int d\vec{s}_1 = E 2\pi r L$$

چون مقدار Eدر فاصله r (روي سطح جانبي) از منبع مقداري ثابت و در جهت $\hat{a}_r$ است (عمود بر منبع) و $d\bar{s} = d\bar{s}_r$

$$\int_{\text{قاعده بالا}} \vec{E}.d\bar{s}_2 = \int E\hat{a}_r.d\bar{s}_z = 0$$

$$\int_{\text{قاعده پائين}} \vec{E}.d\bar{s}_3 = \int E\hat{a}_r.(-d\bar{s}_z) = 0$$

بنابراين

$$\oint_s \vec{E}.d\bar{s} = E2\pi rL$$

اما:

$$\int_v \rho dv' \equiv \int_c \rho_l dl' = \int_{-L/2}^{L/2} \rho_l dz' = \rho_L L$$

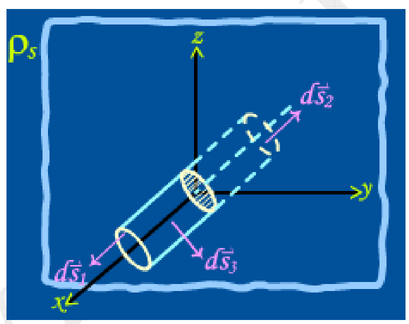
در نتيجه:

$$E2\pi rL = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_l L) \Rightarrow E = \frac{\rho_l}{2\pi r\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{a}_r$$

كه دقيقاً مشابه جواب مثال قبلي است كه از روش كلي حل شد.

مثال: مطلوبست تعيين شدت ميدان الكتريكي در نقاط مختلف در مقابل يك بار سطحي نامحدود به چگالي بار $\rho_s \; C/m^2$



انتخاب سطح گاوسي: هر شكل فضائي كه توسط صفحه باردار به دو قسمت تقسيم گرديده و بر صفحه باردار عمود باشد از جمله يك استوانه يا يك مكعب مستطيل استوانه‌اي بطول L، محور استوانه محور xها و سطح قاعده آن A فرض شود.

$$\oint_s \vec{E}.d\bar{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho dv$$

$$\oint \vec{E}.d\bar{s} = \int_{\text{قاعده روبرو}} \vec{E}.d\bar{s}_1 + \int_{\text{قاعده پشت}} \vec{E}.d\bar{s}_2 + \int_{\text{جانبي}} \vec{E}.d\bar{s}_3$$

$$\int_{\text{روبرو}} \vec{E}.d\bar{s} = \int_{x=\frac{L}{2}} \vec{E}_x.d\bar{s}_x = E\int ds_x = E\big|_{x=\frac{L}{2}} \times A$$

$$\int_{\text{پشت}} \vec{E}.d\bar{s}_2 = \int -\vec{E}_x.(-d\bar{s}_x) = E\int ds_x = E\big|_{x=\frac{L}{2}} \times A$$

$$\int_{\text{جانبي}} \vec{E}.d\bar{s}_3 = 0$$

بنابراين

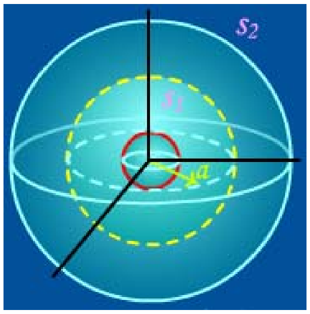
$$\oint \vec{E}.d\bar{s} = EA + EA = 2EA$$

اما: $Q_{total} = \int \rho_s ds' = \rho_s A$

پس: $2EA = \frac{\rho_s A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \quad , \quad \vec{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x$

مثال: در فضاي آزاد بار پيوسته‌اي تا شعاع a به چگالي $\rho = \frac{\rho_0 R^2}{a^2}\, c/m^3$ موجود است شدت ميدان الكتريكي در هر نقطه را حساب كنيد.

$$\oint_s \vec{E}.d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho dv'$$



سطح گاوسي: كره به مركز مبدأ و به شعاع R

$$I: \quad R < a$$
$$II: \quad R > a$$

براي R<a:

$$\oint_{s_1} \vec{E}_1.d\vec{s}_1 = E_1\int_{s_1} ds_R = E_1 4\pi R^2$$

$$Q = \int \rho dv' = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{\rho_0 R'^2}{a^2} R'^2 \sin\theta' dR' d\theta' d\varphi'$$

$$Q = \frac{\rho_0 R^5}{5a^2}4\pi$$

بنابراين:

$$E 4\pi R^2 = \frac{\rho_0 R^5}{5\varepsilon_0 a^2}4\pi$$

$$\overline{E} = \frac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0 a^2}\hat{a}_R$$

براي R>a:

$$\oint_{s_2} \overline{E}_2.d\vec{s}_2 = E_2\int_{s_2} ds_R = E_2 4\pi R^2$$

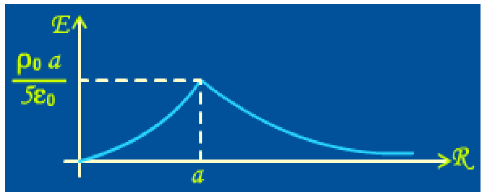
$$Q = \int \rho dv' = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \frac{\rho_0 R'^2}{a^2} R'^2 \sin\theta' dR' d\theta' d\varphi'$$

$$= \frac{4\pi\rho_0 a^3}{5}$$

بنابراين :

$$E 4\pi R^2 = \frac{4\pi\rho_0 a^3}{5\varepsilon_0}$$

$$\overline{E} = \frac{\rho_0 a^3}{5\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$



شكل ديفرانسيلي قانون گاوس (معادله اول ماكسول)

$$\oint_s \vec{E}.d\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho dv'$$

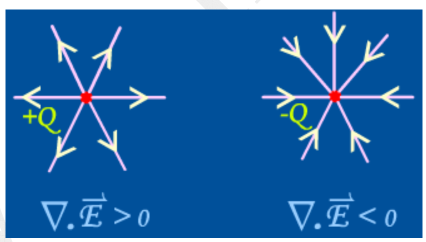
طبق قضيه گاوس

$$\int_v \nabla.\vec{E}dv'=\frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho dv'$$

$$\int \nabla.\vec{E}dv'=\int \frac{\rho}{\varepsilon_0}dv' \Rightarrow \int_v \nabla.\vec{E}dv'-\int_v \frac{\rho}{\varepsilon_0}dv'=0$$

$$\int_v \left(\nabla.\vec{E}-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)dv'=0 \Rightarrow \nabla.\vec{E}-\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0 \Rightarrow \nabla.\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

نتيجه: چون ديورژانس با فلوي خروجي از واحد حجم متناسب است بنابراين اگر $\nabla.\vec{E}$ مثبت شود يعني ρ مثبت و يا به عبارتي خطوط ميدان الكتريكي از روي بار مثبت شروع مي‌شوند و بر عكس اين خطوط روي بار منفي ختم مي‌گردند.



مثال: بار پيوسته‌اي كه در فضاي آزاد ميدان الكتريكي با شدت $\vec{E}$ ايجاد مي‌كند را بدست آوريد:

$$\vec{E}=\begin{cases}-\hat{a}_R\dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}R & 0\le R\le b\\ -\hat{a}_R\dfrac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 R^2} & R>b\end{cases}$$

$$\nabla.\vec{E}=\rho\big/\varepsilon_0 \Rightarrow \rho=\varepsilon_0\nabla.\vec{E}$$

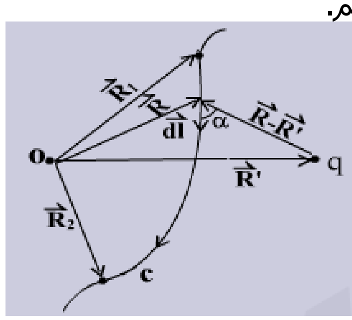
$$0\le R\le b \quad\Rightarrow\quad \rho=\varepsilon_0\nabla.\left[-\hat{a}_R\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}R\right]=\varepsilon_0\times\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left[R^2\left(-\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}R\right)\right]=-\rho_0$$

$$R>b \quad\Rightarrow\quad \rho=\varepsilon_0\nabla.\left[-\hat{a}_R\frac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 R^2}\right]=\varepsilon_0\times\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left[R^2\left(\frac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 R^3}\right)\right]=0$$

تابع پتانسيل الكتريكي Electric potential

مي‌دانيم كه شدت ميدان الكتريكي با نيروي وارد بر يك بار الكتريكي كه در آن ميدان قرار مي‌گيرد رابطه دارد پتانسيل الكتريكي با ميزان انرژي لازم براي آنكه يك بار الكتريكي از نقطه‌اي به نقطه ديگر حركت كند رابطه دارد.

بنابراين اگر بار نقطه‌اي q را كه در نقطه R' واقع است و توليد يك ميدان در همه فضاي خالي مي‌كند در نظر بگيريم، مقدار انرژي لازم براي حركت دادن يك بار q_t از نقطه $\vec{R}_1$ به نقطه $\vec{R}_2$ روي مسير c را مي‌خواهيم محاسبه كنيم.



$$\vec{F}_{q_t} = \frac{qq_t}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{R}-\vec{R}')}{|\vec{R}-\vec{R}'|^3}$$

q_t نيروي لازم براي حركت $\vec{F} = -\vec{F}_{q_t}$

$$W = \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \vec{F}.\vec{dl} = \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \frac{-qq_t}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{R}-\vec{R}')}{|R-R'|^3}.d\vec{l}$$

$$(\vec{R}-\vec{R}')d\vec{l} = |\vec{R}-\vec{R}'| dl \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{d|\vec{R}-\vec{R}'|}{dl}$$

بنابراين:

$$W = -\frac{qq_t}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2}\frac{|\vec{R}-\vec{R}'|d(|\vec{R}-\vec{R}'|)}{|\vec{R}-\vec{R}'|^3} = \frac{-qq_t}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2}\frac{d(|\vec{R}-\vec{R}'|)}{|R-R'|^2}$$

$$W = q_t\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{R}_2-\vec{R}'|} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{R}_1-\vec{R}'|}\right]$$

پس W بستگي به مسير c ندارد و تنها تابع نقاط ابتدائي و انتهائي است.

$$W = q_t\left[v(\vec{R}_2) - v(\vec{R}_1)\right] = q_t \Delta V$$

بنابراين انرژي لازم براي تغيير مكان q_t از نقطه اي به نقطه ديگر با حاصلضرب اختلاف پتانسيل دو نقطه فوق در بار q_t مساويست.

$$V(\vec{R}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ|\vec{R}-\vec{R}'|}$$

پتانسیل نقطه $\vec{R}$ به دلیل وجود بار الکتریکي q در نقطه $\vec{R}'$ واحد J/C یا Volt

براي N بار الکتریکي نقطه اي
$$V(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ |\vec{R}-\vec{R}'|}$$

براي يك بار پيوسته
$$V(\vec{R}) = \int_v \frac{\rho(\vec{R}')dv'}{4\pi\varepsilon_\circ |\vec{R}-\vec{R}'|}$$

مثال: اگر بار نقطه اي 10^{-7} کولمبي در (۳و۲و۱) واقع باشد ، تابع پتانسیل را در هر نقطه در فضاي خالي به دست آوريد.

$$\vec{R} = \hat{a}_x x + \hat{a}_y y + \vec{a}_z z$$
$$\vec{R} = \hat{a}_x + \hat{a}_y 2 + \vec{a}_z 3$$
$$|\vec{R}-\vec{R}'| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}$$
$$V(\vec{R}) = V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ |R-\vec{R}'|} = \frac{900}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}}$$

مثال: با پيوسته با چگالي $10^{-7} R \, c/m^3$ از مبداء مختصات تا شعاع ۱ متر قرار دارد پتانسیل را در مرکز مختصات به دست آوريد.

$$\vec{R} = 0$$
$$\vec{R}' = \hat{a}_R R' \qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int \frac{\rho(\vec{R}')dv'}{|\vec{R}-\vec{R}'|}$$
$$|\vec{R}-\vec{R}'| = R'$$
$$V(0,0,0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_0^1 \frac{10^{-7} R'}{R'} 4\pi R'^2 dR' = 1200\pi$$

- دیدگاهي دیگر

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{q(\vec{R}-\vec{R}')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{R}-\vec{R}'|^3}$$
$$V(\vec{R}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{R}-\vec{R}'|}$$
$$\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{|\vec{R}-\vec{R}'|}\right) = -\frac{1}{|\vec{R}-\vec{R}'|^2} \equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

بنابراین:
$$\vec{E}(\vec{R}) = -\nabla V(\vec{R})$$

*بنابراین تا کنون سه روش براي محاسبه $\vec{E}$ قابل دسترس است.

۱ – استفاده از فرمول کلي (بر پايه قانون کولمب)
$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho(\vec{R}')dv'}{|\vec{R}-\vec{R}'|^3}(\vec{R}-\vec{R}')$$

۲ – استفاده از قانون گاوس
$$\oint_s \vec{E}.d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho dv'$$

۳ – استفاده از رابطه $\vec{E} = -\nabla V$ با محاسبه V از رابطه
$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho dv'}{|\vec{R}-\vec{R}'|}$$

- شكل انتگرالي رابطه $\vec{E}=-\nabla V$ عبارتست از:

$$V(P_2)-V(P_1)=-\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}.d\vec{l}$$

-قانون (معادله) دوم ماكسول در ميدان ساكن

چون:

$$\nabla\times(-\nabla V)=-\nabla\times(\nabla V)=0$$

بنابراين :

$$\nabla\times\vec{E}=0$$

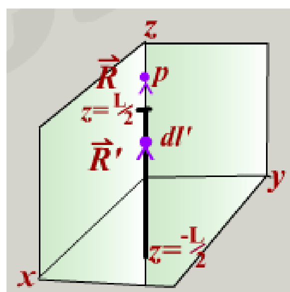
و شكل انتگرالي آن:

$$\int_s\nabla\times\vec{E}.d\vec{s}=\oint_c\vec{E}.d\vec{l}=0$$

بعبارتي چنانچه بار الكتريكي در يك ميدان الكتريكي ساكن در يك مسير بسته گردش نمايد (نقطه شروع و اتمام انتگرال‌گيري يكي باشد) هيچگونه انرژي از ميدان كسب و هيچگونه انرژي به ميدان داده نمي‌شود يعني انرژي ذخيره شده ثابت است و ميدانهاي فوق را كنزرواتيو (Conservation) يا پايستار گويند.

- بنابراين كرل و ديورژانس ميدان الكتريكي ساكن محاسبه گرديد و در نتيجه اين ميدان طبق قضيه هلمهولتس كاملاً مشخص شده است.

مثال: منبع بار خطي به طول L بر روي محور zها با چگالي يكنواخت ρ_l در دست است. مطلوبست محاسبه شدت ميدان الكتريكي و تابع پتانسيل الكتريكي نقاط مستقر در امتداد اين بار خطي:



$$P\left|\begin{array}{l}r=0\\ \varphi=0\\ z=z\end{array}\right.$$

$$\vec{R}=z\hat{a}_z$$

$$\vec{R}'=z'\hat{a}_z$$

$$\left|\bar{R}-\bar{R}'\right|=(z-z') \qquad z>L/2$$

$$dl'=dz'$$

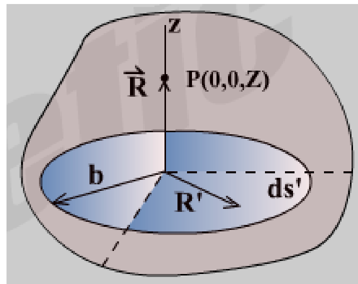
$$V(\vec{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\rho_l dz'}{(z-z')} \quad\Rightarrow$$

$$V(\vec{R})=-\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln(z-z')\Big]_{-L/2}^{L/2}$$

$$V=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{z+(L/2)}{z-(L/2)}\right] \qquad |z|>L/2$$

$$\bar{E}=-\nabla V=-\hat{a}_z\frac{dv}{dz}=\hat{a}_z\frac{\rho_l L}{4\pi\varepsilon_0\left[z^2-(L/2)^2\right]} \qquad z>L/2$$

مثال: مطلوبست محاسبه شدت ميدان الكتريكي بر روي محور يك ديسك دايره‌اي با شعاع b كه بار يكنواخت سطحي به چگالي ρ_s روي آن توزيع شده است.



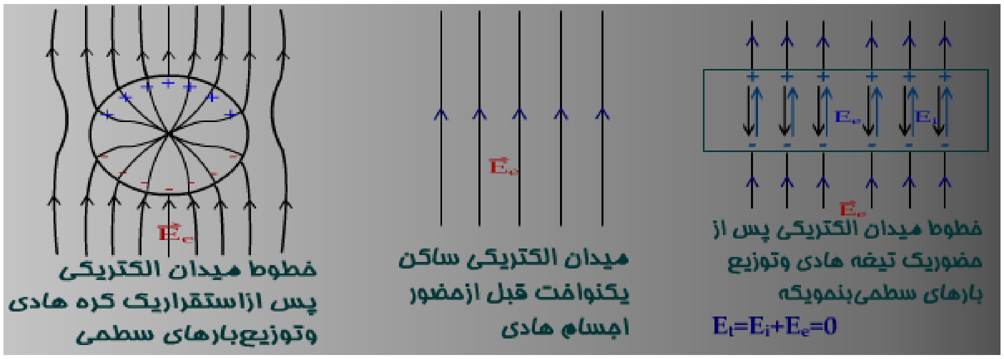
$$\vec{R} = z\hat{a}_z$$
$$\vec{R}' = r'\hat{a}_r$$
$$\left|\vec{R} - R'\right| = \sqrt{z^2 + r'^2}$$
$$ds' = r'dr'd\varphi'$$
$$V\left(\vec{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_s \frac{\rho_s ds'}{\left|\vec{R} - \vec{R}'\right|} = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^b \frac{r'dr'd\varphi'}{\sqrt{z^2 + r'^2}}$$
$$V\left(\vec{R}'\right) = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi\sqrt{z^2 + r'^2}\Big]_0^b = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[\left(z^2 + b^2\right)^{1/2} - |z|\right]$$
$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{a}_z \frac{dv}{dz} = \begin{cases} \hat{a}_z \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[1 - z\left(z^2 + b^2\right)^{-1/2}\right] & z > 0 \\ -\hat{a}_z \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[1 + z\left(z^2 + b^2\right)^{-1/2}\right] & z < 0 \end{cases}$$

حضور هادي‌ها در ميدان الكتريكي ساكن

چنانچه يك جسم هادي را در نظر بگيريم، روشن است كه هيچ اختلاف پتانسيلي بين كليه نقاط آن وجود ندارد و هادي در يك سطح پتانسيل ثابت قرار دارد بنابراين با توجه به $\vec{E} = -\nabla V$ شدت ميدان در جسم هادي صفر خواهد بود.

از طرفي چنانچه در جسم هادي شدت ميدان الكتريكي غير صفري وجود داشته باشد، اين ميدان سبب اعمال نيرو به بارهاي الكتريكي (الكترونها) موجود در هادي كرده و در نتيجه تجمع بارهاي همنام منفي در يك طرف و بارهاي مثبت در طرف ديگر شده يعني ايجاد اختلاف پتانسيل بين اين دو مكان از هادي مي‌گردد كه خلاف واقع است بنابراين $\vec{E}$ در داخل اجسام هادي صفر خواهد بود.

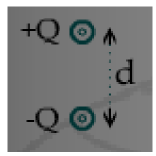
چنانچه يك هادي در يك ميدان الكتريكي خارجي قرار گيرد سبب تغيير توزيع بارهاي موجود در داخل هادي مي‌شود و اگر اين هادي خنثي باشد، توزيع جديد بارها به نحوي خواهد بود كه ميدان بوجود آمده از اين توزيع جديد ميداني بوجود مي‌آورند كه دقيقاً برابر با ميدان خارجي اما در خلاف جهت با آن باشند به نحوي كه $\vec{E}$ كل در داخل هادي صفر شود توزيع بارها بر روي سطوح هادي بطريقي خواهد شد تا خطوط ميدان در جهت عمود بر اين سطوح قرار گيرند چه در غير اينصورت ايجاد مؤلفه مماسي كرده و همين امر نشان دهنده وجود ميدان غير صفر در هادي (سطح هادي) مي‌شود كه غير ممكن است.



دو قطبي الكتريكي Electric Dipole

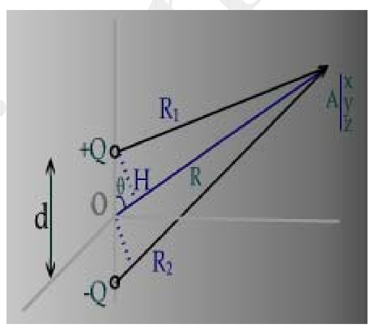
تركيبي از دو بار الكتريكي مساوي و غير همنام كه بفاصله مشخصي از هم قرار گرفته‌اند.

بعنوان مثال: دو بار Q+ و Q- بفاصله d



محاسبه تابع پتانسيل الكتريكي يك دو قطبي

در اين قسمت پتانسيل ناشي از يك دو قطبي الكتريكي در ناحيه دور (Far zone) را بدست مي‌آوريم و با استفاده از رابطه $\vec{E}=-\nabla V$ شدت ميدان الكتريكي آن (Far Field) را محاسبه خواهيم كرد.



يك دو قطبي واقع در مبدأ مختصات را در نظر بگيريد.

محاسبه پتانسيل نقطه‌اي كلي مانند $A\left|\begin{array}{l}R\\ \theta\\ \varphi\end{array}\right.$

$$V(\vec{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{2}\frac{q_i}{|R-R_i|}$$

$$V(\vec{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{+Q}{R_1}+\frac{-Q}{R_2}\right]$$

ناحيه دور

$$R_1,R_2,R>>d \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2}{R^2}\to 0$$

$$R_1\approx R-OH$$

$$OH=\frac{d}{2}\cos\theta$$

$$R_1 \approx R - \frac{d}{2}\cos\theta$$

$$R_2 \approx R + \frac{d}{2}\cos\theta$$

همچنين:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} + \frac{-1}{R_2}\right] \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R - \frac{d}{2}\cos\theta} - \frac{1}{R + \frac{d}{2}\cos\theta}\right]$$

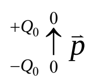
$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{R + \frac{d}{2}\cos\theta - R + \frac{d}{2}\cos\theta}{R^2 - \frac{d^2}{4}\cos^2\theta}\right] = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2\left[1 - \frac{d^2}{4R^2}\cos^2\theta\right]}$$

$$V(\vec{R}) \approx \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}$$

$\vec{P}$ گشتاور دو خطي الكتريكي Electric Dipole moment جهت بردار $\vec{P}$ از بار منفي بطرف بار مثبت است (يعني برعكس جهت $\vec{E}$)

$$P = Qd \quad , \quad \hat{a}_p = \hat{a}_z$$

$$V(\vec{R}) = \frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$



از طرفي مي‌دانيم :

$$\hat{a}_z . \hat{a}_R = \cos\theta$$

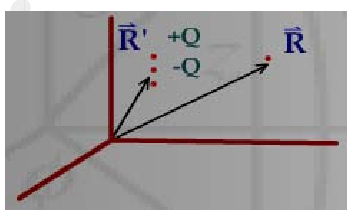
بنابراين:

$$P\cos\theta = P\hat{a}_z . \hat{a}_R = \vec{P}.\hat{a}_R = \vec{P}.\frac{\vec{R}}{R}$$

در نتيجه:

$$V(\vec{R}) = \frac{\vec{P}.\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

چنانچه دو قطبي در موقعيت $\vec{R}'$ واقع شده باشد و نه در مبدأ مختصات



$$V(\vec{R}) = \frac{\vec{P}.(\vec{R} - \vec{R}')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

- ميدان الكتريكي يك دو قطبي

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\hat{a}_R\frac{dV}{dR} + \hat{a}_\theta\frac{1}{R}\frac{dV}{d\theta}\right)$$

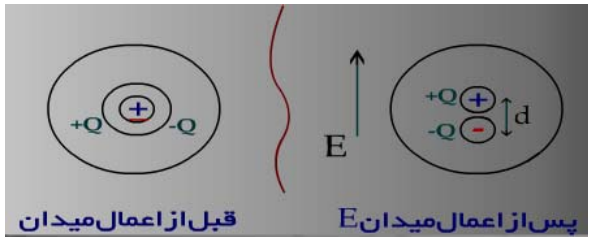
$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{P\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{a}_R + \frac{P\sin\theta}{4\lambda\varepsilon_0 R^3}\hat{a}_\theta$$

و يا

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{\vec{P}.\hat{a}_R}{2\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{a}_R - \frac{\vec{P}.\hat{a}_\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{a}_\theta$$

حضور عايق‌ها در ميدان الكتريكي ساكن و پلاريزاسيون

در اثر اعمال يك ميدان الكتريكي به اتم يا مولكول يك جسم عايق، مركز بارهاي مثبت و مركز بارهاي منفي كه قبل از آن بر روي هم قرار داشته‌اند، جابه‌جا مي‌شوند.
اين جابجا شدن با فرض اينكه ساختار فوق خنثي است بصورت يك دو قطبي نمود خواهد كرد +Q (كل بار مثبت) و −Q (كل بار منفي) كه فاصله d از هم قرار مي‌گيرند.
شدت $\vec{E}$ به اندازه‌اي نيست كه بارهاي منفي كه در قيد ساختار هستند از آن رها شدند.

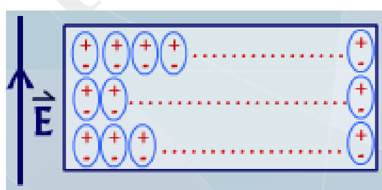


دو نيرو بر هسته (+Q) وارد مي‌شود F_{-Q} ناشي از بارهاي منفي (-Q) و F_E ناشي از ميدان $\vec{E}$ كه چون هسته در حال تعادل است بايستي نيروهاي فوق به تعادل برسند يعني:

$$\vec{F}_{-Q} + \vec{F}_E = 0$$

$$F_{-Q} = F_E \quad \Rightarrow \quad Qd = \varepsilon_0 XeE \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \varepsilon_0 Xe\vec{E}$$

Xe ضريب تأثيرپذيري يا حساسيت الكتريكي عايق ناميده مي‌شود. (Susceptibility)
چنانچه يك قطعه عايق كه متشكل از تعداد زيادي اتم يا مولكول آن عايق خواهد بود را در نظر بگيريم كه در يك ميدان الكتريكي خارجي قرار بگيرد، قطب‌بندي و يا اصطلاحاً پلاريزاسيون اتفاق و يا بعبارتي نظم خاصي در ساختار اتمي يا مولكولي عايق بوجود مي‌آيد كه ايجاد ممان دو قطبي در آن خواهد كرد.



- چون $\vec{E}$ آنچنان زياد نيست كه الكترونها از قيد هسته جدا شوند، تغيير شكل (deform) در عايق رخ نخواهد داد و بارها مقيد به ساختار خواهند بود و بهمين دليل آنها را بارهاي مقيد Bound charge يا بارهاي پلاريزه گويند.
- با قطب‌بندي بارهاي مقيد، توليد ميدان الكتريكي مي‌شود در خلاف جهت $\vec{P}$ يا $\vec{E}$ كه سبب خواهد شد شدت ميدان كل از مقدار اوليه كاهش يابد.

$$\overset{\vec{P}}{\uparrow}{}^{+}_{-} \downarrow \vec{E}_P \uparrow \vec{E}$$

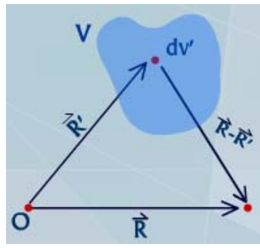
$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_p + \vec{E}$$

$$E_{total} = E - E_P < E$$

و اين دليل عمده در بكارگيري عايق‌ها در مواجهه با ميدان‌هاي قوي (ولتاژ زياد) مي‌باشد.

- محاسبه پتانسیل و شدت میدان الکتریکي بعلت عایق‌هاي پلاریزه

ممان در واحد حجم عایق = $\vec{P}$



$$dV(\vec{R})=\frac{\vec{P}(\vec{R}')dV'.(\vec{R}-\vec{R}')}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}$$

$$V(\vec{R})=\int_V\frac{P(\vec{R}').(\vec{R}-\vec{R}')}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}dV'$$

$$V(\vec{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\left\{\nabla'.\left[\frac{\vec{P}}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}\right]-\frac{\nabla'.\vec{P}}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}\right\}d\dot{V}$$

$$V(\vec{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S\frac{\vec{P}.d\vec{s}'}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{-\nabla'.\vec{P}}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}dV'$$

$$V(\vec{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S\frac{\vec{P}.\hat{n}ds'}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{-\nabla'.\vec{P}}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}dV'$$

پتانسیل ناشي توزیع بارهاي حجمي و سطحي آزاد: $V(\vec{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S\frac{\vec{P}_s ds'}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{Pdv'}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}$

چگالي بار مفید (پلاریزه) سطحي در سطح عایق پلاریزه: $\rho_{P_S}=\vec{P}.\hat{n}$

چگالي بار مفید (پلاریزه) حجمي در حجم عایق پلاریزه: $\rho_P=-\nabla.\vec{P}$

بنابراین:

$$V(\vec{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S\frac{\rho_s+\rho_{P_S}}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}ds'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho+\rho_P}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}dV'$$

$$\vec{E}(\vec{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S\frac{(\rho_s+\rho_{P_S})(\vec{R}-\vec{R})}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}ds'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{(\rho+\rho_P)(\vec{R}-\vec{R}')}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}dV'$$

چگالي فلوي میدان الکتریکي

$$\oint_S\vec{E}.d\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V(\rho+\rho_P)dv'$$

$$\nabla.\vec{E}=\frac{\rho+\rho_P}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla.(\varepsilon_0\vec{E})=\rho-\nabla.\vec{P}$$

$$\nabla.(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})=\rho$$

$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$ *Electric Flux Density*

$\nabla.\vec{D}=\rho$ یا $\oint_S\vec{D}.d\vec{s}=Q_{free}=\int_V\rho dv'$

اما می‌دانیم که $\vec{P}=\varepsilon_0 Xe\vec{E}$

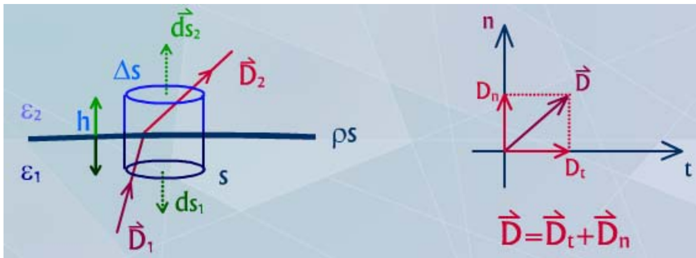
$$\Rightarrow \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 Xe\vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + Xe)\vec{E} \qquad , \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + Xe)$ Absolute Electric Permitivity ε=ضريب نفوذپذيري مطلق عايق

$\varepsilon_r = 1 + Xe$ Relative Electric Permitivity ε_r=ضريب نفوذپذيري نسبي عايق

شرايط مرزي در سطح مشترك دو محيط Boundary condition



$$\oint_s \vec{D}.d\vec{s} = Q$$

$$\oint_s \vec{D}.d\vec{s} = \int_{s_1} \vec{D}.d\vec{s}_1 + \int_{s_2} \vec{D}_2.d\vec{s}_2 + \int_{جانبي} \vec{D}.d\vec{s}$$

$$\int_{s_1} \vec{D}_1.d\vec{s}_1 = \int_{s_1} \left(\vec{D}_{1t} + \vec{D}_{1n}\right)d\vec{s}_1 = \int_{s_1} \vec{D}_{1t}.d\vec{s}_1 + \int_{s_1} \vec{D}_{1n}.d\vec{s}_1 = 0 + D_{1n}(-\Delta s) = -D_{1n}\Delta S$$

$$\int_{s_2} \vec{D}_2.d\vec{s}_2 = \int_{s_2} \left(\vec{D}_{2t} + \vec{D}_{2n}\right)d\vec{s}_2 = 0 + D_{2n}(\Delta S) = D_{2n}\Delta S$$

$$\int_{جانبي} \vec{D}.d\vec{s} \underset{h\to 0}{=} 0$$

$$\Rightarrow \qquad \oint_s \vec{D}.d\vec{s} = D_{2n}\Delta s - D_{1n}\Delta S$$

چون عايق‌ها كامل فرض شده‌اند:

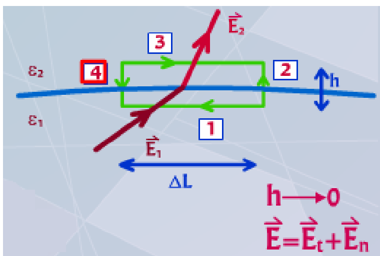
$$Q = \int_V \rho dv' = \int_S \rho_s ds' = \rho_s \Delta S$$

$$(D_{2n} - D_{1n})\Delta S = \rho_s \Delta S \Rightarrow D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$$

$$if \qquad \rho_s = 0 \Rightarrow D_{2n} = D_{1n}$$

$$\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n}$$

$$\nabla.\vec{P} = -\rho_P \qquad \Rightarrow \qquad P_{1n} - P_{2n} = \rho_{ps}$$



$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l} = 0$$

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l} = \int_{(1)} \vec{E}_1.d\vec{l}_1 + \int_{(2)} \vec{E}.d\vec{l}_2 + \int_{(3)} \vec{E}_2.d\vec{l}_3 + \int_{(4)} \vec{E}.d\vec{l}_4$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l} = 0$$

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l} = \int_{(1)} \vec{E}_1.d\vec{l}_1 + \int_{(2)} \vec{E}.d\vec{l}_2 + \int_{(3)} \vec{E}_2.d\vec{l}_3 + \int_{(4)} \vec{E}.d\vec{l}_4$$

$$= E_{1t}\Delta L + 0 + E_{2t}(-\Delta L) + 0 = (E_{1t} - E_{2t})\Delta L = 0$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

چنانچه يكي از محيطها هادي باشد با توجه به آنكه در هادي $\vec{P}, \vec{D}, \vec{E}$ صفر است.

(مثلاً محيط اول هادي است)

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \qquad E_1 = D_1 = P_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad D_{2n} = \rho_s$$

$$E_{2n} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_2}$$

$$E_{2t} = E_{1t} = 0$$

يعني در مرز هادي‌ها تنها مؤلفه عمود وجود دارد.

مثال: بار نقطه‌اي +Q در مركز يك پوسته هادي كروي با شعاع داخلي R_i و شعاع بيروني $R_\circ$ قرار دارد توابع $\vec{E}$ و V را بر حسب فاصله R بدست آوريد (محيط مسئله فضاي آزاد)

- براي ناحيه $R>R_\circ$

سطح گاوسي كروي با شعاع R:

$$\oint_S \vec{E}.d\vec{s} = \frac{Q_t}{\varepsilon_\circ}$$

$$\oint_S \vec{E}.d\vec{s} = E_1 4\pi R^2$$

با فرض آنكه پوسته هادي خنثي باشد:

$$Q_t = \int \rho dv = Q$$

$$E_1 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

$$V = -\int \vec{E}.d\vec{l}$$

$$V_1(\vec{R}) - V(\infty) = -\int_\infty^R \vec{E}_1.d\vec{l} = -\int_\infty^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'^2}\hat{a}_R.\hat{a}_R dR'$$

با فرض $V(\infty) = 0$:

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'}\Bigg]_\infty^R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

- براي ناحيه $R_i<R<R_\circ$ چون در جسم هادي قرار داريم:

$$E_2 = 0$$

$$V_2 = V_1\Big|_{R=R_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0}$$

- براي ناحيه $R<R_i$ سطح گاوسي كروي با شعاع R:

$$\oint_s \vec{E}.d\vec{s} = E_3 4\pi R^2$$

$$Q_t = Q$$

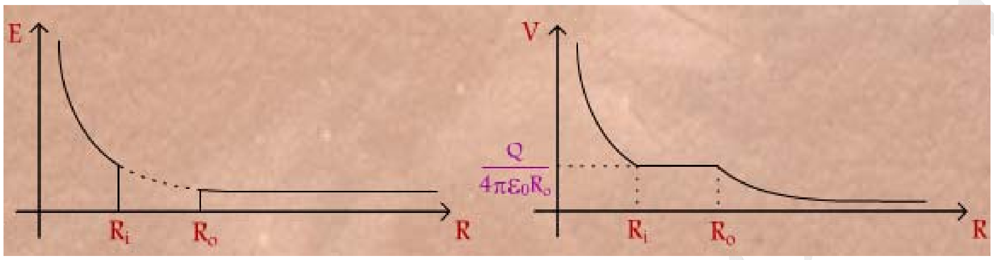
بنابراين

$$E_3 = 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

$$V_3 = -\int_{\infty}^{R}\vec{E}.d\vec{l} = -\int_{\infty}^{R_0}\vec{E}_1.d\vec{l} - \int_{R_i}^{R}\vec{E}_3.d\vec{l}$$

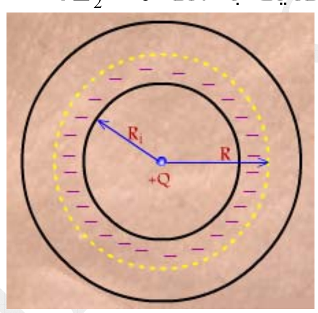
$$V_3 = V_2 - \int_{R_i}^{R}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'^2}dR' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0} + \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'}\right)\Bigg]_{R_i}^{R}$$

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_i}$$



مثال: براي مثال قبل مطلوبست تعيين بارهاي توزيع شده در نقاط مختلف پوسته هادي.

با توجه به خنثي بودن هادي و با عنايت به آنكه $E_2 = 0$:



$$\oint \overline{E}_2.d\overline{s} = \frac{Q_t}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow Q_t = 0 \Rightarrow Q + Q_s = 0$$

$$\Rightarrow Q_s = -Q \Rightarrow \rho_s\Big|_{R=R_i} = -\frac{Q}{4\pi R_i^2}$$

ديدگاه ديگر:

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \qquad \text{در } R = R_i$$

$$0 - D_1 = P_s \Rightarrow -\varepsilon_0 E_1\Big|_{R=R_i} = \rho_s$$

$$-\frac{Q}{4\pi R_i^2} = \rho_s$$

$$\Rightarrow \rho_s = -\frac{Q}{4\pi R_i^{\,2}}$$

بنابراين

$$Q_s\Big|_{R=R_0} = -Q_s\Big|_{R=R_i} = Q$$

$$\rho_s\Big|_{R=R_0} = \frac{Q}{4\pi R_0^2}$$

و یا : $D_3\Big|_{R=R_0} - D_2\Big|_{R=R_0} \Rightarrow \frac{Q}{4\pi R_0^2} - 0 = \rho_s$

مثال: چنانچه پوسته کروي مثال قبل از جنس عايق با ثابت عايقي ε_r باشد مطلوبست محاسبه $V,\vec{P},\vec{D},\vec{E}$ برحسب فاصله R و نيز تعيين چگالي بارهاي پلاريزه.

$R > R_0$:

$$\oint \vec{D}_1.d\vec{s}_1 = Q_t \Rightarrow D_1 4\pi R^2 = Q \Rightarrow \vec{D}_1 \frac{Q}{4\pi R^2}\hat{a}_R$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{D}_1}{\varepsilon_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

$$\vec{p}_1 = \vec{D}_1 - \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_1\vec{E}_1 - \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} - \varepsilon_0\vec{E} = 0$$

$$V_1(R) - V(\infty) = -\int_\infty^R \vec{E}_1.d\vec{l} = -\int_\infty^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'^2}dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'}\Bigg]_\infty^R$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$R_i < R < R_0$:

$$\oint \overline{D}_2.d\vec{s}_2 = Q_t \Rightarrow D_2 4\pi R^2 = Q \Rightarrow \vec{D}_2 = \frac{Q}{4\pi R^2}\hat{a}_R$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{D}_2}{\varepsilon_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}\hat{a}_R$$

$$\vec{P}_2 = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_2 = \frac{Q(\varepsilon_r - 1)}{4\pi\varepsilon_r R^2}\hat{a}_R$$

$$V_2 = -\int_\infty^R \vec{E}.d\vec{l} = -\int_\infty^{R_0} \vec{E}_1.d\vec{l} - \int_{R_0}^R \vec{E}_2.d\vec{l}$$

$$V_2 = V_1(R = R_0) - \int_{R_0}^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon R'^2}dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon R_0}$$

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R} + \frac{Q}{4\pi R_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$R < R_i$:

$$\oint \vec{D}_3.d\vec{s}_3 = Q_t \Rightarrow \vec{D}_3 = \frac{Q}{4\pi R^2}\hat{a}_R$$

$$\vec{E}_3 = \frac{\vec{D}_3}{\varepsilon_3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

$$\vec{P}_3 = 0$$

$$V_3 = -\int_\infty^R \vec{E}.d\vec{l} = -\int_\infty^{R_i} \vec{E}.d\vec{l} - \int_{R_i}^R \vec{E}_3.d\vec{l}$$

$$V_3 = V_2(R = R_i) - \int_{R_i}^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'^2}dR'$$

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R_i} + \frac{Q}{4\pi R_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_i}$$

براي محاسبه چگالي بار حجمي پلاريزه در فاصله $R_i<R<R_0$:

$$\rho_p = -\nabla.\vec{P}_2$$

$$\rho_P = -\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2 P_2\right) = -\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(\frac{Q(\varepsilon_r -1)}{4\pi\varepsilon_r}\right) = 0$$

$$\rho_P\Big|_{R=R_0} = \left(\vec{P}.\hat{n}\right)\Big|_{R=R_0} = \vec{p}_2\Big|_{R=R_0}.\hat{a}_R = \frac{Q(\varepsilon_r -1)}{4\pi\varepsilon_r R_0^2}\hat{a}_R.\hat{a}_R$$

$$\rho_P\Big|_{R=R_0} = \frac{Q(\varepsilon_r -1)}{4\pi\varepsilon_r R_0^2}$$

$$\rho_p\Big|_{R=R_i} = \vec{P}_2\Big|_{R=R_I}.\hat{n}\Big|_{R=R_i} = \frac{Q(\varepsilon_r -1)}{4\pi\varepsilon_r R_i^2}\hat{a}_R.(-\hat{a}_R) = -\frac{Q(\varepsilon_r -1)}{4\pi\varepsilon_r R_i^2}$$

نكته: قدرت تحمل عايق (ماده) را حداكثر شدت ميدان الكتريكي اعمالي به عايق بدون آنكه شكست (Breakdown) در مورد عايق رخ ندهد و بعبارتي تغيير شكل (ساختار) مولكولي انجام نگيرد. معمولاً اين پارامتر را با واحد V/m بيان مي‌گردد و مفهوم آن بصورت حداكثر ولتاژ قابل اعمال به قطعه‌اي با ضخامت مشخص بكار مي‌رود.

مثلاً قدرت تحمل عايقي هوا (با فشار اتمسفر) $3\times10^6\ V/m$ است و يا براي ميكا Mica با $\varepsilon_r = 6$ برابر $200\times10^6\ V/m$ يا $200\ Mv/m$ است، بدين مفهوم كه براي يك قطعه از جنس ميكا با ضخامت ۱cm حداكثر $V_{max} = E_{max}\times d = 200\times10^6\times10^{-2} = 2MV$

۲ مگاولت قابل اعمال به قطعه خواهد بود بدون صدمه رسيدن به آن.

خازن Capacitor

قطعاتي هستند كه به مجرد آنكه به ولتاژي (منبعي) متصل شوند (دو جسم هادي كه در بين آنها محيط عايقي قرار گرفته) بارهائي روي سطوح اين دو جسم جمع مي‌شود – بار مثبت روي يكي و بار منفي به همان مقدار روي ديگري. اين قطعه انرژي ميدان الكتريكي را در خود ذخيره مي‌كند. نسبت بار ذخيره شده به اختلاف پتانسيل بين دو جسم هادي آن مقداري است ثابت كه به آن ظرفيت گويند (capacitance). اين ظرفيت تنها تابع مشخصات فيزيكي قطعه است و نه كميت‌هاي الكتريكي مربوطه. مانند يك خازن مسطح با سطح هادي برابر با A كه بفاصله d از هم قرار گرفته‌اند و فضاي بين آنها از عايقي با ضريب گذردهي ε پر شده و $c = \frac{\varepsilon A}{d}$ مي‌باشد.

$$C = \frac{Q}{V} \qquad\qquad C = \frac{\oint \vec{D}.d\vec{s}}{-\int \vec{E}.d\vec{l}} = \frac{\int \varepsilon\vec{E}.d\vec{s}}{-\int \vec{E}.d\vec{l}}$$

نحوه محاسبه ظرفيت خازني

١ – فرض استقرار بار +Q و –Q مشخص روي دو هادي خازن

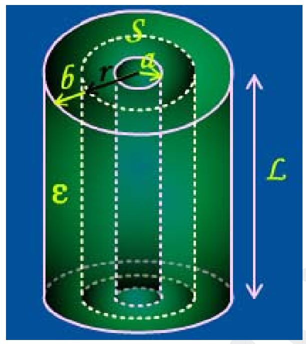
٢ – تعيين D در فضاي بين دو هادي از طريق $\oint \vec{D}.d\vec{s} = Q$

٣ – محاسبه E از طريق $E = \dfrac{D}{\varepsilon}$

٤ – محاسبه Vبين دو هادي از طريق $V = -\int \vec{E}.d\vec{l}$

٥ – جايگزيني V بدست آمده در فرمول $C = \dfrac{Q}{V}$

مثال: محاسبه ظرفيت خازني يك خازن استوانه‌اي متشكل از دو استوانه هم محور بطول L و به شعاع‌هاي قاعده a و b (b>a) كه فضاي بين آندو از عايقي (ε) پر شده است.



١ – فرض بار +Q روي استوانه داخلي و –Q روي استوانه بيروني

٢ – انتخاب سطح گاوسي استوانه‌اي به ارتفاع L و شعاع قاعده a<r<b

$$\oint_s \vec{D}.d\vec{s} = +Q \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \frac{Q}{2\pi rL}\hat{a}_r$$

٣ - $$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon rL}$$

٤ - $$V_a - V_b = V = -\int_b^a \vec{E}.d\vec{l} = -\int_b^a \frac{Q\hat{a}_r}{2\pi\varepsilon rL}\hat{a}_r dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L} Ln\frac{b}{a}$$

٥ - $$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon L}Ln\dfrac{b}{a}} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2\pi\varepsilon L}{Ln\dfrac{b}{a}}$$

مثال: محاسبه ظرفيت خازني كروي متشكل از دو كره هم مركز به شعاع‌هاي a و b كه فضاي بين دو كره از عايقي با پرميتيوته ε پر شده است.

١) فرض بار مستقر روي كره داخلي +Q

٢) $$\oint \vec{D}.d\vec{s} = Q \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \frac{Q}{4\pi R^2}\hat{a}_R$$

٣) $$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}\hat{a}_R$$

٤) $$V_a - V_b = -\int_b^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}\hat{a}_R.\hat{a}_R dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

٥) $$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\dfrac{Q(b-a)}{4\pi\varepsilon ab}} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{4\pi\varepsilon ab}{b-a}$$

انرژي ذخيره شده الكترواستاتيكي

مي‌دانيم كه كار لازم براي حركت يك بار نقطه‌اي Q واقع در ميدان الكتريكي از رابطه W=QV كه V اختلاف پتانسيل بين نقطه (مكان) انتهائي و ابتدائي بار Q است بدست مي‌آيد اگر نقطه ابتدائي در بينهايت دور (يا مبدأ پتانسيل صفر در بينهايت) در نظر گرفته باشيم V پتانسيل نقطه نهائي بار Q خواهد بود اين ميزان كار مذكور بصورت انرژي در سيستم ذخيره مي‌شود.

حال N بار گسسته را كه در فضائي مستقر شده‌اند را در نظر مي‌گيريم، ميزان انرژي (كار) ذخيره شده براي استقرار اين بارها بقرار زير محاسبه مي‌شود.

ابتدا فرض مي‌شود كه هيچگونه باري وجود ندارد و بار q_1 را از بينهايت به مكان $\vec{R}_1$ آورده شود.

براي بار q_1 $\quad We_1 = 0$

براي بار q_2 $\quad We_2 = q_2 V_{21}$

براي بار q_3 $\quad We_3 = q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$

و نهايتاً براي آوردن بار q_N $\quad We_N = q_N V_{N1} + q_N V_{N2} + \ldots + q_N V_{N,N-1}$

بنابراين $\quad$ كل $We = \sum_{i=1}^{N} We_i = 0 + q_2 V_{21} + q_3 V_{31} + q_3 V_{32} + \ldots + q_N V_{N,N-1}$

اما از طرفي

$$q_2 V_{21} = q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\left|\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right|} = q_1 \frac{q_2}{4\pi\varepsilon\left|\vec{R}_1 - \vec{R}_2\right|} = q_1 V_{12}$$

و بطور كلي $\quad q_i V_{ij} = q_j V_{ji}$

بنابراين مي‌توان نوشت:

$$We_2 = q_1 V_{12}$$
$$We_3 = q_1 V_{13} + q_2 V_{23}$$
$$\ldots$$
$$We_N = q_1 V_{1N} + q_2 V_{2N} + \ldots + q_{N-1} V_{N-1,N}$$

و $\quad$ كل $We = 0 + q_1 V_{12} + q_1 V_{13} + \ldots + q_{N-1} V_{N-1,N}$

چنانچه We كل دو رابطه مربوطه در بالا را با هم جمع كنيم:

$$\begin{aligned} 2We &= q_1 V_{12} + q_2 V_{13} + q_1 V_{14} + \ldots + q_1 V_{1N} \\ &\quad + q_2 V_{21} + q_2 V_{23} + q_1 V_{24} + \ldots + q_2 V_{2N} \\ &\quad \ldots \\ &\quad q_N V_{N1} + q_N V_{N2} + \ldots + q_N V_{N,N-1} \end{aligned}$$

يا :

$$\begin{aligned} 2We &= q_1 \left(V_{12} + V_{13} + \ldots + V_{1N}\right) \\ &\quad + q_2 \left(V_{21} + V_{23} + \ldots + V_{2N}\right) \\ &\quad \ldots \\ &\quad + q_N \left(V_{N1} + V_{N2} + \ldots + V_{N-1}\right) \end{aligned}$$

حال اگر V_1 را بصورت $V_1=\sum_{i=2}^{N}V_{1i}$ تعريف كنيم كه مجموع پتانسيل نقطه $\vec{R}_1$ ناشي تمام منابع $(q_N,...,q_3,q_2)$ است و بطور كلي:

$V_K=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N}V_{ki}$ = پتانسيل نقطه kام ناشي از تمام بارهاي موجود به‌جز q_k

$$2We=q_1V_1+q_2V_2+...+q_NV_N$$

$$We=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_iV_i$$

و براي يك توزيع بار پيوسته حجمي به چگالي P

$$We=\frac{1}{2}\int_V\rho(\vec{R}')V(\vec{R}')dV'$$

مي‌توان ثابت كرد كه:

$$We=\frac{1}{2}\int_v\vec{D}.\vec{E}dv'$$

$$We=\frac{1}{2}\int\varepsilon E^2dv'=\frac{1}{2}\int\frac{D^2}{\varepsilon}dV'=\frac{1}{2}\int DEdv'$$

نيروي الكترواستاتيك

- براي يك سيستم بسته طبق اصل بقاء انرژي

$$\Delta W+\Delta We=0$$

$$\Delta W=-\Delta We$$

ميزان انرژي تغيير يافته بدليل اعمال نيروي F كه سبب جابجائي Δl مي‌شود:

$$\Delta W=F\Delta l$$

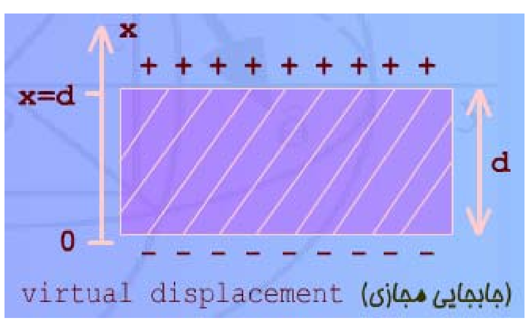
$$F=\frac{\Delta W}{\Delta l}$$

$$\Rightarrow\quad F=-\frac{\Delta We}{\Delta l}\quad\Rightarrow\quad \vec{F}\Big|_{Q=cte}=-\nabla We$$

مانند: يك خازن كه بار Q+ و Q− روي صفحات آن ذخيره شده و اتصالي با بيرون (يك منبع بيروني) ندارد يعني Q ثابت است و در نتيجه يك سيستم بسته را بوجود آورده بنابراين:

$$\vec{F}\Big|_{Q=cte}=-\nabla W_e\Big|_{Q=cte}=-\nabla\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right)$$

$$C=\varepsilon\frac{A}{x}$$



$dx=virtual\ \ displacement$ (جابجائي مجازي)

$$F_y = F_z = 0 \quad , \quad F_x = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\,{Q^2}\!\big/{c}\right) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2 x}{2\varepsilon A}\right)$$

$$F_x = -\frac{1}{2}\,{Q^2}\!\big/{\varepsilon A}$$

- براي يك سيستم باز $\Delta W = \Delta We$

بنابراين

$$\Delta W = F\Delta l \quad \Rightarrow \quad F = \frac{\Delta W}{\Delta l} = \frac{\Delta We}{\Delta l}$$

$$\vec{F}\big|_{V=cte} = \nabla W_e$$

مانند يك خازن كه به منبعي با ولتاژ ثابت V متصل گشته است و هز تغيير در انرژي موجود از منبع تأمين مي‌شود.

$$\vec{F}\big|_{V=cte} = \nabla W_e = \nabla\left(\frac{1}{2}cV^2\right) \qquad C = \varepsilon\frac{A}{x}$$

$$F_x = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(cv^2\right) = \frac{V^2}{2}\frac{d}{dx}\left(\varepsilon\frac{A}{x}\right) = \frac{V^2}{2}\left[-\frac{\varepsilon A}{x^2}\right]$$

$$F_x = -\frac{1}{2}V^2\frac{\varepsilon^2 A^2}{x^2\varepsilon A} = -\frac{1}{2}\frac{V^2C^2}{\varepsilon A} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon A}$$

كه همان جواب حالت قبل است.

نكته: در خصوص وضعيت خطوط ميدان در يك خازن چنانچه فاصله بين دو هادي نسبت به ساير ابعاد خازن كوچك نباشد، ميدان در فضاهاي بين دو هادي يكنواخت نخواهد بود و ميدان در رفتگي پيدا خواهد كرد يعني خطوط ميدان در نقاط كناري نسبت به نقاط مياني قطعه (خازن) انحراف خواهد داشت كه به اين مي
دان Fringing Field گويند (فوران ميدان)