فصل سوم

حل مسائل الكترواستاتيك Solution of Electrostatic problems

تاكنون سه روش محاسبه شدت ميدان الكترويكي (حل مسئله ميزان الكتريكي ساكن) در فصل قبل ارائه و بررس گرديد. در اين فصل روش‌ها و تكنيك‌هاي ديگري ارائه مي‌شود.

معادلات لاپلاس و پواسون

$$\nabla_0 \vec{E} = \rho / \varepsilon$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\nabla_0 (-\nabla V) = \rho / \varepsilon$$

$$\nabla_0 (\nabla V) = -\rho / \varepsilon$$

معادله پواسون Poisson Equation $\nabla^2 V = -\rho / \varepsilon$

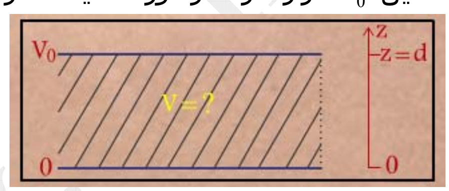
(معادله ديفرانسيل درجه ۲ ولتاژ ناهمگن)

چنانچه در محيط مورد نظر كه V مجهول مي‌باشد و در صدد محاسبه آن هستيم $\rho = 0$ باشد.

معادله لاپلاس Laplace Equation $\nabla^2 V = 0$

(معادله ديفرانسيل درجه ۲ ولتاژ همگن)

مثال: مطلوبست محاسبه تابع پتانسيل بين صفحات يك خازن بنحوي كه پتانسيل صفحه پايين صفر و صفحه بالا در پتانسيل V_0 قرار دارد. از فوران ميدان در لبه خازن صرفنظر مي‌شود.



$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

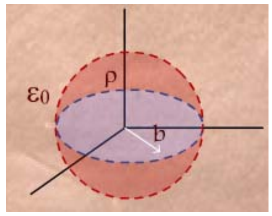
$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dz} = c_1 \quad \Rightarrow \quad dV = c_1 dz \quad \Rightarrow \quad V = c_1 z + c_2$$

$$z = 0 \Rightarrow V = 0 \Rightarrow V(z=0) = c_1(0) + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$z = d \Rightarrow V = V_0 \Rightarrow V(z=d) = c_1(d) + c_1 = V_0 \Rightarrow c_1 = \frac{V_0}{d}$$

بنابراين: $V(x,y,z) = \frac{V_0}{d} z$

مثال: چنانچه بار حجمي پيوسته‌اي به چگالي $\rho_0 \frac{R}{b}$ تا فاصله b از مبدأ مختصات در فضاي آزاد $\varepsilon = \varepsilon_0$ مستقر باشد، مطلوب است محاسبه تابع پتانسيل و شدت ميدان در كليه نقاط فضا با استفاده از معادلات لاپلاس يا پواسون



$$R < b: \qquad \rho = 0$$

$$\nabla^2 V_1 = 0 \qquad , \qquad \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial V_1}{\partial \theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}(R^2\frac{dV_1}{dR}) = 0$$

$$\frac{d}{dR}(R^2\frac{dV_1}{dR}) = 0$$

$$R^2\frac{dV_1}{dR} = c_1$$

$$\frac{dV_1}{dR} = \frac{c_1}{R^2} \quad \to \quad \vec{E} = -\nabla V \Rightarrow E_1 = -\frac{dV_1}{dR} = -\frac{c_1}{R^2}$$

$$dV_1 = \frac{c_1}{R^2}dR$$

$$V_1 = -\frac{c_1}{R} + c_2$$

$$0 \le R \le b: \qquad \rho = \rho_0 \frac{R}{b}$$

$$\nabla^2 V_2 = -\frac{p}{\varepsilon} \qquad , \qquad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}(R^2\frac{dV_2}{dR}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\rho_0\frac{R}{\varepsilon_0 b}$$

$$d(R^2\frac{dV_2}{dR}) = -\rho_0\frac{R^3}{\varepsilon_0 b}dR$$

$$R^2\frac{dV_2}{dR} = -\frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0 b} + c_1' \quad \to \quad E_2 = -\frac{dV_2}{dR} = \frac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0 b} - c_1'/R^2$$

$$dV_2 = -\frac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0 b}dR + \frac{c_1'}{R^2}dR$$

$$V_2 = -\frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 b} - \frac{c_1'}{R} + c_2'$$

c_2', c_1', c_2, c_1 مجهول هستند.

با اعمال شرايط اوليه يا به عبارتي شرايط مرزي چهار مجهول فوق به دست خواهد آمد.

$$R = 0 \quad \Rightarrow \quad V \ne \infty \quad \Rightarrow \quad V_2 = -0 - \frac{C_1'}{0} + C_2' \quad \Rightarrow \quad C_1' = 0$$

$$R \to \infty \quad \Rightarrow \quad V \ne \infty \quad \Rightarrow \quad V_1 = -\frac{C_1}{R}\Big|_{R\to\infty} + C_2 = 0 + C_2 = 0$$

(با انتخاب مبدأ پتانسيل صفر در بی‌نهایت)

بدليل آنكه تابع پتانسيل بايستي يك تابع پيوست باشد. بنابراين

$$R=b:V_1=V_2 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{C_1}{b}=-\frac{\rho_0 b^3}{12\varepsilon_0 b}+C_2'$$

همچنین با توجه به آنکه $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ در نتیجه:

$$\left(E_1=E_2\right)\Big|_{R=b}\Rightarrow -\frac{c_1}{b}=-\frac{\rho_0 b^2}{4\varepsilon_0 b}\Rightarrow c_1=-\frac{\rho_0 b^3}{4\varepsilon_0}$$

و نهایتاً:

$$c_2'=-\frac{c_1}{b}+\frac{\rho_0 b^2}{12\varepsilon_0}=\frac{\rho_0 b^2}{3\varepsilon_0}$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} V_1=\dfrac{\rho_0 b^3}{4\varepsilon_0 R} \\ \vec{E}_1=\dfrac{\rho_0 b^3}{4\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R \end{cases}$$

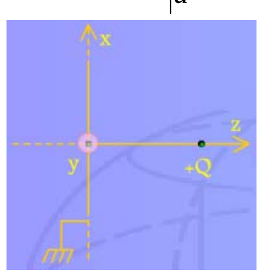
$$\begin{cases} V_2=-\dfrac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 b}+\dfrac{\rho_0 b^2}{3\varepsilon_0} \\ \vec{E}_2=\dfrac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0 b}\hat{a}_R \end{cases}$$

توجه: در انتخاب معادله پواسون یا معادله لاپلاس این نکته حائز اهمیت است که تابع V مجهول ناحیه ای که در صدد یافتن (حل) آن هستیم، تعیین کننده خواهد بود یعنی اگر در آن ناحیه $\rho=0$ باشد معادله لاپلاس و در غیر انصورت معادله پواسون مطرح خواهد شد و سایر نواحی در این انتخاب دخیل نمی باشند و تأثیرات سایر نواحی در شرایط مرزی در حل معادله دیفرانسیلی لحاظ خواهد شد.

روش تصاویر Images Methad

در یک محیط که شامل یک توزیع بار مشخص در مقابل یک جسم هادی باشد می توان از این روش برای یافتن تابع پتانسیل استفاده نمود به نحوی که از طریق استقرار یک بار مجازی بنام بار تصویری بتوان جسم هادی را حذف نمود و مسئله را تبدیل به فضای خالی از جسم هادی کرد تا براحتی بتوان پتانسیل را صرفاً با در نظر گرفتن بار اصلی (حقیقی) و بار مجازی (تصویری) محاسبه نمود. در این روش جسم هادی همانند یک سیستم آینه عمل کرده و تصویر بار حقیقی بصورت یک بار تصویری در مسئله ظاهر می شود.

مثال: بار نقطه ای در مقابل صفحه هادی بینهایت، زمین شده. صفحه در موقعیت z=۰ قرار دارد و بار نقطه ای +Q در نقطه $\left|\begin{matrix}0\\0\\d\end{matrix}\right.$



در ناحیه $z \le 0$:

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^z} = 0$$

اما با توجه به نامحدود بودن صفحه هادی و تقارن موجود

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

بنابراین:

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad V = c_1 z + c_2$$

اما:

$$V(z = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$V(z \to \infty) \neq \infty \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

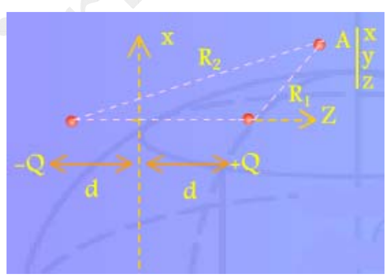
در نتیجه:

$$V\Big|_{z \le 0} = 0$$

پس جواب ناحیه $z \le 0$ مشخص است و روش تصاویر را صرفاً برای خارج از این ناحیه بکار می بریم اما در ناحیه z>۰:

چنانچه تصویر بار Q+ در صفحه هادی بینهایت بدست آوریم بار تصویری آن به میزان q=-Q و در موقعیت $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{vmatrix}$ مستقر می شود.

بنابراین با استقرار Q– در z=-d، جسم هادی را حذف می کنیم.



$$V(x,y,z) = \Big|_{z>0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{+Q}{R_1} + \frac{-Q}{R_2}\right]$$

اما

$$R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}$$

یعنی:

$$V\Big|_{z \ge 0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}}\right]$$

که معادله تأئید کننده حفظ شرایط مسئله در زمان قبل از حذف هادی و استقرار بار مجازی – Q می باشد چون:

V(z=۰)=۰

محاسبه شدت میدان

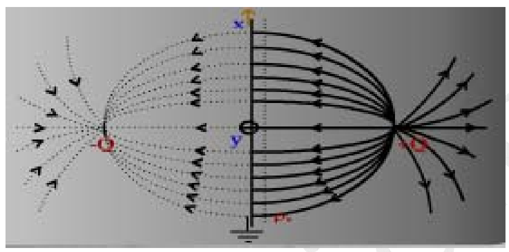
$$\vec{E}\Big|_{z>0} = -\nabla V = \left[\frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z\right]$$

برای تعیین چگالی بار سطحی القاء شده بر روی صفحه هادی

$$\rho_s = D_n\Big|_{Z=0} = \varepsilon_0 E_n = \varepsilon_0 E_z\Big|_{z=0}$$

$$E = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-2(z-d)}{2\left[x^2+y^2+(z-d)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{-2(z+d)}{2\left[x^2+y^2+(z+d)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$E_z\Big|_{Z=0} = \frac{+2Q}{4\pi\varepsilon_\circ\left[x^2+y^2+d^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{Qd}{2\pi\varepsilon_\circ\left(r^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$



بنابراین

$$\rho_s = -\frac{Qd}{2\pi\left(r^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$r = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_s \quad \text{is} \quad \max$$

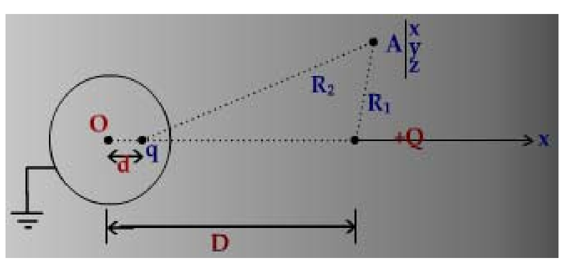
$$r \to \infty \quad \Rightarrow \quad \rho_s \to 0$$

کل بار توزیع شده روی صفحه هادی

$$q = \int \rho_s ds$$

$$q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{-Qd}{2\pi\left[r^2+d^2\right]^{\frac{3}{2}}} r dr d\varphi = -Q$$

مثال: بار نقطه ای در مقابل کره هادی زمین شده به شعاع a و به فاصله D از مرکز کره



موقعیت +Q در $\left|\begin{matrix}0\\0\\D\end{matrix}\right.$ مرکز کره در مبدأ مختصات قرار دارد.

برای حذف هادی باید باز تصویر q در موقعیت $\left|\begin{matrix}0\\0\\d\end{matrix}\right.$ در نظر گرفت به نحوی که

V(R=a)=۰

پتانسیل در ناحیه $R \le a$:

$$\nabla^2 V = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dV}{dR}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad V = -\frac{C_1}{R_1} + C_2$$

$$V(R=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$V(R=a) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

بنابراین:

$$V\big|_{R\le a} = 0$$

اما برای ناحیه R>a:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{R_1} + \frac{q}{R_2}\right]$$

$$R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-D)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}$$

$$V = \Big|_{R\ge a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-D)^2}} + \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-D)^2}}\right]$$

با توجه به آنکه باید V(R=a)=۰ شود بنابراین برای یافتن دو مجهول q و d با اعمال $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ در رابطه اخیر می توان q و d بقرار زیر بدست آورید:

$$d = \frac{a^2}{D} \quad , \quad q = -\frac{a}{D}Q$$

واضح است که

$$d = \frac{a^2}{D} < a$$

یعنی q در داخل کره مستقر است و

$$\frac{a}{D} < 1 \quad \Rightarrow \quad |q| < Q$$

یعنی بار تصویر از بار اصلی کوچکتر و مخالف علامت Q است.

نکته: می توان برای حل برخی از مسائل مشابه، از دیدگاه آینه ها و سیستم نوری بهره جست بعبارتی بارهای تصویری را از طریق سیستم آینه تعیین کرد و سپس هادی را حذف نمود و محیط را بدون اجسام هادی بررسی و پارامترها را بدست آورد.

مسائل مقدار مرزی Boundary value problems

در این قسمت به حل معادله لاپلاس از دیدگاه ریاضی یعنی حل معادله دیفرانسیل درجه ۲ همگن از طریق روش متغیر جدا (Separation variable) می پردازیم به این مفهوم که $\nabla^2 V$ که شامل مشتقات جزئی مرتبه دوم هر سه متغیر در هر دستگاه مختصات است را با در نظر گرفتن آنکه تابع مجهول V معادل حاصل ضرب سه تابع تک متغیره می باشد در صدد یافتن آنها

خواهیم شد. حل مسئله فوق در فضائی است که توزیع بار تنها روی سطوح (مرزهای) محدود کننده آن فضا قرار دارد و پتانسیل در ناحیه بدون بار صدق می کند.

بعنوان مثال در دستگاه مختصات مستطیلی

$$V(x,y,z)=?$$

$$\nabla^2 V=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

$$V(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z) \quad , \quad X(x)=? \quad , \quad Y(y)=? \quad , \quad Z(z)=?$$

با جایگزین V فوق در معادله لاپلاس

$$YZ\frac{d^2x(x)}{dx^2}+XZ\frac{d^2Y(y)}{dy}+XY\frac{d^2Z(z)}{dZ^2}=0$$

با تقسیم طرفین بر تابع XYZ که در کلیه نقاط فضای مورد نظر مخالف صفر است خواهیم داشت:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}=0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\text{مقدار ثابت} & =K_x^{\,2} \\ \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=\text{مقدار ثابت} & =K_y^{\,2} \\ \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\text{مقدار ثابت} & =K_z^{\,2} \end{cases}$$

با شرط: $K_x^{\,2}+K_y^{\,2}+K_z^{\,2}=0$

بسته به آنکه K^2ها مثبت، منفی و یا صفر باشند جوابهای هر یک از سه معادله دیفرانسیل درجه ۲ همگن تک متغیره بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{f(\alpha)}\frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2}=k_\alpha^{\,2} \qquad (\alpha=x,y,z \quad ; \quad X,Y,Z)$$

$$if \quad k_\alpha^{\,2}=0 \quad \Rightarrow \quad f(\alpha)=A\alpha+B$$

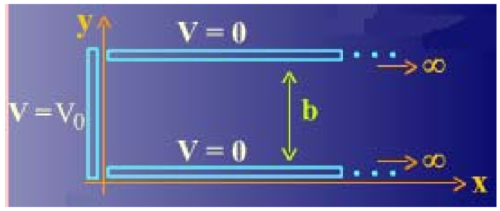
$$if \quad k_\alpha^{\,2}>0 \quad \Rightarrow \quad f(\alpha)=Ae^{k_\alpha\alpha}+Be^{-k_\alpha\alpha} \text{ یا } A\sinh(k_\alpha\alpha)+B\cosh(k_\alpha\alpha)$$

$$if \quad k_\alpha^{\,2}<0 \quad \Rightarrow \quad f(\alpha)=A\sin(k_\alpha\alpha)+B\cos(k_\alpha\alpha)$$

برای یافتن ضرائب ثابت از مقادیر (شرایط) مرزی هر جهت استفاده می شود بنابراین برای یک مسئله کامل سه بعدی با توجه به آنکه معادله دیفرانسیل درجه ۲ است نیازمند ٦ شرط مرزی خواهیم بود.

انتخاب هز یک از حالات فوق بستگی به ساختار مسئله باشد؛ چنانچه در پاسخ ها تکرار صفر در جهت خاصی وجود داشته باشد از توابع پریودیک استفاده می شود- چنانچه دامنه متغیر در جهتی نامحدود باشد استفاده از توابع نمائی مناسب تر خواهد بود.

مثال: شکل زیر سطح مقطع ساختاری متشکل از سه هادی (دو نیم صفحه بینهایت و موازی که در یک طرف آن هادی سوم قرار دارد) نشان می دهد (در جهت z نامحدودند) پتانسیل دو صفحه موازی صفر و پتانسیل صفحه کناری برابر V_0 است. مطلوبست توزیع پتانسیل در ناحیه محصور شده بوسیله صفحات.



$$\nabla^2 V = 0$$

چون در امتداد z سطوح هادی نامحدودند بنابراین V مستقل از Z است.

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad v(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\frac{1}{z}\frac{d^2 z}{dz^2} = 0 \quad (k_z = 0) \quad \Rightarrow \quad Z(z) = Az + B \quad \Rightarrow \quad Z = B \equiv 1$$

$$V(y=0) = V(y=b) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y=0) = Y(y=b) = 0$$

بنابراین در جهت y تابع پتانسیل پریودیک می باشد.

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{d^y(y)}{dy^2} = k_y^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y) = c\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)$$

$$Y(y=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0$$

$$Y(y=b) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y = c\sin(k_y b) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_y b = n\pi$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \qquad n = 1,2,3,...$$

اما

$$k_x^2 + k_y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_x^2 = -k_y^2$$

$$k_y^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad k_x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = E\sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + F\cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

یا:

$$X(x) = Ee^{\frac{n\pi}{b}x} + Fe^{-\frac{n\pi}{b}x}$$

$$X\big|_{x\to\infty} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0$$

بنابراین:

$$V(x,y,z) = BFCe^{-\frac{n\pi}{b}}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \equiv Ge^{-\frac{n\pi}{b}x}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

بدلیل خطی بودن معادلات دیفرانسیل، ترکیب خطی تمامی جوابها به ازاء nهای مختلف می تواند جواب V(x.y.z) باشد یعنی:

$$V(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi}{b}x}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

آخرین ضریب مجهول را با اعمال آخرین شرط مرزی بدست می آید:

$$V\big|_{x=0} = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^0 \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

ضرائب A_n ها از دو طریق قابل محاسبه هستند: سری فورید و استفاده از متعامد بودن توابع مثلثاتی یعنی:

$$\int_0^b \sin\frac{n\pi}{b}y\sin\frac{m\pi}{b}y dy = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ b/2 & m = n \end{cases}$$

بنابراین طرفین آخرین معادله را اگر در $\sin\frac{m\pi}{b}y$ ضرب نموده و انتگرال گرفته شود:

$$\int_0^b V_0 \sin\frac{m\pi}{b}y \quad dy = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^a \sin\frac{n\pi}{b}y \sin\frac{m\pi}{b}y \quad dy$$

طرف دوم تنها در حالت m=n مقدار غیر صفر دارد.

$$V_0\left(\frac{-b}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{b}y\right]_0^b = A_m\frac{b}{2}$$

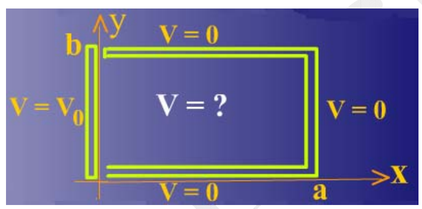
$$A_m = \frac{2V_0}{m\pi}[1-\cos]m\pi$$

$$A_m = \begin{cases} \dfrac{4V_0}{m\pi} & m\text{فرد} \\ 0 & m\text{زوج} \end{cases}$$

بنابراین:

$$V(x,y,z) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1\ \text{فرد}}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{b}x}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

مثال: چنانچه سطح مقطع ساختار مثال قبل در جهت x باشد مطلوبست محاسبه تابع پتانسیل در داخل فضای محصور شده چهار هادی فوق (در جهت z نامحدود است)



$$V(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$
$$K_z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z(z) = cte \equiv 1$$
$$Y(y=0) = Y(y=b) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y) = c\sin\frac{n\pi}{b}y \qquad K_y = \frac{n\pi}{b} \quad , \quad n = 1,2,3,\ldots$$
$$k_x^2 + k_y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = Ee^{k_y x} + Fe^{-k_y x}$$

یا:

$$X(x) = E\sinh(k_y x) + F\cosh(k_y x)$$
$$X(x=a) = 0 \quad \Rightarrow \quad E\sinh(k_y x) = -F\cosh(k_y a)$$
$$F = -E\frac{\sinh(k_y a)}{\cosh(k_y a)} \quad \Rightarrow \quad X(x) = P\sinh[k_y(x-a)]$$
$$V(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(x-a)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$
$$V(x=0) = V_0 \quad \Rightarrow \quad A_n = \begin{cases} -\dfrac{4V_0}{n\pi\sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)} & n\text{فرد} \\ 0 & n\text{زوج} \end{cases}$$

در مختصات استوانه ای:

$V(r,\varphi,z)\equiv R(r)\phi(\varphi)Z(z)$

توابع تک متغیره Z,ϕ,R بسته به ساختار مسئله و تقارن های موجود در آن بصورتهای زیر می توانند بدست آیند.

$$R(r):\begin{cases} r^{+n},r^{-n} \\ \ell nr \\ BesselFunctions: J_n(k_z r) \quad , \quad Y_n(k_z r) \end{cases}$$

$$\varphi(\varphi):\begin{cases} \sin n\varphi \quad , \quad cocn\varphi \\ e^{jn\varphi} \quad , \quad e^{-jn\varphi} \end{cases}$$

$$Z(z):\begin{cases} \sin(k_z z) \quad , \quad \cos(k_z z) \qquad \text{اگر } k_z^2<0 \\ e^{k_z z} \quad , \quad e^{-k_z z} \qquad \text{اگر } k_z^2>0 \end{cases}$$

n,k_z مربوط به معادلات دیفرانسیل درجه ۲ توابع تک متغیره بترتیب برای تابع z و تابع ϕ است.

در مختصات کروی:

$V(R,\theta,\varphi)=G(R)H(\theta)\phi(\varphi)$

حالات ممکنه:

$$G(R):\{R^m \quad , \quad R^{-(m+1)}$$
$$H(\theta):\{LegendreFunctions: P_m^n(\cos\theta) \quad , \quad Q_m^n(\cos\theta)$$
$$\phi(\varphi):\{\sin n\varphi \quad , \quad \cos n\varphi$$