جزوه

ریاضی مهندسی

دکتر کریمی

POWEREN.IR

به نام خدا

جزوه دست نویس ریاضیات مهندسی

استاد کریمی

تابستان ۹۰

توجه:

دقت و حساسیت در پاکنویس کردن دقیق جزوه پس از کلاس و با بکار گیری ویس در این جزوه قابل تحسین است، هر چند به دلیل حجم بالای این درس، با اینکه جزوه حجم زیادی دارد، همه بخش ها رو تحت پوشش قرار نداده و قسمتی از آن موجود نیست، سودمند و مفید خواهد بود.

ضمنا همانطور که ماهیت دروس ریاضی ایجاب می کند، با توجه به دست نویس بودن جزوه امکان خطای سهوی در حل جزئیاتی از مسائل میرود، این جزئیات همان قسمت هایی هستند که به دلیل بدیهی بودن، استاد از نوشتن آنها صرفنظر کرده و بعدا توسط دانشجو تکمیل شده، ذکر این نکته به جهت توجه بیشتر خواننده آمده و جای نگرانی چندانی در اصل کلی جزوه نیست.

با تشکر از آقای حبیب نژاد بابت نگارش جزوه

سری فوریه:

هدف از سری فوریه این است که ما بتوانیم تابع متناوب $f(x)$ را برحسب مجموعی از $\sin\frac{n\pi}{L}x$ ، $\cos\frac{n\pi}{L}x$ و عدد ثابت بنویسیم:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)\quad , \quad L=\frac{T}{2}$$

(تعامد توابع):

$$*\int_a^b f(x)g(x)=0 \longleftrightarrow$$ تابع f و g در بازه $[a\ ,\ b]$ متعامدند

$$*\int_a^b g_n(x)\,g_m(x)\,dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ (\|g_n(x)\|)^2 & m=n\end{cases}$$

نکته: $(\|g_n(x)\|)^2=\int_a^b (g_n(x))^2\,dx$

$$*\int_T \sin nx\,\sin mx\,dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \frac{T}{2} & m=n\end{cases}$$

نکته: $\int_0^T \sin^2 nx\,dx=\int_0^T\frac{1-\cos 2nx}{2}\,dx=\frac{T}{2}$

$$*\int_T \cos nx\,\cos mx\,dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \frac{T}{2} & m=n\end{cases}$$

«نکته مهم»: اگر تابع $f(x)$ دارای شرایط دیریکله باشد، آنگاه می‌توان تابع $f(x)$ را برحسب پایه متعامد $g_n(x)$ بسط داد، مطابق زیر:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,g_n(x)$$

$$a_n=\frac{1}{(\|g_n(x)\|)^2}\int_a^b f(x)\,g_n(x)\,dx$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right),\quad L=\frac{T}{2}$$

$$\int_T f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}T\longrightarrow a_0=\frac{2}{T}\int_T f(x)\,dx\longrightarrow \boxed{a_0=\frac{1}{L}\int_T f(x)\,dx}$$

$$a_n=\frac{1}{(\|g_n(x)\|)^2}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\longrightarrow a_n=\frac{2}{T}\int_T f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$\boxed{a_n=\frac{1}{L}\int_T f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx}$$

$$\boxed{b_n=\frac{1}{L}\int_T f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx}$$

"خلاصه"

سری فوریه

روابط 1

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)\\ a_0=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L}f(x)\,dx\\ a_n=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\\ b_n=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx\end{cases}$$

$y=\sin x$, $0\leq x\leq 2\pi$ $\longrightarrow$ نه فرد و نه زوج، متناوب نیست

$y=x$, $0<x<1$ $\longrightarrow$ نه فرد و نه زوج، متناوب نیست

$y=x-[x]$ $\longrightarrow$ نه فرد و نه زوج، $T=1$

$y=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi\\ -\cos x & -\pi<x<0\end{cases}$ $\longrightarrow$ فرد است - متناوب نیست

$f(x)=\begin{cases}1 & 0\leq x<1\\ -1 & -1<x<0\end{cases}$ $\longrightarrow$ نه فرد و نه زوج، متناوب نیست

$f(x)=e^{-x}$, $x>0$ $\longrightarrow$ نه فرد و نه زوج، متناوب نیست

- دوره تناوب

توابع را به ۳ گروه زیر می توان تقسیم کرد:

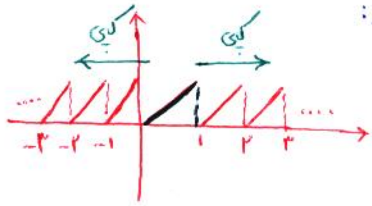
۱٪

(۱) توابعی که ذاتاً متناوب هستند ← $\sin x$ ، $\cos x$ ، $tg x$ و $x-[x]$ → یعنی به شرطی که با دورهٔ تناوب محدود نشوند.
→ فرم کلی سری فوریه با هر دوره تناوب تغییر نمی کند.

۹۹٪

(۲) توابعی که ذاتاً متناوب نیستند امّا می توان آنها را بصورت تصنعی متناوب کرد:

مثال: $y = x$ ، $0 < x < 1$ $\xrightarrow{T=1}$

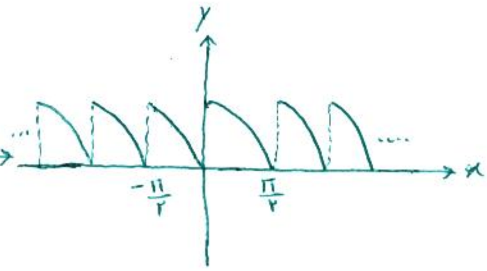


$f(x+1) = f(x)$

* توسط دوره تناوب به صورت تصنعی متناوب شده اند.

* تمام توابعی که در بازهٔ محدود $[a, b]$ تعریف شده باشند، ذاتاً متناوب نیستند امّا می توان آنها را به صورت تصنعی متناوب کرد:

مثال: $y = \cos x$ ، $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\xrightarrow{T=\frac{\pi}{2}}$



$f(x+\frac{\pi}{2}) = f(x)$

(۳) توابعی که ذاتاً متناوب نیستند و بصورت تصنعی هم نمی توان آنها را متناوب کرد:

مثال: $y = x$ ، $y = e^{x}$ و $y = e^{-x}$ و ....

* همان گروه (۲) است ولی در اینجا دوره تناوب برای آنها تعریف نشده است ← یعنی توسط دورهٔ تناوب به صورت تصنعی متناوب نشده اند.

* توابع این گروه سری فوریه ندارند، چون متناوب نیستند.

- حدود انتگرال

فرد باشد $f(x) \longrightarrow \int_{a \text{ یا } -L}^{b \text{ یا } L} f(x)\,dx = 0$

زوج باشد $f(x) \longrightarrow \int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx$

$f(x)$ فرد باشد.

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)}_{\text{فرد}}\, dx = 0 \\ a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \overbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{فرد}} \underbrace{\cos \frac{n\pi}{L}x}_{\text{زوج}}}^{\text{فرد}}\, dx = 0 \\ b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \overbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{فرد}} \underbrace{\sin \frac{n\pi}{L}x}_{\text{فرد}}}^{\text{زوج}}\, dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x\, dx \\ \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L}x \end{cases}$$

$f(x)$ زوج باشد.

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\, dx \\ a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L}x\, dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L}x\, dx \\ b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x\, dx = 0 \\ \Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L}x \end{cases}$$

"خلاصه" : $f(x)$

روابط $\boxed{2}$

فرد:
- $a_0 = a_n = 0$
- $b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x\, dx$

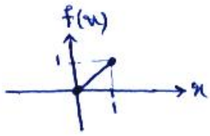
$\longrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L}x$

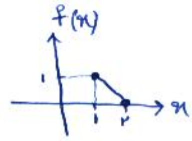
زوج:
- $b_n = 0$
- $a_0 = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\, dx$ و $a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L}x\, dx$

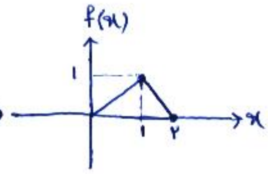
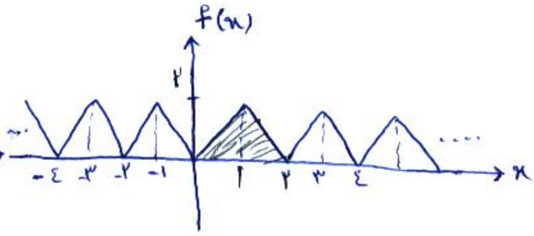
$\longrightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L}x$

نتیجه: قبل از حل سری فوریه، ابتدا با رسم سری فوریه تابع و پی بردن به زوج یا فرد بودن تابع، ۷۰٪ مراحل حل تست را کم می کنیم.

مثال $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 2-x & 1<x<2 \end{cases}$

$\underset{0<x<1}{f(x)=x} \rightarrow \begin{matrix} x=0 \rightarrow f(x)=0 \\ x=1 \rightarrow f(x)=1 \end{matrix} \rightarrow$ 

$\underset{1<x<2}{f(x)=2-x} \rightarrow \begin{matrix} x=1 \rightarrow f(x)=1 \\ x=2 \rightarrow f(x)=0 \end{matrix} \rightarrow$ 

$\Rightarrow$  $\xrightarrow{\text{سری فوریه}}$  $\Rightarrow$ $b_n=0$ ← تابع زوج است

$\begin{matrix} T=2 \\ T=2L \end{matrix} \rightarrow L=1$

$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx=\frac{2}{1}\int_0^1 x\,dx=2\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1=2\left(\frac{1}{2}\right)=1 \xrightarrow{\text{یا}} a_0=\frac{\text{مساحت زیر یک دوره}}{T}=\frac{\frac{1}{2}*2*2}{2}=1$

$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{2}{1}\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx=2\left(\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right)_0^1$

$$\begin{array}{ccc} x & \oplus & \cos n\pi x \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x \\ \downarrow & \ominus & \downarrow \\ 0 & & \frac{-1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x \end{array}$$

$=2\left(\frac{1}{n\pi}\cancel{\sin n\pi}+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{1}{n^2\pi^2}\right)=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)$

0

$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$

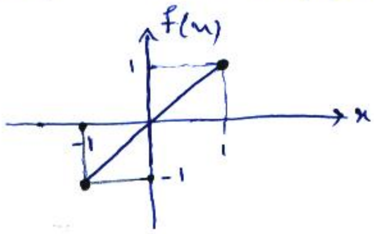
به ازای n های زوج $\rightarrow f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-1)}{4n^2\pi^2}\cos n\pi x \rightarrow f(x)=\frac{1}{2}$

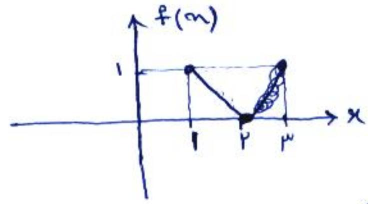
به ازای n های فرد $\rightarrow f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1-1)}{(2n-1)^2\pi^2}\cos n\pi x \rightarrow f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos n\pi x$

مثال $f(x)=\begin{cases} x & -1<x<1 \\ 2-x & 1<x<3 \end{cases}$

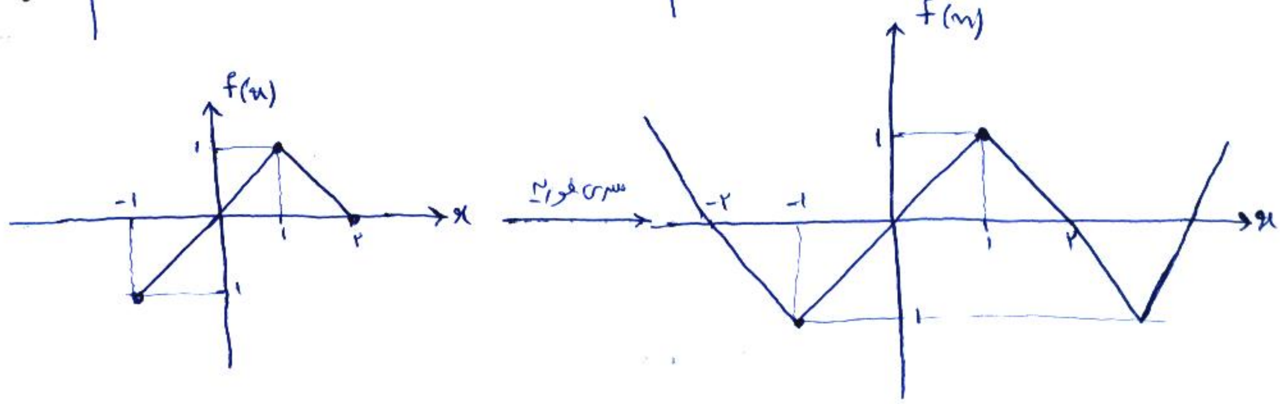
حل: $f(x)=x$, $-1<x<1 \longrightarrow$ $x=-1\to f(x)=-1$, $x=1\to f(x)=-1$

$f(x)=2-x$, $1<x<3 \longrightarrow$ $x=1\to f(x)=1$, $x=3\to f(x)=0$





$\Longrightarrow$



$T=2$

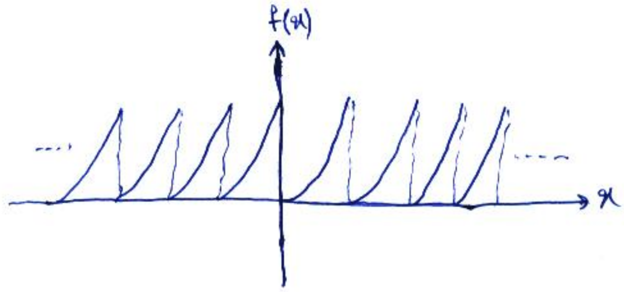
$T=2L \longrightarrow L=1$

$\Longrightarrow$ تابع فرد است $\begin{cases} a_0=0 \\ a_n=0 \end{cases}$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{2}{1}\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx$$

مثال: $f(x)=x^2$

$0<x<1$



$\Longrightarrow$ نه فرد و نه زوج $\begin{cases} a_0 ✓ \\ a_n ✓ \\ b_n ✓ \end{cases}$

برای آنهایی که نه فرد و نه زوج هستند، بهترین ترفند برای انتخاب دوره تناوب حدود انتگرال، همان چیزی است که خودش داده $\Leftarrow$ $T=1$, $T=2L$ $\longrightarrow L=\frac{1}{2}$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1 x^2\,dx=2\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1 x^2\cos 2n\pi x\,dx=2\int_0^1 x^2\cos 2n\pi x\,dx$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & & \cos 2n\pi x \\ \downarrow & \oplus & \downarrow \\ 2x & & \frac{1}{2n\pi}\sin 2n\pi x \\ \downarrow & \ominus & \downarrow \\ 2 & & \frac{-1}{4n^2\pi^2}\cos 2n\pi x \\ \downarrow & \oplus & \downarrow \\ 0 & & \frac{-1}{8n^3\pi^3}\sin 2n\pi x \end{array}$$

$$=2\left(\cancel{\frac{x^2}{2n\pi}\sin 2n\pi x}+\frac{2x}{4n^2\pi^2}\cos 2n\pi x-\cancel{\frac{2}{8n^3\pi^3}\sin 2n\pi x}\right)\Big|_0^1$$

$$=2\left(\frac{2}{4n^2\pi^2}\underbrace{\cos 2n\pi}_{+1}\right)=\frac{4}{4n^2\pi^2}\left((+1)\right)=\frac{+1}{n^2\pi^2}$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1 x^2\sin 2n\pi x\,dx=2\left(\frac{-x^2}{2n\pi}\cos 2n\pi x-\frac{2x}{4n^2\pi^2}\sin 2n\pi x+\frac{2}{8n^3\pi^3}\cos 2n\pi x\right)\Big|_0^1$$

$$\begin{array}{ll} x^2 & \sin 2n\pi x \\ 2x & \frac{-1}{2n\pi}\cos 2n\pi x \\ 2 & \frac{-1}{4n^2\pi^2}\sin 2n\pi x \\ 0 & \frac{1}{8n^3\pi^3}\cos 2n\pi x \end{array}$$

$$=2\left(\frac{-1}{2n\pi}\underbrace{\cos 2n\pi}_{+1}+\frac{2}{8n^3\pi^3}\underbrace{\cos 2n\pi}_{+1}-\frac{2}{8n^3\pi^3}\right)=\frac{-1}{n\pi}(+1)+\frac{1}{2n^3\pi^3}(+1)-\frac{1}{4n^3\pi^3}=\frac{-1}{n\pi}+\cancel{\frac{1}{2n^3\pi^3}}-\cancel{\frac{1}{2n^3\pi^3}}$$

$$=\frac{-1}{n\pi}-\frac{1}{n^3\pi^3}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{+1}{n^2\pi^2}\cos 2n\pi x+\left(\frac{-1}{n\pi}\sin 2n\pi x\right)\right)$$

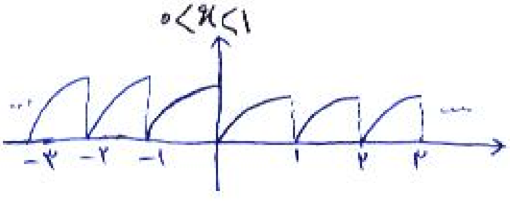
روش محاسبه سری فوریه یک تابع:

① تشخیص دوره تناوب

② تشخیص حدود انتگرال ← بررسی کردن زوج یا فرد بودن بسط فوریه ← روابط $\boxed{2}$

← اگر بسط فوریه نه فرد و نه زوج باشد ← بازه را همان بازه تعریف شده تابع در نظر گیریم ← روابط $\boxed{1}$

مثال: $y=\sin x$



$\Rightarrow$ نه فرد و نه زوج $\rightarrow T=1 \rightarrow L=\frac{1}{2}$

$T=2L$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\sin x\,dx=2\left(-\cos x\right)\Big|_0^1=-2(\cos 1-1)=2(1-\cos 1)$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\sin x\cos 2n\pi x\,dx=2\int_0^1\frac{1}{2}\left[\sin(1+2n\pi)x+\sin(1-2n\pi)x\right]dx$$

$$=\int_0^1\sin(1+2n\pi)x\,dx+\int_0^1\sin(1-2n\pi)x\,dx=\frac{-1}{1+2n\pi}\cos(1+2n\pi)x-\frac{1}{1-2n\pi}\cos(1-2n\pi)x\Big|_0^1$$

$$= \frac{-1}{1+2n\pi}\cos(1+2n\pi) - \frac{1}{1-2n\pi}\cos(1-2n\pi) + \frac{1}{1+2n\pi} + \frac{1}{1-2n\pi}$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta \to \cos(1+2n\pi)=\cos1\underbrace{\cos2n\pi}_{+1}-\sin1\underbrace{\cancel{\sin2n\pi}}_{0}=+\cos1$$

$$\cos(1-2n\pi)=\cos1\underbrace{\cos2n\pi}_{+1}+\sin1\underbrace{\cancel{\sin2n\pi}}_{0}=+\cos1$$

$$= \frac{-1}{1+2n\pi}(+\cos1) - \frac{1}{1-2n\pi}(+\cos1) + \frac{1}{1+2n\pi} + \frac{1}{1-2n\pi}$$

$$= \frac{-\cos1}{1+2n\pi} - \frac{\cos1}{1-2n\pi} + \frac{1}{1+2n\pi} + \frac{1}{1-2n\pi} = \frac{1}{1+2n\pi}(-\cos1+1) + \frac{1}{1-2n\pi}(-\cos1+1) = \frac{-\cos1+1}{1+2n\pi} + \frac{-\cos1+1}{1-2n\pi}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{-\cos1+1}{1+2n\pi} + \frac{-\cos1+1}{1-2n\pi} = \frac{2(1-\cos1)}{1-4n^2\pi^2}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1 \sin x\sin2n\pi x\,dx = \int_0^1\left[\cos(1-2n\pi)x-\cos(1+2n\pi)x\right]dx$$

$$= \int_0^1\cos(1-2n\pi)x\,dx - \int_0^1\cos(1+2n\pi)x\,dx = \frac{1}{1-2n\pi}\sin(1-2n\pi)x - \frac{1}{1+2n\pi}\sin(1+2n\pi)x\Big|_0^1$$

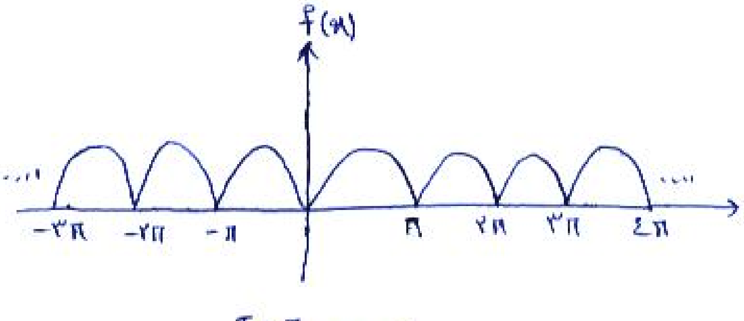
$$= \frac{1}{1-2n\pi}\sin(1-2n\pi) - \frac{1}{1+2n\pi}\sin(1+2n\pi) = \frac{1}{1-2n\pi}\Big(\sin1\underbrace{\cos2n\pi}_{+1}-\cos1\underbrace{\cancel{\sin2n\pi}}_{0}\Big) - \frac{1}{1+2n\pi}\Big(\sin1\underbrace{\cos2n\pi}_{+1}+\cos1\underbrace{\cancel{\sin2n\pi}}_{0}\Big)$$

$$= \frac{+\sin1}{1-2n\pi} - \frac{\sin1}{1+2n\pi} = \frac{4n\pi\sin1}{1-4n^2\pi^2} \quad ?$$

$$\Rightarrow f(x) = 1-\cos1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(1-\cos1)}{1-4n^2\pi^2}\cos2n\pi x + \frac{4n\pi\sin1}{1-4n^2\pi^2}\sin2n\pi x\right]$$

مثال) $y=\sin x$

$0<x<\pi$



$\Rightarrow$ زوج $\to b_n = 0$

$$T=\pi,\quad T=2L \to L=\frac{\pi}{2}$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx = \frac{4}{\pi}(-\cos x)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-4}{\pi}\Big(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}-\underbrace{\cos0}_{1}\Big) = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^{\frac{\pi}{2}=L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos 2nx\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos 2nx\,dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left[\sin(1+2n)x+\sin(1-2n)x\right]dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{1+2n}\cos(1+2n)x-\frac{1}{1-2n}\cos(1-2n)x\right)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{1+2n}\cancel{\cos(1+2n)\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{1-2n}\cancel{\cos(1-2n)\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{1+2n}+\frac{1}{1-2n}\right)$$

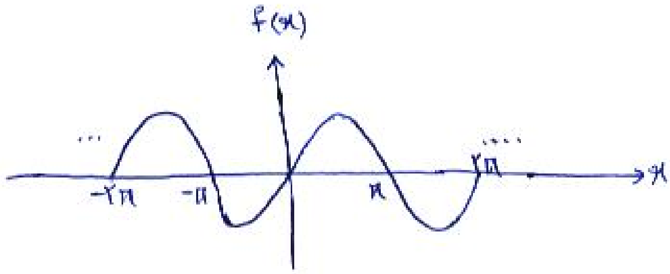
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm n\pi\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos n\pi-\sin\frac{\pi}{2}\overset{0}{\sin n\pi}=0$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+2n}+\frac{1}{1-2n}\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-2n+1+2n}{(1+2n)(1-2n)}\right)=\frac{4}{(1-4n^2)\pi}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{(1-4n^2)\pi}\cos 2nx\right]$$

$y=\sin x$ (شکل

$0<x<2\pi$



$\Rightarrow$ فرد $\begin{cases} a_0=0 \\ a_n=0 \end{cases}$

$T=2\pi$
$T=2L \rightarrow L=\pi$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left[\cos(1-n)x-\cos(1+n)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1-n}\sin(1-n)x-\frac{1}{1+n}\sin(1+n)x\right)_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1-n}\underbrace{\cancel{\sin(1-n)\pi}}_{\sin\pi\cos n\pi-\cos\pi\sin n\pi=0}-\frac{1}{1+n}\underbrace{\cancel{\sin(1+n)\pi}}_{\sin\pi\cos n\pi+\cos\pi\sin n\pi=0}-0\right)$$

$$\Rightarrow b_n=0\xrightarrow[\text{که}]{\text{زمانی}} n\neq 1$$

چون: $\int_T \sin ax\sin bx\,dx=\begin{cases}0 & a\neq b\\ \frac{T}{2} & a=b\end{cases}$ $\qquad \int_0^L \sin ax\sin bx\,dx=\begin{cases}0 \rightarrow a\neq b\\ \frac{L}{2}\rightarrow a=b\end{cases}$

پس: $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin nx\,dx=\begin{cases}0 & 1\neq n\ (n\neq 1)\\ + & n=1\end{cases}$ اثبات $\Rightarrow b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}(\sin 2x)\right)_0^{\pi} *$$

ثابت $\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

$$* b_1=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{\sin 2\pi}{4}-0+\frac{\sin 0}{4}\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ $\xrightarrow{n\neq 1} b_n=0 \longrightarrow f(x)=0$

$\xrightarrow{n=1} b_1=1 \longrightarrow f(x)=\sin x \Rightarrow$ پس سری فوریه $\sin x$ برابر خودش است!

مثال) $f(x)=x^7+9x^6+5x^3+2x^2+7x+3$

روش اول ← بسط مک لورن: $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)x}{1!}+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\frac{f'''(0)x^3}{3!}+\dots$

روش دوم ← بسط مک لورن، تابع را به ترتیب می نویسد، پس دلیلی ندارد که از این بسط استفاده کنیم. چون خودش به ترتیب نوشته شده است.

وقتی که تعداد ضرائب محدود باشد. $\rightarrow y=\sin x$ ، $0<x<2\pi$ $\xrightarrow{\text{مجموع}}$ عدد ثابت، $\sin nx$، $\cos nx$ $\Rightarrow$ چون خودش به ترتیب نوشته است، پس سری فوریه اش خودش می شود.

مثال) $y=\cos^2 x$

$0<x<2\pi$

$T=2\pi$
$T=2L \rightarrow L=\pi$ $\quad \frac{n\pi}{L}x=\frac{n\pi}{\pi}x=nx$

$y=f(x)=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$

- عدد ثابت $\rightarrow \frac{a_0}{2}=\frac{1}{2}$
- $a_n\cos nx \rightarrow \frac{1}{2}\cos 2x$ → $a_n=\frac{1}{2}$، $n=2 \rightarrow a_2=\frac{1}{2}$
- $b_n \sin nx \rightarrow$ صفر → $b_n=0$، $\sin nx=0$

مثال) ← بسط فوریه تابع $(\sin x+\cos 2x)^2$

$T=2\pi$

$b_3=?$

$T=2\pi$
$T=2L \rightarrow L=\pi \Rightarrow \frac{n\pi}{L}x=nx$

حل) $f(x)=(\sin x+\cos 2x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos 2x+\cos^2 2x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}+2\sin x\cos 2x+\dfrac{1+\cos 4x}{2}$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x+2\sin x\cos 2x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 4x=1-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\underbrace{2\sin x\cos 2x}+\dfrac{1}{2}\cos 4x+\dfrac{1}{2}$

$2\sin x\cos 2x=2\left[\dfrac{1}{2}[\sin 3x+\sin(-x)]\right]=\sin 3x-\sin x$ nx

$=1-\underset{②}{\dfrac{1}{2}\cos 2x}+\underset{③}{\sin 3x}-\underset{①}{\sin x}+\underset{④}{\dfrac{1}{2}\cos 4x}+\underset{⓪}{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}-\sin x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\sin 3x+\dfrac{1}{2}\cos 4x$

$n=1$ $n=2$ $n=3$ $n=4$

$\dfrac{a_0}{2}=\dfrac{3}{2}$ $b_1=-1$ $a_2=\dfrac{-1}{2}$ $b_3=1$ $a_4=\dfrac{1}{2}$

مثال) بسط فوریه $\rightarrow f(x)=\cos^2 x$

$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$

حل) $T=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}=\pi$, $T=2L \rightarrow L=\dfrac{\pi}{2}$ و تابع زوج است $\dfrac{n\pi}{L}x=\dfrac{n\pi}{\frac{\pi}{2}}x=\dfrac{2n\pi}{\pi}x=2nx$

$f(x)=\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x \rightarrow \dfrac{a_0}{2}=\dfrac{1}{2}$

$a_n\cos\dfrac{n\pi}{L}x \Rightarrow a_n\cos\dfrac{n\pi}{\frac{\pi}{2}}x \Rightarrow a_n\cos\dfrac{2n\pi}{\pi}x \Rightarrow a_n\cos 2nx$

$2nx$

$\rightarrow a_n\cos 2nx=\dfrac{1}{2}\cos 2x \Rightarrow a_1=\dfrac{1}{2}$, $n=1$

مثال) $f(t)=\sin^2 t\cos 2t$

$T=2\pi$

حل) $T=2\pi$, $T=2L \rightarrow L=\pi \rightarrow$ $a_n\cos\dfrac{n\pi}{L}x=a_n\cos nx$, $b_n\sin\dfrac{n\pi}{L}x=b_n\sin nx$

$f(t)=\dfrac{1-\cos 2t}{2}\cos 2t=\dfrac{\cos 2t-\cos^2 2t}{2}=\dfrac{1}{2}\cos 2t-\dfrac{1}{2}\cos^2 2t=\dfrac{1}{2}\cos 2t-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1+\cos 4t}{2}\right)$

nx

$=\dfrac{1}{2}\cos 2t-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 4t\right)=\dfrac{1}{2}\cos 2t-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\cos 4t=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\cos 2t-\dfrac{1}{4}\cos 4t$

$n=2$ $n=4$

$\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{a_0}{2}=\dfrac{-1}{4} \longrightarrow a_0=\dfrac{-1}{2}\\ n=2 \rightarrow a_2=\dfrac{1}{2}\\ n=4 \rightarrow a_4=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$

مثال) تابع سری فوریه $\rightarrow f(x)=4\sin x\cos^2 x$

حل) چون دوره تناوب را نداده $\rightarrow$ ذاتاً متناوب است $\rightarrow \begin{matrix} T=2\pi \\ T=2L \end{matrix} \rightarrow L=\pi \rightarrow \begin{cases} a_n\cos\frac{n\pi}{L}x \rightarrow a_n\cos nx \\ b_n\sin\frac{n\pi}{L}x \rightarrow b_n\sin nx \end{cases}$

$$f(x)=4\sin x\,\frac{1+\cos 2x}{2}=4\sin x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)=2\sin x+2\sin x\cos 2x$$

$$=2\sin x+2\left(\frac{1}{2}[\sin 3x-\sin x]\right)=2\sin x+\sin 3x-\sin x=\underbrace{\sin x}_{n=1}+\underbrace{\sin 3x}_{n=3}$$

nx

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{a_0}{2}=0 \\ n=1\rightarrow b_1=1 \\ n=3\rightarrow b_3=3 \end{cases}$$

مثال ص ۹۳) تست ۱۵

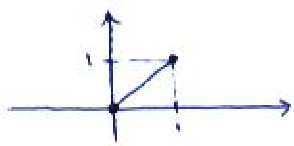
$$f(t)=\begin{cases} t & 0\le t<1 \\ 2-t & 1\le t<2 \end{cases}$$

$$f(t+2)=f(t)$$

$f(t)$ سری فوریه $=?$

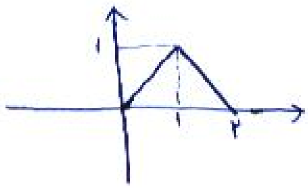
$f(t)=t$, $0\le t<1$ $\rightarrow$ $t=0\rightarrow f(t)=0$, $t=1\rightarrow f(t)=1$

$f(t)=2-t$, $1\le t<2$ $\rightarrow$ $t=1\rightarrow f(t)=1$, $t=2\rightarrow f(t)=0$

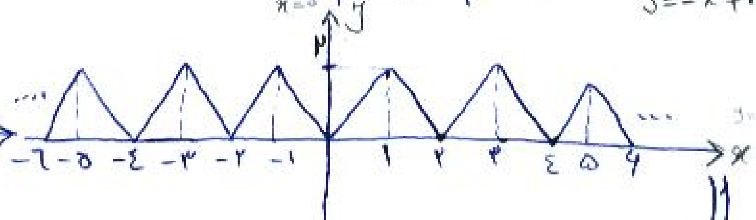


$y=-x+2 \begin{cases} x=0\rightarrow y=2 \\ y=0\rightarrow x=2 \end{cases}$

$\Rightarrow$



$\xrightarrow{\text{سری فوریه}}$



$\Downarrow$

تابع زوج

$b_n=0$ ضریب جملات sin را نداریم.

$\begin{matrix} T=2 \\ T=2L \end{matrix} \rightarrow L=1$

$$\frac{a_0}{\cancel{2}}=\frac{\text{مساحت در یک دوره تناوب}}{T}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}*2*3}{2}=1$$

$$\underrightarrow{OR},\ a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx=\frac{2}{1}\int_0^1 t\,dt=2\left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1=2\left(\frac{1}{2}\right)=1\rightarrow\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2}{1}\int_0^1 t\cos n\pi t\,dt = 2\left(\frac{t}{n\pi}\sin n\pi t + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi t\right)\Bigg|_0^1$$

$$\begin{array}{ccc} t & & \cos n\pi t \\ \downarrow & \overset{+}{\searrow} & \downarrow \\ 1 & & \frac{1}{n\pi}\sin n\pi t \\ \downarrow & \overset{-}{\searrow} & \downarrow \\ 0 & & \frac{-1}{n^2\pi^2}\cos n\pi t \end{array}$$

$$= 2\left(\frac{1}{n\pi}\underbrace{\cancel{\sin n\pi}}_{0} + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2\pi^2}\right) = 2\left(\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2\pi^2}\right) = \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}(\overset{2K \to 1,\ 2K-1 \to -1}{\cos n\pi} - 1)\cos n\pi t = \begin{cases} n=2K \to f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4K^2\pi^2}(1-1) \to f(x) = \frac{1}{2} \\ n=2K-1 \to f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2K-1)^2\pi^2}(-1-1)\cos(2K-1)\pi t \end{cases}$$

$$\to f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{K=1}^{\infty}\frac{-4}{(2K-1)^2\pi^2}\cos(2K-1)\pi t$$

$$\to f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{K=1}^{\infty}\frac{4}{(2K-1)^2\pi^2}\cos(2K-1)\pi t$$

نکته مهم: ① قرینه نیم پریود اول را نسبت به $\frac{a_0}{2}$ درست بیار.

② به اندازه نیم پریود به سمت راست جابجا کن.

③ اگر بر نیم پریود دوم منطبق شد ← بسط فوریه فقط هارمونیک های فرد دارد

$a_{2K} = 0$ و $a_{2K-1} \neq 0$

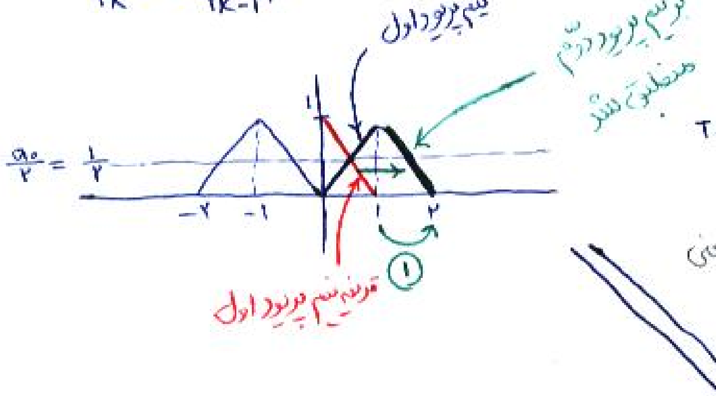
$a_n = a_1, a_3, a_5, \ldots$

$b_n = b_1, b_3, b_5, \ldots$

$b_{2K} = 0$ و $b_{2K-1} \neq 0$

داریم: $a_1, a_3, \ldots$ / $b_1, b_3, \ldots$

نداریم: $a_2, a_4, \ldots$ / $b_2, b_4, \ldots$



روش تستی سوال قبل:

$T = 2 \xrightarrow[\text{پریود}]{\text{نیم}}$ ①

چون منطبق شد، فقط a_{2n-1} و b_{2n-1} داریم که

بدلیل زوج بودن تابع b صفر می شود و در نهایت فقط a_{2n-1} خواهیم داشت، یعنی

در گزینه ها باید $2n-1$ داشته باشیم که فقط در گزینه (۲) آمده است.

فقط هارمونیک های فرد دارد $\begin{cases} a_{2K} = 0 \\ a_{2K-1} \neq 0 \end{cases}$

$n = 2K-1$

فقط cos دارد

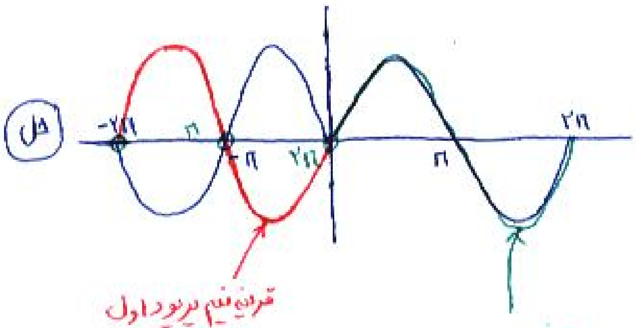
سؤال ۶۰ ص ۹۵:

یا ص ۱۶

هرگاه $f(x)=\begin{cases}\sin & 0<x<2\pi \\ -\sin x & -2\pi<x<0\end{cases}$ و $f(x+4\pi)=f(x)$ آنگاه در سری فوریه $f(x)$ فقط ضرایب جملات زیر ممکن است غیر صفر باشند: ۱) زوج کسینوسی ۲) فرد کسینوسی ۳) زوج سینوسی ۴) فرد سینوسی

$T=4\pi \xrightarrow[\text{پریود}]{\text{نیم}} 2\pi$

حل



$\xrightarrow{\text{زوج}} a_0=\frac{2}{L}\int_a^L f(x)\,dx=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=0$

$T=4\pi$
$T=2L \rightarrow L=\cancel{4}\pi$

$OR:\ a_0=\frac{\text{مساحت در یک دوره}}{T}=\frac{0}{4\pi}=0$

*منطبق شد پس a_{2n-1} و b_{2n-1} صفر نیستند. اما بدلیل اینکه تابع $f(x)$ زوج است، $b_n=0$ های شود و b_{2n-1} کنار می رود و فقط a_{2n-1} می ماند. که فرد کسینوسی است. گزینه «۲» صحیح است.

فقط هارمونیک های فرد دارد $\begin{cases} a_{2k}=0 \\ a_{2k-1}\neq 0\end{cases}$

$n=2k-1$

فقط cos دارد

(برق ۷۷) ← ص ۱۵:

ص ۹۴ تست ۶۶

$$f(t)=\begin{cases}-t-3 & -3\leq t\leq -2 \\ -1 & -2\leq t\leq -1 \\ t & -1\leq t\leq 1 \\ 1 & 1\leq t\leq 2 \\ -t+3 & 2\leq t\leq 3\end{cases}$$

۳ تا ضرایب غیر صفر فقط عبارتند از:

① a_n و n فرد ③ b_n و n زوج

② a_n و n زوج ④ b_n و n فرد

$\begin{cases}f(t)=-t-3 \\ -3\leq t\leq -2\end{cases} \rightarrow$ $t=-3 \rightarrow f(t)=0$, $t=-2 \rightarrow f(t)=-1$

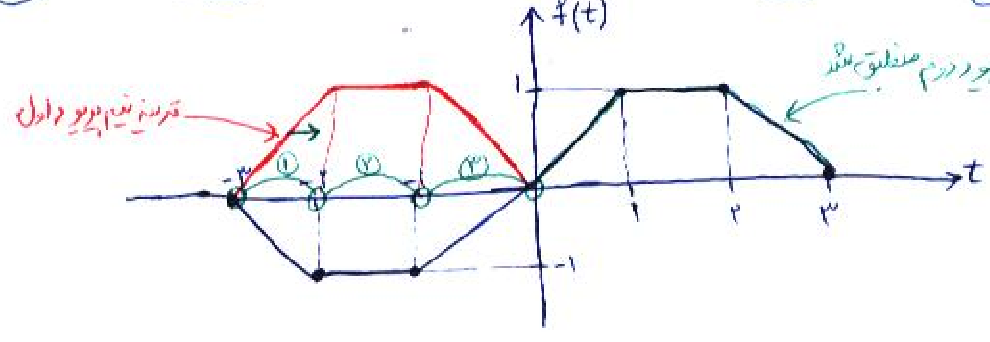
منطبق شد پس a_{2n-1} و b_{2n-1} غیر صفر هستند. اما بدلیل اینکه $f(t)$ فرد است، $a_0=a_n=0$ می باشد و a_{2n-1} کنار می رود و فقط b_{2n-1} می ماند. گزینه «۴»

$\begin{cases}f(t)=-1 \\ -2\leq t\leq -1\end{cases}$

$\begin{cases}f(t)=t \\ -1\leq t\leq 1\end{cases} \rightarrow$ $t=-1 \rightarrow f(t)=-1$, $t=1 \rightarrow f(t)=1$

$\begin{cases}f(t)=1 \\ 1\leq t\leq 2\end{cases}$

$\begin{cases}f(t)=3-t \\ 2\leq t\leq 3\end{cases} \rightarrow$ $t=2 \rightarrow f(t)=1$, $t=3 \rightarrow f(t)=0$



n فرد داریم

$\xrightarrow{\text{فرد}} a_0=a_n=0 \rightarrow$ غیر صفر b_n

$T=6 \xrightarrow[\text{پریود}]{\text{نیم}} 3$

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\leq x\leq L \\ 2L-x & L<x\leq 2L \end{cases}$$

$T=2L$

گرایش برق ۸۳):

ص ۱۷

① $a_K=0$ که در آن $K=0,1,2,\dots$

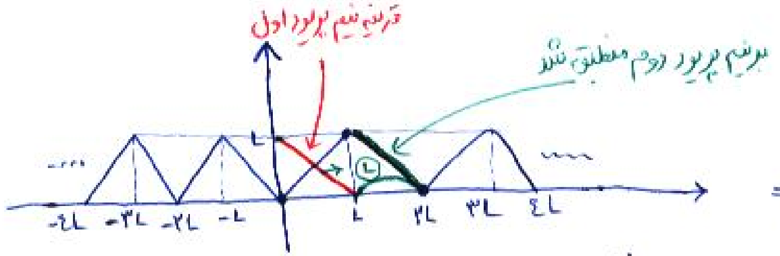
② $a_{2K}=0$ و $b_n=0$ بازای $K,n\in N$

③ $a_{2K-1}=0$ و $b_n=0$ بازای $K,n\in N$

④ $b_n=0$ و $a_K\neq 0$ بازای هر $n\in N$ و هر $K=0,1,2,\dots$

حل) $f(x)=x$, $0\leq x\leq L$ $\longrightarrow$ $x=0\to f(x)=0$, $x=L\to f(x)=L$

$f(x)=2L-x$, $L<x\leq 2L$ $\longrightarrow$ $x=L\to f(x)=L$, $x=2L\to f(x)=0$



$\Rightarrow$ زوج $b_n=0$

منطبق شد: $a_{2K-1}\longrightarrow \checkmark$ ، $b_{2K-1}\xrightarrow{\text{زوج}} \times$

$T=2L \xrightarrow[\text{پریود}]{\text{نیم}} L$

$b_n=0$ و $a_{2K-1}\neq 0$ $\Leftarrow$

$a_{2K-1}\neq 0$

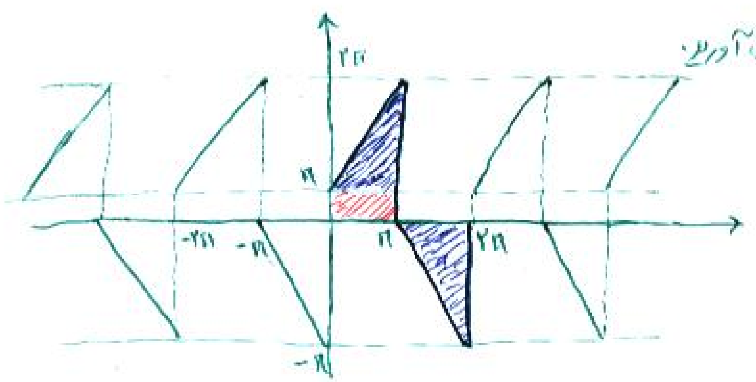
یعنی فقط و فقط a_{2K-1} داریم و لاغیر $a_{2K}=0$

$n=2K-1$

فقط ضریب cos دارد. «a»

گزینه های ③ و ④ کاملاً غلط هستند. از بین گزینه‌ها ① و ② ، گزینه «۲» صحیح تر است.

مثال) اگر ادامه دوره تناوب تابع $f(x)$ به شکل زیر باشد، مقدار ثابت فوریه را بدست آورید.



حل) $$\frac{a_0}{2}=\frac{\text{مساحت در یک دوره تناوب}}{T}=\frac{\overset{\text{آبی}}{(\frac{1}{2}\times\pi\times\pi)}+\overset{\text{آبی}}{(\frac{1}{2}\times-\pi\times\pi)}+\overset{\text{قرمز}}{(\pi\times\pi)}}{2\pi}=\frac{\pi^2}{2\pi}=\frac{\pi}{2}$$

☑ **بسط نیم دامنه**: تابعی که در نیم دامنه تعریف می‌شود و بقیه را می‌توان با سینوسی یا کسینوسی بودن (یا زوج و فرد بودن) رسم کرد. یعنی نصف اش را خودش می‌گوید و نصف دیگر را ما می‌کشیم.

زمانی نیم دامنه است که
- بازه داده باشد.
- زوج و فرد بودن را مشخص کرده باشد.

مثال) بسط سینوسی تابع $f(x)=\cos x$ را بدست آورید.
$0<x<\pi$

حل) چون خودش گفته بسط سینوسی
- $L=\pi$
- فرد است $\rightarrow a_0=a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi\frac{1}{2}\left[\sin(1-n)x+\sin(1+n)x\right]\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-1}{1-n}\cos(1-n)x-\frac{1}{1+n}\cos(1+n)x\right)_0^\pi=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-1}{1-n}\underbrace{\cos(1-n)\pi}_{\underbrace{\cos\pi}_{-1}\cos n\pi+\underbrace{\sin\pi}_{0}\sin n\pi}-\frac{1}{1+n}\cos(1+n)\pi+\frac{1}{1-n}+\frac{1}{1+n}\right)$$

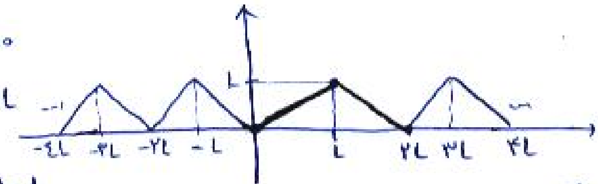
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-1}{1-n}(+\cos n\pi)-\frac{1}{1+n}(+\cos n\pi)+\frac{1}{1-n}+\frac{1}{1+n}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{1-n}+\frac{\cos n\pi}{1+n}+\frac{1}{1-n}+\frac{1}{1+n}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1+\cos n\pi}{1-n}+\frac{1+\cos n\pi}{1+n}\right)$$

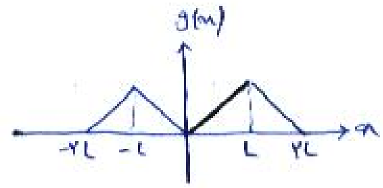
مثال) با رسم نشان دهید که سری فوریه توابع زیر یکسان هستند:

$$f(x)=\begin{cases}x & 0<x<L\\ 2L-x & L<x<2L\end{cases}\qquad g(x)=x \leftarrow \text{بسط کسینوسی تابع}\quad 0<x<L\qquad h(x)=\begin{cases}-x & -L<x<0\\ x & 0<x<L\end{cases}$$

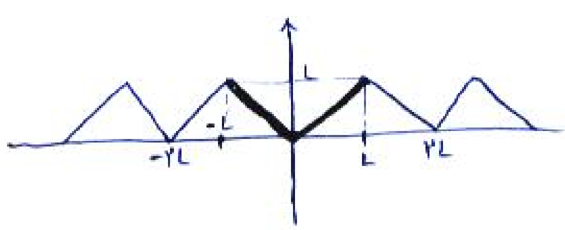
$$\begin{cases}f(x)=x,\ 0<x<L \rightarrow & x=0\rightarrow f(x)=0\\ & x=L\rightarrow f(x)=L\\ f(x)=2L-x,\ L<x<2L \rightarrow & x=L\rightarrow f(x)=L\\ & x=2L\rightarrow f(x)=0\end{cases}$$



بسط کسینوسی
$g(x)=x$
$0<x<L$



$$\begin{cases}h(x)=-x,\ -L<x<0 \rightarrow & x=-L\rightarrow f(x)=L\\ & x=0\rightarrow f(x)=0\\ h(x)=x,\ 0<x<L \rightarrow & x=0\rightarrow h(x)=0\\ & x=L\rightarrow h(x)=L\end{cases}$$



(برق ۸٤) صفحه ۳۰: اگر $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le \frac{L}{3} \\ \frac{1}{2}(L-x) & \frac{L}{3}<x<L \end{cases}$ و $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$ آنگاه این سری ایجاب

می‌کند که کدام یک از روابط زیر صحیح باشند؟

④ $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}(L-x) & +L\le x\le \frac{5L}{3} \\ x-2L & \frac{5L}{3}<x\le 2L \end{cases}$

حل: چون در $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$ فقط b_n داریم، در نتیجه بسط تابع بصورت سینوسی است و دامنه در نصف دامنه معلوم است.

نکته: $f(x)$ داده شده در صورت سؤال بصورت نیم دامنه است ($L-0=L$) و گزینه‌ها هم نبایستی بازه از عدد غیر صفر باشند (چون گفته برابر کدام گزینه است).

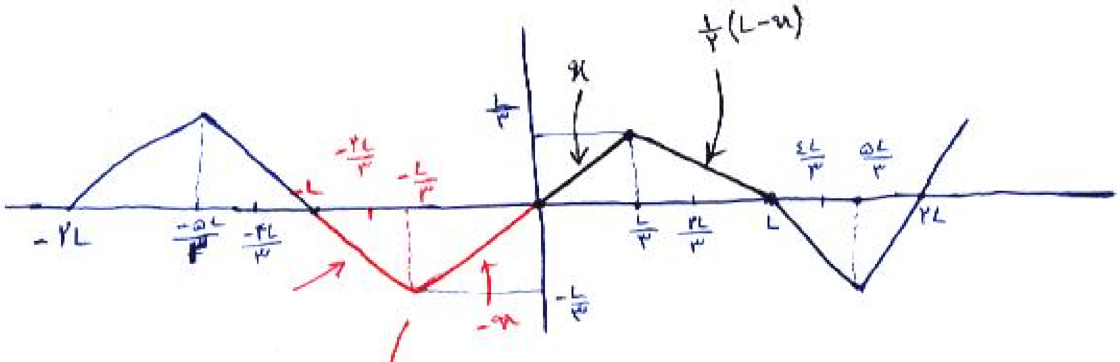
در حالی که گزینه‌ها نیم دامنه است ($2L-L=0$) و از عدد غیر صفر بازه دارند. و این تست غلط طراحی شده است.

$* f(x)=x \quad 0\le x\le \frac{L}{3} \longrightarrow \quad x=0 \rightarrow f(x)=0$

$x=\frac{L}{3}\rightarrow f(x)=\frac{L}{3}$

$* f(x)=\frac{1}{2}(L-x) \quad \frac{L}{3}<x<L \longrightarrow \quad x=\frac{L}{3}\rightarrow f(x)=\frac{1}{2}L-\frac{1}{2}\frac{L}{3}=\frac{1}{2}L-\frac{L}{6}=\frac{2L}{6}=\frac{L}{3}$

$x=L\rightarrow f(x)=\frac{1}{2}L-\frac{1}{2}L=0$



چرا این طوری کشیدی؟ چون فهمیدم که بسط سینوسی (فرد) داده است.

$\frac{1}{2}(L-x) \quad -L\le x\le \frac{5L}{3}$

$\frac{1}{2}(L-x)=\frac{1}{2}(L+L)=L \quad (x=+L)$

$\frac{1}{2}(L-x)=\frac{1}{2}\left(L-\frac{5L}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3L-5L}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-2L}{3}\right)=\frac{-L}{3} \quad \left(x=\frac{5L}{3}\right)$

$x-2L \quad \frac{5L}{3}<x\le 2L$

$x-2L=\frac{5L}{3}-2L=\frac{5L-6L}{3}=\frac{-L}{3} \quad \left(x=\frac{5L}{3}\right)$

$x-2L=2L-2L=0 \quad (x=2L)$

(برق ۸۵) صفحه ۳۱ : هرگاه $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ باشد، حاصل $\int_0^{\pi} f(x)\sin^3 x\,dx$ کدام است:

① صفر

② $\frac{3\pi}{8}$

③ $\frac{3\pi}{16}$

④ $\frac{13\pi}{36}$

این تست غلط طرح شده است چون b_n باید نسبت به n فرد باشد. درحالی که این طور نیست و b_n زوج است ($b_n=\frac{1}{n^2}\to b_{-n}=\frac{1}{(-n)^2}=\frac{1}{n^2}$).

حل : $f(x)$ → $\frac{a_0}{2}=0$ ، $a_n=0$ ، $b_n=\frac{1}{n^2}$ ، فرد → بسط سینوسی → $L=\pi$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$\frac{1}{n^2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \longrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\sin^3 x\,dx$$

$$\sin^3 x=\sin^2 x\sin x=\frac{1-\cos 2x}{2}\sin x=\left(\frac12-\frac12\cos 2x\right)\sin x=\frac12\sin x-\frac12\cos 2x\sin x$$

$$=\frac12\sin x-\frac12\left(\frac12\left[\sin 3x-\sin x\right]\right)=\frac12\sin x-\frac14\sin 3x+\frac14\sin x$$

$$\sin^3 x=\frac34\sin x-\frac14\sin 3x$$

$$\Rightarrow \frac34\underbrace{\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx}_{\frac{\pi}{2}b_1}-\frac14\underbrace{\int_0^{\pi} f(x)\sin 3x\,dx}_{\frac{\pi}{2}b_3}\longrightarrow \frac34\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{1^2}\right)-\frac14\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{3^2}\right)\longrightarrow \frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{72}=\frac{13\pi}{36}$$

(مکانیک ۸۵) صفحه ۹۸ : بسط کسینوسی تابع $\sin x$ در محدوده $0<x<\frac{\pi}{2}$ به چه صورت است؟

① $\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{-4}{\pi}}{4n^2-1}\cos nx$

② $\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{-4}{\pi}n}{4n^2-1}\cos 2nx$

③ $\sin x=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{-4}{\pi}}{4n^2-1}\cos 2nx$

④ تابع دارای بسط مذکور نمی‌باشد.

چون تابع فرد و بسط زوج است.

$b_n=0$

$L=\frac{\pi}{2}$ تابع زوج است

حل : $a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{4}{\pi}\left(-\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{-4}{\pi}\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}-\underbrace{\cos 0}_{1}\right)=\frac{4}{\pi}\longrightarrow \frac{a_0}{2}=\frac{\frac{4}{\pi}}{2}=\frac{2}{\pi}$

$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos 2nx\,dx=\frac{4}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac12\left[\sin(1+2n)x+\sin(1-2n)x\right]dx\right]$ «گزینه ۳»

$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{1+2n}\cos(1+2n)x-\frac{1}{1-2n}\cos(1-2n)x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{1+2n}\cancelto{0}{\cos(1+2n)\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{1-2n}\cancelto{0}{\cos(1-2n)\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{1+2n}+\frac{1}{1-2n}\right)$

$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+2n}+\frac{1}{1-2n}\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{1-4n^2}\right)=\frac{4}{(1-4n^2)\pi}$

(برق ۸۵) صفحه ۹۹: سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع f را بنویسید هرگاه در ناحیه‌ای که f غیرصفر است تعریف آن $f(x)=H(-x)-2H(1-x)+H(2-x)$ باشد که در آن $H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$.

حل: $H(-x)\longrightarrow x=0\longrightarrow$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	$+$		$-$

$-2H(1-x)\longrightarrow -2+2x=0\longrightarrow x=1\longrightarrow$

		1	
$2x-2$	$-$		$+$

$H(2-x)\longrightarrow 2-x=0\longrightarrow x=2\longrightarrow$

		2	
$-x+2$	$+$		$-$

$\Rightarrow$

	$x<0$	$0<x<1$	$1<x<2$	$x>2$
$-x$	$+$	$-$	$-$	$-$
$2x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$-x+2$	$+$	$+$	$+$	$-$
P	$-$	$+$	$-$	$+$

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ -1 & 0<x<1\\ 1 & 1<x<2\\ 0 & x>2\end{cases}$$

سری فوریه کسینوسی نیم دامنه $\longrightarrow$ تابع زوج $\longrightarrow b_n=0$ ، $L=2$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx=\int_0^1(-1)\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx+\int_1^2(1)\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}x\right)\Big|_0^1+\frac{2}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}x\right)\Big|_1^2=\frac{-2}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{2}{n\pi}\left(\cancel{\sin n\pi}-\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{-2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{-4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\begin{cases}n\text{ های زوج}\rightarrow n=2m\rightarrow\frac{-4}{2m\pi}\sin\frac{2m\pi}{2}=\frac{-4}{2m\pi}\sin m\pi\rightarrow a_n=0\\ n\text{ های فرد}\rightarrow n=2m-1\rightarrow\frac{-4}{(2m-1)\pi}\sin\frac{(2m-1)\pi}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\underbrace{\cos\frac{n\pi}{2}x}_{\cos\frac{(2m-1)\pi}{2}x}\longrightarrow\begin{cases}n\text{ های زوج}\longrightarrow n=2m\longrightarrow\sin\frac{n\pi}{2}=0\\ n\text{ های فرد}\longrightarrow n=2m-1\longrightarrow(-1)^{m-1}=\sin\frac{n\pi}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{(2m-1)\pi}\underbrace{(-1)^{m-1}}_{\sin\frac{(2m-1)\pi}{2}}\cos\frac{(2m-1)\pi}{2}x\Rightarrow$$

گزینه «۳»

a_0 را محاسبه نکردیم، چون در همهٔ گزینه‌ها یکسان است (صفر است):

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx=2\left[\int_0^1(-1)\,dx+\int_1^2(1)\,dx\right]=2\left[-x\Big|_0^1+x\Big|_1^2\right]=0$$

نکته: $H(\oplus)=1$، $H(\ominus)=0$، $H(0)=1$

$\boxed{x<0}\xrightarrow{\text{مثلاً}}(-1)\longrightarrow f(x)=H(1)-2H(1+1)+H(2+1)=1-2(1)+1=\boxed{0}$

$\boxed{0<x<1}\xrightarrow{\text{مثلاً}}(1)\longrightarrow f(x)=H(-1)-2H(1-1)+H(2-1)=0-2(1)+1=\boxed{-1}$

$\boxed{1<x<2}\xrightarrow{\text{مثلاً}}(2)\longrightarrow f(x)=H(-2)-2H(1-2)+H(2-2)=0-2(0)+1=\boxed{1}$

$\boxed{x>2}\longrightarrow(3)\longrightarrow f(x)=H(-3)-2H(1-3)+H(2-3)=0-2(0)+0=\boxed{0}$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}0\rightarrow x<0\\ -1\rightarrow 0<x<1\\ 1\rightarrow 1<x<2\\ 0\rightarrow x>2\end{cases}$$

(مکانیک ۹۰) سری فوریه تابع $f(x)=\cos 2x$ و $0<x<\frac{\pi}{2}$ با دوره تناوب $\frac{\pi}{2}$ را بدست آورید.

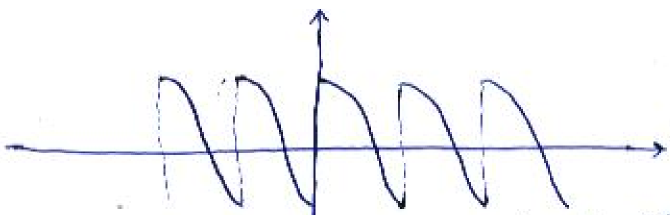
۱) سینوسی ✓

۲) سینوسی ـ کسینوسی

۳) کسینوسی

۴) سری فوریه ندارد

حل: $T=\frac{\pi}{2}$ ، $T=2L \rightarrow \frac{\pi}{2}=2L \rightarrow 4L=\pi \rightarrow L=\frac{\pi}{4}$



فرد است $\rightarrow a_0$ و $a_n=0$

یعنی عدد ثابت نداریم و همه ضرائب cos صفر است (یعنی cos هم نداریم) ← فقط ضرائب sin و خود sin داریم.

(برق ۸۸) صفحه ۴۷۱: هرگاه $f(x)$ تابعی زوج باشد و $f(x)=x+\cos 2x$ به ازای $0\leqslant x\leqslant\pi$ ، آنگاه در سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)$ در بازه $[-\pi,\pi]$ ضریب $\cos 2x$ کدام است؟

۱) 0

۲) 1 ✓

۳) $1-\frac{1}{2\pi}$

۴) $1+\frac{1}{2\pi}$

* اگر دوره تناوب هر دو یکسان باشد

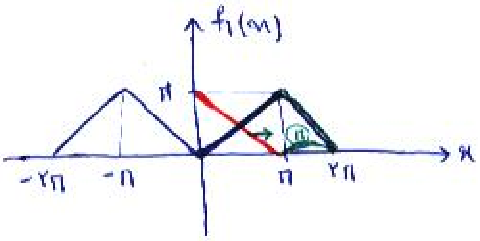
* سری فوریه خاصیت جمع پذیری دارد *

حل: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)=x+\cos 2x$ (a_n ، a_n)

"نیم دامنه است" چون اگر در بازه $-L$ تا L داده باشد و فرد و زوج بودن را مشخص کند، حتماً نیم دامنه است.

$f_1(x)=x$ ، $0<x<\pi \rightarrow x=0\rightarrow f_1(x)=0$ ، $x=\pi\rightarrow f_1(x)=\pi$

$f_2(x)=\cos 2x$ ، $0<x<\pi \rightarrow x=0\rightarrow f_2(x)=1$ ، $x=\pi\rightarrow f_2(x)=-1$



$T=2\pi \xrightarrow[\text{برابر بود}]{\text{نیم}} \pi$

$T=2L \longrightarrow L=\pi$

$\Rightarrow$ منطبق شد:

$a_{2k}=0 \longrightarrow$ ضرائب زوج کسینوسی صفر $\longrightarrow a_2\cos\frac{2\pi}{L}$ و $a_4\cos\frac{4\pi}{L}$ ... نداریم ✗

$a_{2k-1}\neq 0 \longrightarrow$ ضرائب فرد کسینوسی غیرصفر $\longrightarrow a_1\cos\frac{\pi}{L}$ و $a_3\cos\frac{3\pi}{L}$ و ... داریم ✓

فقط هارمونیک فرد داریم $\begin{pmatrix} a_1, a_3, \dots \\ b_1, b_3, \dots \end{pmatrix}$

تابع زوج است $\longrightarrow b_n=0 \Rightarrow b_1, b_3, \dots=0$

* منطبق شد: داریم $a_1, a_3, \dots$ ؛ $b_1, b_3, \dots$ ← نداریم، چون تابع $f_1(x)=x$ ، $0<x<\pi$ زوج است. ؛ نداریم $a_2, a_4, \dots$ ، $b_2, b_4, \dots$ $\Rightarrow b_n=0$

* چون سری فوریه $\cos 2x$ خودش می‌شود (بسط کسینوسی اش (زوج اش)) ← پس ضریب $\cos 2x$ ، یک است.

روش دوم: $T=2\pi$ ، $T=2L \rightarrow L=\pi \Rightarrow a_n\cos\frac{n\pi}{L}x \leftarrow a\cos 2x$ ← $\frac{n\pi}{L}=2\rightarrow\frac{n\pi}{\pi}=2\rightarrow n=2 \Rightarrow a_2\cos 2x$

$\begin{cases} f_1(x)=x,\ 0<x<\pi \longrightarrow \text{منطبق شد} \longrightarrow a_2=0 \\ f_2(x)=\cos 2x,\ 0<x<\pi \longrightarrow a_2\cos 2x \Rightarrow a_2=1 \end{cases}$

$a_{2\,\text{کل}}=0+1=1$

شرایط وجود سری فوریه تابع: تابع متناوب $f(x)$ دارای سری فوریه است اگر فقط اگر دارای شرایط دیریکله زیر باشد:

(1) در یک دوره تناوب کراندار باشد $\longleftarrow \int_T |f(x)|\,dx < M$

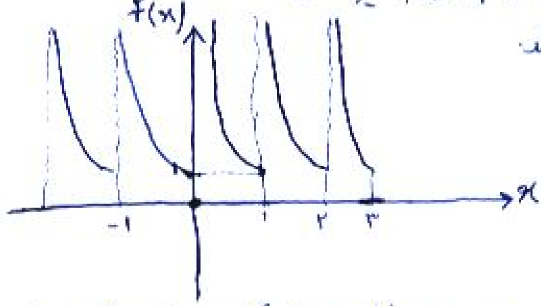
سؤال: آیا هر تابعی که متناوب است، سری فوریه هم دارد؟ خیر، ممکن است تابعی متناوب باشد ولی سری فوریه نداشته باشد.

مثال) $f(x)=\frac{1}{x}$

$0<x<1$

$x=0 \longrightarrow f(x)=\infty$

$x=1 \longrightarrow f(x)=1$



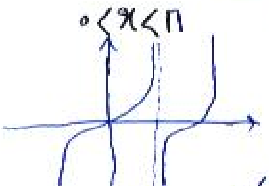
سری فوریه ندارد چون در یک دوره تناوب کراندار نیست.

OR: $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \text{Ln}\,x\Big|_0^1 = \text{Ln}1-\text{Ln}0 = -\text{Ln}0 = -\infty \longrightarrow$ کراندار نیست (بی کران است)

مثال) $f(x)=|tg\,x| \longrightarrow$ سری فوریه ندارد، چون tgx در یک دوره تناوب کراندار نیست $\xrightarrow{\text{چون}} \int_0^\pi |tg\,x|\,dx = \int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\text{Ln}(\cos x)\Big|_0^\pi = -\text{Ln}(\cos\pi - 1)$

$0<x<\pi$

$= \text{Ln}1 - \text{Ln}(\cos\pi) = -\text{Ln}(\cos\pi) = -\text{Ln}(-1) = \infty$



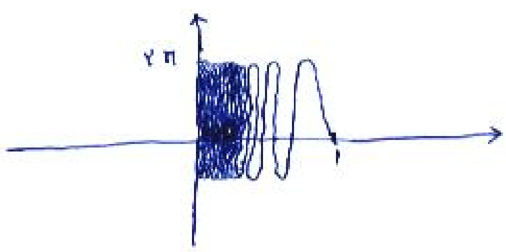
(2) تعداد نقاط حداقل و حداکثر محدود در یک دوره تناوب داشته باشد (تعداد اکسترمم های محدود در یک دوره تناوب داشته باشد).

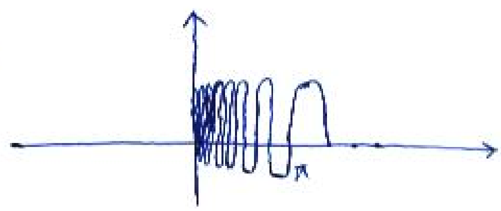
مثال) $f(x)=\frac{2\pi}{x}$

$0<x<1$

$x=0 \longrightarrow f(x)=\infty$

$x=1 \longrightarrow f(x)=2\pi$





مثال) $f(x)=\sin\frac{1}{x} \xrightarrow{\text{ریشه ها}} \sin\frac{1}{x}=0 \longrightarrow \frac{1}{x}=k\pi \longrightarrow x=\frac{1}{k\pi} \Longrightarrow$ چون بیشمار جواب (ریشه) دارد $\Leftarrow$ بیشمار ماکزیمم و مینیمم هم دارد

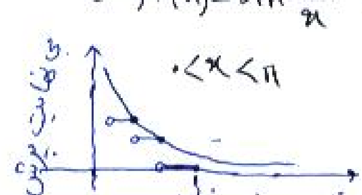
این تابع هم کراندار است و هم متناوب. با این حال چون تعداد حداقل و حداکثر آن محدود نیست $\Leftarrow$ سری فوریه ندارد.

$0<x<\pi$

(3) در یک دوره تناوب، تعداد نقاط گسستگی ها محدود داشته باشد.

نقاط انفصال

نقاط پرش



این تابع سری فوریه ندارد.

مثال) $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$

$0<x<1$

این پرش هیچ گاه به یک نمی رسد

این شکل، کراندار است، تعداد حداقل و حداکثر محدود دارد ولی چون تعداد پرش نامحدود دارد $\Leftarrow$ سری فوریه ندارد.

مثل اینکه کسی بخواهد به جایی برسد، و این شخص هم میره نصف مسیری را که رفته است برو $\Leftarrow$ هیچ وقت نمی رسد

(مکانیک ۸۳) صفحه ۸۳: تابع $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ را در محدوده $-\pi < x < \pi$ در نظر بگیرید. درباره صورت می‌توان گفت این تابع:

1) دارای بسط فوریه نمی‌باشد چون دارای ناپیوستگی در محدوده است.

2) دارای بسط کسینوسی فوریه در محدوده است چون تابع زوج می‌باشد.

3) در محدوده دارای بسط فوریه نمی‌باشد چون تابع نوسانی (پریودیک) نیست.

4) در محدوده دارای بسط فوریه نمی‌باشد چون تعداد حداکثر و حداقل آن محدود نمی‌باشد.

جواب: گزینه ① غلط است ← چون یک تابع می‌تواند ناپیوستگی داشته باشد و سری فوریه هم داشته باشد.

گزینه ② غلط است ← چون ابتدا باید بدانیم که بسط سری فوریه دارد یا نه. اگر بسط سری فوریه داشت، این جمله درست است.

گزینه ③ غلط است ← چون اگر تابعی در یک محدوده تعریف شده باشد، ما می‌توانیم آن را به صورت تصنعی متناوب کنیم.

☑ شرایط دیریکله:

برای محاسبه مقدار سری فوریه در نقطه x_0 نیازی به محاسبه سری فوریه نداریم و می‌توان مطابق زیر عمل کرد:

x_0:
- نقطه پیوستگی تابع ⟵ مقدار سری فوریه در نقطه x_0 $= f(x_0)$
- نقطه گسستگی تابع ⟵ مقدار سری فوریه در نقطه x_0 $= \dfrac{\lim_{x\to x_0^-} f(x) + \lim_{x\to x_0^+} f(x)}{2}$

مثال: مقدار سری فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} x & 0<x<1 \\ 1 & 1<x<2 \\ -2 & 2<x<3 \end{cases}$ را در نقاط داده شده بدست آورید.

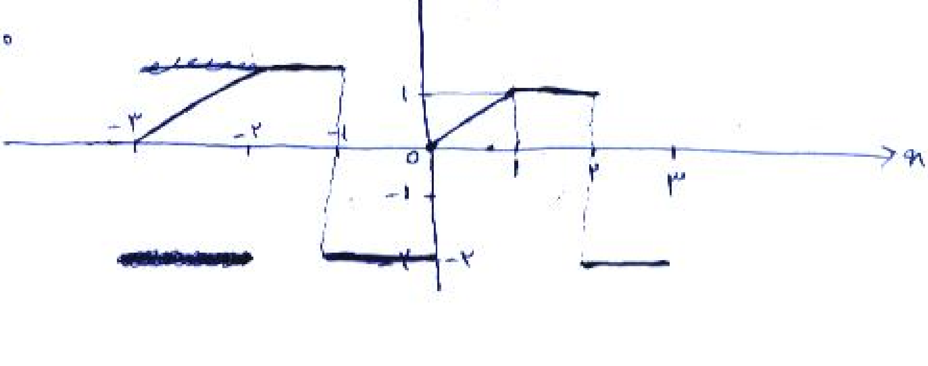
$x_0 = 0$

$x_0 = 0$ ⟵ نقطه گسستگی است ⟸ مقدار سری فوریه در نقطه صفر $= \dfrac{\lim_{x\to 0^-} f(x) + \lim_{x\to 0^+} f(x)}{2} = \dfrac{-2+0}{2} = -1$

* $f(x) = x$, $0<x<1$ ⟶ $x=0 \to f(x)=0$, $x=1 \to f(x)=1$

* $f(x) = 1$, $1<x<2$

* $f(x) = -2$, $2<x<3$



$x_0=1$ ← نقطه پیوستگی ← مقدار سری فوریه در $x=1$ $= f(1) = 1$

$x=\frac{1}{2}$ ← نقطه پیوستگی ← مقدار سری فوریه در $x=\frac{1}{2}$ $= f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$x=2$ ← نقطه گسستگی ← مقدار سری فوریه در $x=2$ $= \frac{1+(-2)}{2} = \frac{-1}{2}$

$x=\frac{3}{2}$ ← نقطه پیوستگی ← مقدار سری فوریه در $x=\frac{3}{2}$ $= f(\frac{3}{2}) = 1$

$x=3$ ← نقطه گسستگی ← مقدار سری فوریه در $x=3$ $= \frac{-2+0}{2} = -1$

$x=3542$ ← مضارب دوره تناوب را حذف می‌کنیم ← دوره تناوب $=3$ ← $x=2$

$x=-8731{,}5 \to -1{,}5$ ← برای اینکه در دوره تناوب باشد بعلاوه ۳ می‌کنیم ← $-1{,}5+3=1{,}5$

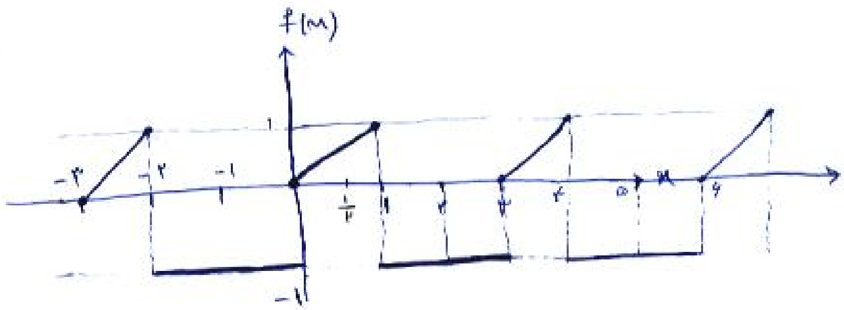
$x=-946 \to -1+3=2$

مثال) با استفاده از بسط فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ -1 & 1<x<3 \end{cases}$ مقدار سری فوریه در نقاط زیر را بدست آورید.

$x=0$ و $x=1$ و $x=2$ و $x=3$ و $x=4$ و $x=\frac{1}{2}$ و $x=-9{,}5$ و $x=111$ و $x=912{,}5$ و $x=-232$

$* \ f(x)=x, \quad 0<x<1 \longrightarrow \begin{array}{l} x=0 \to f(x)=0 \\ x=1 \to f(x)=1 \end{array}$

$* \ f(x)=-1, \quad 1<x<3$



$x=0$ ← گسستگی ← مقدار سری فوریه در $x=0$ $= \frac{-1+0}{2} = \frac{-1}{2}$

$x=1$ ← گسستگی ← مقدار سری فوریه در $x=1$ $= \frac{1+(-1)}{2} = 0$

$x=2$ ← پیوستگی ← مقدار سری فوریه در $x=2$ $= f(2) = -1$

$x=3$ ← گسستگی ← مقدار سری فوریه در $x=3$ $= \frac{-1+0}{2} = \frac{-1}{2}$

$x=\frac{1}{2}$ ← پیوستگی ← مقدار سری فوریه در $x=\frac{1}{2}$ $= f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$x=4 \longrightarrow$ دوره تناوب $=3 \longrightarrow$ مضارب دوره تناوب را حذف کن $\longrightarrow 1 \longrightarrow x=4$ مقدار سری فوریه در $=0$

$-1{,}5+3$

$x=-9{,}5 \longrightarrow 2{,}5 \longrightarrow$ مقدار سری فوریه $= f(2{,}5) = -1$

$x=111 \longrightarrow 0 \longrightarrow$ مقدار سری فوریه $= \frac{0-1}{2}$

$x=912{,}5 \longrightarrow \frac{1}{2} \longrightarrow$ مقدار سری فوریه $= \frac{1}{2}$

$x=-232 \longrightarrow 2 \longrightarrow$ مقدار سری فوریه $= -1$

نکته تستی: اگر ابتدا و انتهای بازه در $f(x_0)$ یکسان داشته باشند ← در $x=x_0$ پیوسته. و اگر $f(x)$ های ما در نقطه $x=x_0$ یکسان نباشد ← گسسته خواهد بود که نقاط ابتدا و انتهای بازه، نقاط ناپیوستگی ما می شوند.

(مکانیک ۸۲) صفحه ۸۲: مقدار سری فوریه متناظر تابع متناوب $P=2\pi$ و $-\pi < x < \pi$ و $f(x)=x^2+x$ در نقطه $x=\pi$ کدام است؟

۱) π ۲) π^2 ۳) $\frac{\pi^2}{4}$ ۴) $\pi^2+\pi$

حل: π نقطه مرزی است. (چون حد بالا منهای حد پایین برابر دوره تناوب می باشد: $\pi-(-\pi) = 2\pi = T$.) $\longrightarrow \frac{\pi^2-\pi+\pi^2+\pi}{2} = \frac{2\pi^2}{2} = \pi^2$

نکته تستی: نقطه داده شده
- داخل بازه باشد ← با خودش جایگذاری
- روی مرز بازه باشد ← $\frac{S_{\text{ابتدای مرز}} + S_{\text{انتهای مرز}}}{2}$: چه پیوسته باشد و چه گسسته
- خارج از مرز باشد ← مضرب دوره تناوب حذف

همگرایی و واگرایی ضرائب فوریه

+ همیشه دنباله‌های a_n و b_n، دنباله‌های همگرا به صفر هستند $\xrightarrow{\text{یعنی}}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

مثال) در بسط فوریه $f(x)=tg^{-1}x$ و $0<x<1$، $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ کدام است؟

① صفر ✓ ② -1 ③ 1 ④ ∞

نکته: + حداقل سرعت همگرایی ضرائب فوریه متناسب با $\frac{c}{n}$ است «c یک عدد ثابت است». یعنی سرعت همگرایی ضرائب فوریه می‌تواند بیشتر از $\frac{c}{n}$ شود، ولی نمی‌تواند کمتر شود (هرچه توان n بیشتر شود، سرعت همگرایی بیشتر می‌شود، مثلاً سرعت همگرایی $\frac{c}{n^3}$ بزرگتر از $\frac{c}{n^2}$ می‌باشد).

$$a_n=\frac{4n}{8n^5+3n^2+1}\sim\frac{c}{n^4}$$

$$a_n=\frac{3n^2+4n+1}{8n^3+2n+1}\sim\frac{c}{n}$$

حتماً که نباید مساوی باشد، یعنی متناسب است $\xleftarrow{\text{یعنی}}$

$$a_n=\frac{2n+2}{3n^{\frac{3}{2}}+2n+1}\sim\frac{c}{n^{\frac{1}{2}}=\sqrt{n}} \qquad 1-\frac{3}{2}=\frac{-1}{2}$$

نمی‌تواند بیانگر سری فوریه باشد، چون سرعت آن از $\frac{c}{n}$ کمتر است

$$a_n=\frac{4n^2+1}{3n^2+2n+1}\sim\frac{4}{3}$$

نمی‌تواند بیانگر سری فوریه باشد، چون سرعت آن کمتر از $\frac{c}{n}$ می‌باشد.

(هوافضا ۸۴) صفحه ۴۵: کدام سری، سری فوریه تابعی انتگرال‌پذیر و متناوب با دوره تناوب 2π است؟

① $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ ② $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$

③ $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\ln(n))\cos nx$ ④ $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(n-1)x}{\sqrt{n}}$

حل: سرعت همگرایی در گزینه‌های ① و ④ متناسب با $\frac{c}{\sqrt{n}}$ است و چون کمتر از $\frac{c}{n}$ می‌باشد ← گزینه ① و ④ غلط اند.

چون $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$: $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln(n))\neq 0$ ← گزینه ③ غلط است.

گزینه «۲» صحیح است.

$\ln(\infty)=-\infty$

$\log_e^{\infty}=\infty$ $e^{-\infty}=\infty$

$e^{\infty}=0$

نکته‌ی مهم:

$f(x)$ حداقل یک نقطه ناپیوستگی در دامنه تعریف خود دارد $\Longleftrightarrow$ حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n}$ به صفر همگرا می‌شود و دیگری نمی‌تواند با سرعت کمتر از $\frac{c}{n}$ به صفر همگرا شود (یعنی دیگری باید بزرگتر باشد) مثلاً $\frac{c}{n^5}$

$f(x)$ پیوسته و $f'(x)$ ناپیوسته $\Longleftrightarrow$ حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n^2}$ به صفر همگرا می‌شود و دیگری نمی‌تواند با سرعت کمتر از $\frac{c}{n^2}$ به صفر همگرا شود (مثلاً $\frac{c}{n^4}$)

$f(x)$ و $f'(x)$ پیوسته و $f''(x)$ ناپیوسته $\Longleftrightarrow$ حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n^3}$ به صفر همگرا می‌شود و دیگری نمی‌تواند با سرعت کمتر از $\frac{c}{n^3}$ به صفر همگرا شود

⋮

مورد استفاده برای تست های که در گزینه ها شان سرعت های مختلفی دارد.

به طور کلی: $f(x)$ و $f'(x)$ و ... $f^{K-1}(x)$ پیوسته و $f^{K}(x)$ ناپیوسته $\Longleftrightarrow$ حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n^{K+1}}$ به صفر همگرا می‌شود و دیگری نمی‌تواند با سرعت کمتر از $\frac{c}{n^{K+1}}$ به صفر همگرا شود

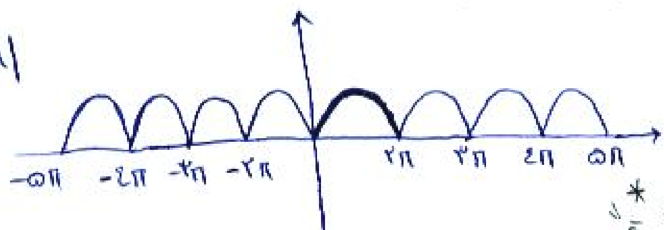
(دکترای برق و مهندسی پزشکی ۷۳) صفحه ۹۲: سری فوریه $f(x)=|\sin x|$ و $0<x<2\pi$ برابر است با:

① $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2n-1}$ ② $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2n+1}$

③ $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{4n^2-1}$ ④ $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$

حل: $f(x)=|\sin x|$

$0<x<2\pi$



$\longrightarrow$ زوج $\longrightarrow b_n=0 \longrightarrow$ گزینه «۲» و «۳» غلط

$T=2\pi$

$T=2L \longrightarrow L=\pi$

* اگر صورت تابع پریود اول را نسبت به $\frac{a_0}{2}$ به محور راست جا به جا شد و نیم پریود (نیم منطق) نیم پریود ها روی هم زوج دارد، $a_{2k}\neq 0$ $b_{2k}\neq 0$

$f(x)$ پیوسته و $f'(x)$ ناپیوسته است چون $f(x)$ هرچپ و راست $f(x)$ یکی است اما مشتق گرفته‌ی $f(x)$ هرچپ و راستش برابر نیست.

پس حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n^2}$ به صفر همگرا می‌شود و چون در گزینه های ① و ④ b_n صفر است پس a_n باید بیش از $\frac{c}{n^2}$ سرعت داشته باشد که گزینه «۴» درسته

(مکانیک ۷۲) صفحه ۹۲: اگر f تابعی با دوره تناوب 2π باشد که با ضابطه $f(x)=|x|$ به ازای $x \in [-\pi, \pi]$ تعریف شده است، آنگاه سری فوریه f برابر است با:

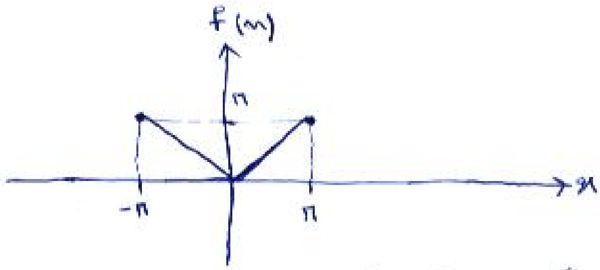
(۱) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$

(۲) $2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}$

(۳) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$

(۴) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}$

حل: $f(x)=|x|$
$-\pi \leq x \leq \pi \longrightarrow$ $x=-\pi \rightarrow f(x)=\pi$
$x=\pi \rightarrow f(x)=\pi$



زوج $\longrightarrow b_n=0 \longrightarrow$ گزینه ۱ یا ۳ درسته

$|x| = f(x) \longleftarrow$ پیوسته
$f'(x) = \frac{x}{|x|} \longleftarrow$ ناپیوسته

$\Leftarrow$ حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n^2}$ به صفر همگرا می‌شود و دیگری نمی‌تواند با سرعت کمتر از $\frac{c}{n^2}$ به صفر همگرا شود

$\Leftarrow$ چون $b_n=0$ پس سرعت همگرایی a_n حداقل با $\frac{c}{n^2}$ باشد ← گزینه ((۳))

(برق ۷۴) صفحه ۸۲ : در بسط تابع پریودیک $f(x)$ به سری فوریه، ضرایب a_n و b_n با روابط زیر بدست آمده است:

$$a_n=\frac{2(1-e^{-1})}{1+4n^2\pi^2},\ n\neq 0 \qquad b_n=\frac{4n\pi(1-e^{-1})}{1+4n^2\pi^2}$$

① تابع $f(x)$ و مشتقات اول و دوم آن پیوسته بوده ولی مشتقات مراتب بالاتر ناپیوسته می‌شوند.

② عبارات داده شده برای a_n و b_n نمی‌توانند بیانگر ضرایب فوریه برای یک تابع پریودیک باشند.

③ تابع $f(x)$ حداقل دارای یک نقطه انفصال در پریود اصلی خود می‌باشد.

④ ضرایب فوریه به تنهایی نمی‌توانند پیوسته یا ناپیوسته بودن یک تابع پریودیک را مشخص نمایند.

حل: $a_n \to \frac{c}{n^2}$ ، $b_n \to \frac{c}{n}$

چون حداقل برای ما مهم است ← $b_n : \frac{c}{n} \Rightarrow f(x)$ حداقل یک نقطه ناپیوستگی (گسستگی یا انفصال) در دامنه تعریف خود (پریود اصلی خود) دارد ← گزینه «۳»

گزینه ① غلطه ← چون در این صورت باید حداقل یکی از a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n^{3,4}}$ به صفر همگرا شود.

گزینه ② ← چون حداقل یکی از ضرایب a_n یا b_n با سرعت $\frac{c}{n}$ به صفر همگرا می‌شود (یعنی سرعت بالاتر از n داریم، مثل $a_n : \frac{c}{n^2}$) و دیگر اینکه $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ و $\lim_{n\to\infty} b_n=0$ می‌شود، پس بیانگر ضرایب فوریه می‌توانند باشند. (کامپیوتر ۸۴) ص ۸۴

گزینه ④ ← غلط کرده که همچین حرفی زده! پس اینهمه داریم بحث و بررسی می‌کنیم واسه چیه؟!

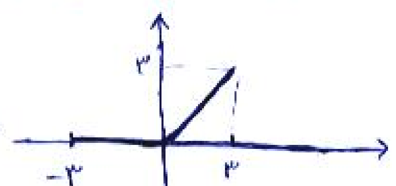
نکته: در بسط فوریه $f(x)$، a_n نسبت به n تابعی زوج و b_n نسبت به n تابعی فرد است.

سری فوریه تابع پیوسته تکه‌ای $f(x)$ در بازه $[-3,3]$ بصورت

$$a_0+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{a_n\cos\frac{n\pi}{3}x+b_n\sin\frac{n\pi}{3}x\right\}$$

تعریف می‌شود. اگر تابع $f(x)$ برابر با $f(x)=\begin{cases}0 & -3<x<0\\ x & 0<x<3\end{cases}$ باشد، ضرایب سری فوریه به ترتیب a_0 و a_n و b_n برابرند با:

حل:



$$a_0=\frac{\text{مساحت در یک دوره تناوب}}{T}=\frac{\frac{1}{2}\times3\times3}{6}=\frac{3}{4}\to$$ گزینه «۱» و «۴» غلطه

چون در گزینه‌ها a_0 متفاوت است.

گزینه «۲» درسته: چون a_n نسبت به n زوج است و اگر در a_n یا b_n گزینه ۲، بجای n، −n بگذاریم، زوج می‌شود. ولی در گزینه ۳ اگر در a_n و b_n بجای n، −n بگذاریم ← a_n ← فرد میشه، b_n ← زوج میشه که غلطه.

روش دوم: اگر نصف دامنه‌ی هر تابعی صفر باشد (که در این تست صفر است) ← بسط کسینوسی a_n را پیدا می‌کنیم و تقسیم بر ۲ می‌کنیم.

$\xrightarrow{OR}$ بسط سینوسی b_n را پیدا می‌کنیم و تقسیم بر ۲ می‌کنیم.

☑ تقارن ربع موج و نیم موج:

اگر در بسط فوریه $f(x)$ ، $\frac{a_0}{2} = 0$ باشد و قرینه‌ی نیم پریود اول نسبت به $\frac{a_0}{2}$ را به اندازه‌ی نیم پریود به سمت راست جابجا کنیم و بر نیم پریود دوم منطبق شود ← بسط فوریه فقط شامل هارمونیک های فرد است و این هارمونیک های فرد از روابط زیر بدست می‌آیند:

منطبق است ← هارمونیک های فرد دارد.

$a_2, a_4, a_6, \dots = 0$, $b_2, b_4, b_6, \dots = 0$ ✗ $a_{2k} = 0$, $b_{2k} = 0$

$a_1, a_3, a_5, \dots$, $b_1, b_3, b_5, \dots$ ✓ $a_{2k-1} \neq 0$, $b_{2k-1} \neq 0$

اگر تابع $f(x)$ نه فرد و نه زوج باشد ← تقارن نیم موجی

$$\underbrace{a_{2n} = 0}_{\text{می دانم}} \quad , \quad a_{2n-1} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(2n-1)\frac{\pi}{L}x\,dx$$

$$\underbrace{b_{2n} = 0}_{\text{می دانم}} \quad , \quad b_{2n-1} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{(2n-1)\pi}{L}x\,dx$$

اگر تابع $f(x)$ زوج یا فرد باشد ← تقارن ربع موجی

فرد ← $\underbrace{a_n = 0}_{\text{می دانم}}$, $\underbrace{b_{2n} = 0}_{\text{می دانم}}$, $b_{2n-1} = \frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(x)\sin(2n-1)\frac{\pi}{L}x\,dx$

زوج ← $\underbrace{b_n = 0}_{\text{می دانم}}$, $\underbrace{a_{2n} = 0}_{\text{می دانم}}$, $a_{2n-1} = \frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} f(x)\cos(2n-1)\frac{\pi}{L}x\,dx$

(مکانیک ۷۵) صفحه ۹۳: سری فوریه تابع زیر کدام است؟

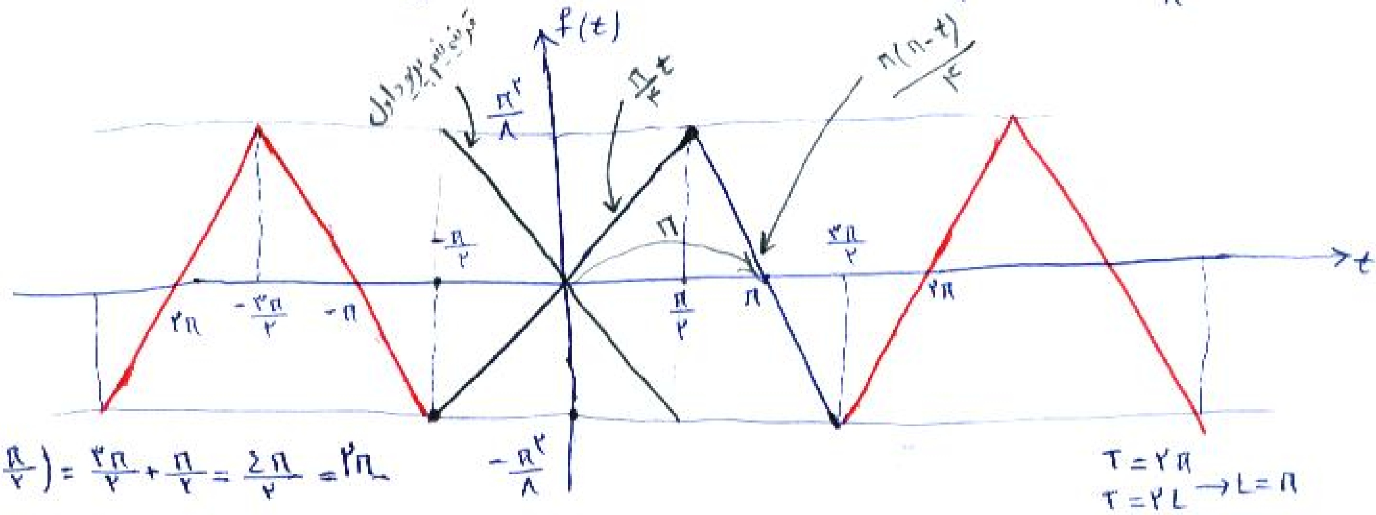
$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi t}{4} & -\dfrac{\pi}{2}\leq t<\dfrac{\pi}{2}\\[2mm] \dfrac{\pi(\pi-t)}{4} & \dfrac{\pi}{2}\leq t<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

① $\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{-1}{n^2}\sin nt$ ② $\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{-1}{n\pi}\sin nt$

③ $\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin nt$ ④ $\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{-(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^2}\sin nt$

$f(t)=\frac{\pi}{4}t,\ -\frac{\pi}{2}\leq t<\frac{\pi}{2} \rightarrow \quad t=\frac{-\pi}{2}\rightarrow f(t)=\frac{-\pi^2}{8},\quad t=\frac{\pi}{2}\rightarrow f(t)=\frac{\pi^2}{8}$

$f(t)=\frac{\pi(\pi-t)}{4},\ \frac{\pi}{2}\leq t<\frac{3\pi}{2} \rightarrow \quad t=\frac{\pi}{2}\rightarrow f(t)=\frac{\pi^2}{8},\quad t=\frac{3\pi}{2}\rightarrow f(t)=\frac{-\pi^2}{8}$



$\frac{3\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{4\pi}{2}=2\pi$

$T=2\pi$

$2=2L\rightarrow L=\pi$

$\Rightarrow$ فرد $\rightarrow a_0=0,\ a_n=0$

منطبق نیز هست $\longleftarrow$ فقط هارمونیک‌های فرد دارد $\rightarrow a_{2n}=0$ و $b_{2n}=0$; $\cancel{a_{2n-1}}\neq 0$ و $b_{2n-1}\neq 0$

$a_{2n-1}=0$ چون فرد است

$\Rightarrow$ فقط b_{2n-1} داریم $\rightarrow b_{2n-1}=\frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}}f(x)\sin\frac{(2n-1)\pi}{L}x\,dx$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi t}{4}\sin(2n-1)t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin(2n-1)t\,dt$$

$t\rightarrow 1\rightarrow 0$; $\sin(2n-1)t\rightarrow\frac{-1}{2n-1}\cos(2n-1)t\rightarrow\frac{-1}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)t$ ($\oplus$, $\ominus$)

نکته: $\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}=(-1)^{n+1}=-(-1)^n$

$$=\frac{-t}{2n-1}\cos(2n-1)t+\frac{1}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{-\frac{\pi}{2}}{2n-1}\cancel{\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}+0-0$$

$$=\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{(2n-1)^2}=\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$$

$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin nt=\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{-(-1)^n}{(2n-1)^2}\sin nt\longrightarrow$ گزینه «۴»

روش دوم: گزینه «۱» غلط $\xleftarrow{\text{چون}}$ b_n باید نسبت به n فرد باشد ← یعنی اگر بجای n، $-n$ بگذاریم باید عوض شود ← عوض نشد و زوج است. $\frac{-1}{(-n)^2} = \frac{-1}{n^2}$

گزینه «۲» غلط $\xleftarrow{\text{چون}}$ سرعت همگرایی b_n حداقل باید $\frac{c}{n^3}$ باشد. چون $f(x)$ پیوسته است (اصلاً $f'(x)$ ناپیوسته است و b_n باید $\frac{c}{n^2}$ باشد).

گزینه «۳» غلط $\xleftarrow{\text{چون}}$ b_n باید نسبت به n فرد باشد، در حالی که زوج است.

نکته: اگر در تابع $f(x)$

① $f(x+L) = -f(x)$ ← بسط فوریه فقط شامل هارمونیک های فرد است ← $a_1, a_3, a_5, \dots : a_{2n-1}$ ، $b_1, b_3, b_5, \dots : b_{2n-1}$

② $f(x+L) = f(x)$ ← بسط فوریه فقط شامل هارمونیک های زوج است ← $a_2, a_4, a_6, \dots : a_{2n}$ ، $b_2, b_4, b_6, \dots : b_{2n}$

منظور از عبارت ① این است که اگر نیم پریود اول را نسبت به $\frac{a_0}{2}$ قرینه کنیم و آنرا به اندازه نیم پریود به سمت راست جابجا کنیم و بر نیم پریود دوم منطبق شود ← فقط هارمونیک های فرد داریم.

$a_{2k-1} \neq 0$

$b_{2k-1} \neq 0$

منظور از عبارت ② این است که اگر خود نیم پریود اول را نسبت به $\frac{a_0}{2}$ به اندازه نیم پریود به سمت راست جابجا کنیم و بر نیم پریود دوم منطبق شود ← فقط هارمونیک های زوج داریم (پشت صفحه 26 جزوه).

$a_{2k} \neq 0$

$b_{2k} \neq 0$

*** انتگرال گیری و مشتق گیری از سری فوریه ***

انتگرال گیری: $f(x) = \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} x - b_n \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{L} x\right) + K$

انتگرال گیری باعث افزایش سرعت همگرایی می شود (به اندازهٔ یک واحد) ← مثلاً سرعت همگرایی $\frac{c}{n}$ را به $\frac{c}{n^2}$ افزایش می دهد.

مشتق گیری: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \frac{n\pi}{L} \sin \frac{n\pi}{L} x + b_n \frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi}{L} x\right)$

مشتق گیری باعث کاهش سرعت همگرایی می شود (به اندازه یک واحد) ← مثلاً سرعت همگرایی $\frac{c}{n^5}$ را به $\frac{c}{n^4}$ کاهش می دهد.

نکته: اگر سری فوریه تابعی، پیوسته بود ← می توانیم از سری فوریه مشتق گیری کنیم. ولی اگر ناپیوسته بود اجازه نداریم (چون تابع ناپیوسته است و سرعت همگرایی آن متناسب با $\frac{c}{n}$ می باشد و ما اگر از تابع ناپیوسته مشتق بگیریم، یک واحد از سرعت همگرایی کم می شود که غلط است چون کمترین سرعت همگرایی $\frac{c}{n}$ می باشد و نباید از این کمتر شود).

* رابطه پارسوال *

$$\frac{1}{L}\int_T [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2]$$

نکته: رابطه پارسوال فقط به یک دردی می‌خوره، اونم محاسبه سری‌ها ست.

☑ روش محاسبه سری‌ها با استفاده از سری فوریه

① سری فوریه تابع داده شده را بدست بیار.

② جمله عمومی سری داده شده رو مشخص کن.

۹۰٪ می‌دهند

③ جمله عمومی رو با ضرایب فوریه مقایسه کن

← اگر سرعت همگرایی مشابه بود ← با عددگذاری مناسب و ساده کردن، مقدار سری داده شده رو محاسبه کن.

← اگر سرعت همگرایی مشابه نبود ← با انتگرال‌گیری / مشتق‌گیری / پارسوال روی بسط فوریه‌ی تابع، ضرایب فوریه را مشابه جمله عمومی سری، می‌کنیم.

مثال) اگر $f(x) = \frac{\sin nx}{n}$ باشد مقادیر زیر را بدست آورید:

$S = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ ← جمله عمومی با ضریب فوریه یکی است ← سرعت همگرایی مشابه است ⇐ عددگذاری

$S = \sum \frac{1}{n^2}$ ← سرعت همگرایی یکی نیست ← ① انتگرال‌گیری ② پارسوال ← پارسوال بهتره ← توجه: هر موقع که توان ۲ بود پارسوال راحت تره!

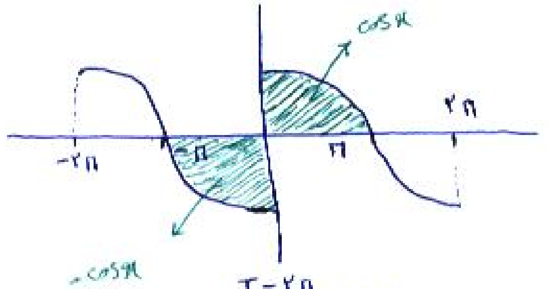
$S = \sum \frac{1}{n^3}$ ← سرعت همگرایی یکی نیست ← دوبار انتگرال‌گیری

$S = \sum \frac{1}{n^4}$ ← دوبار انتگرال و یکبار پارسوال

مثال) با استفاده از سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} \cos x & 0<x<\pi \\ \cos x & -\pi<x<0 \end{cases}$ درستی مقادیر زیر را بدست آورید.
ص ۵۲

$$\frac{1}{1^2\times 3^2}+\frac{1}{3^2\times 5^2}+\frac{1}{5^2\times 7^2}+\cdots=\frac{\pi^2-8}{16}$$

حل) ابتدا سری فوریه تابع داده شده را رسم می‌کنیم:



$\Rightarrow$ فرد $\rightarrow a_0=a_n=0$

$T=2\pi \rightarrow L=\pi$
$T=2L$

نکته: $\cos(1+n)\pi=\cos(1-n)\pi=-\cos n\pi$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi +\cos x\sin nx\,dx=\frac{+2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\left[\sin(1+n)x+\sin(1-n)x\right]dx$$

$$=\frac{+1}{\pi}\left(\frac{-1}{1+n}\cos(1+n)x-\frac{1}{1-n}\cos(1-n)x\right)_0^\pi=\frac{+1}{\pi}\left(\frac{-1}{1+n}\cos(1+n)\pi-\frac{1}{1-n}\cos(1-n)\pi \rightarrow\right.$$

$$\left.\rightarrow\left(-\frac{1}{1+n}-\frac{1}{1-n}\right)\right)$$

$$=\frac{+1}{\pi}\left(\frac{-1}{1+n}(-\cos n\pi)-\frac{1}{1-n}(-\cos n\pi)+\frac{1}{1+n}+\frac{1}{1-n}\right)$$

$$=\frac{+1}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{1+n}+\frac{\cos n\pi}{1-n}+\frac{1}{1+n}+\frac{1}{1-n}\right)=\frac{+1}{\pi}\left(\frac{1+\cos n\pi}{1+n}+\frac{1+\cos n\pi}{1-n}\right)$$

$$=\frac{+1}{\pi}\left(\frac{2+2\cos n\pi}{1-n^2}\right)=\frac{2+2\cos n\pi}{\pi(n^2+1)}=\frac{2}{\pi(n^2+1)}(1+\cos n\pi)=\frac{2}{\pi}\frac{4\cos n\pi}{1-n^2}$$

$$=\frac{2n}{\pi}\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1}$$

من بدون n بدست میارم ؟!

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(1+\cos n\pi)}{\pi(n^2-1)}\sin nx=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(1+\cos n\pi)}{n^2-1}\sin nx$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\boxed{\cos x \quad 0<x<\pi} \\ -\cos x \quad -\pi<x<0\end{cases}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(1+\cos n\pi)}{n^2-1}\sin nx$$

$$\Rightarrow 0<x<\pi:\ \cos x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(1+\cos n\pi)}{n^2-1}\sin nx$$

هر دو یکی است و هیچ تفاوتی با هم ندارند. درصورت انتخاب یکی از این دو، دومی را انتخاب می‌کنیم چون در اولی باید در دو بازه انتگرال بگیریم ولی در اولی اینطور نیست!

نکته: هر موقع که در بسط فوریه تابع، عبارات $1+\cos n\pi$ ، $1-\cos n\pi$ ، $\sin\frac{n\pi}{2}$ ، $\cos\frac{n\pi}{2}$ داشتیم، قبل از بدست آوردن سری آن، مقدار دهی می‌کنیم.

ما اینجا $1+\cos n\pi$ داریم

$$\longrightarrow 1+\cos n\pi = 1+(-1)^n \begin{cases} \overset{\text{زوج}}{n=2k} \longrightarrow 1+\cos n\pi = 2 \\ \underset{\text{فرد}}{n=2k-1} \longrightarrow 1+\cos n\pi = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{n=2k}{n}}{\underset{n=2k}{n^2-1}}(2)\underset{n=2k}{\sin nx} \longrightarrow \cos x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k}{(2k)^2-1}\sin 2kx$$

$$\xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{از طرفین}} \sin x = \frac{+4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{2k}}{4k^2-1}\times\frac{-1}{\cancel{2k}}(\cos 2kx)+C \longrightarrow$$

چرا انتگرال گرفتیم؟ چون می‌خواستم که ضریب $2k$ حذف شود.

$$\longrightarrow \sin x = \frac{-4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx + C$$

همیشه مقدار ثابت سمت راست، مقدار ثابت سری فوریه سمت چپ است یعنی مقدار ثابت $\sin x$ می‌باشد.

$$* a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{-2}{\pi}(\underbrace{\cos\pi}_{-1}-1) = \frac{+4}{\pi} \longrightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}$$

$$\longrightarrow \sin x = \frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx$$

$$\longrightarrow \text{پارسوال}: \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+\underset{\text{صفر}}{b_n^2}) \longrightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}$$

انتگرال در یک دوره تناوب

$f(x)=\cos x$ فرد است و اگر به توان ۲ برسد، زوج می‌شود $0<x<\pi$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\underbrace{f^2(x)}_{\text{زوج}}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f^2(x)\,dx$$

نکته: $\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$

$$\longrightarrow \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2} \longrightarrow 1 = \frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}$$

$$\longrightarrow \underbrace{1-\frac{8}{\pi^2}}_{\frac{\pi^2-8}{\pi^2}} = \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2} \longrightarrow \frac{\pi^2-8}{\cancel{\pi^2}} = \frac{16}{\cancel{\pi^2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2} \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16}$$

(برق ۸۹) صفحه ۷۰۷: تابع متناوب $f(x)$ در یک دوره تناوب به صورت:

$$f(x)=\begin{cases}1 & -\alpha<x<\alpha\\ 0 & -\pi<x<-\alpha \ \text{و}\ \alpha<x<\pi \ ,\ (0<\alpha<\frac{\pi}{2})\end{cases}$$

است. اگر بسط فوریه تابع به صورت $f(x)=\frac{\alpha}{\pi}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\alpha}{1}\cos x+\frac{\sin 2\alpha}{2}\cos 2x+\frac{\sin 3\alpha}{3}\cos 3x+\dots\right)$ باشد، در این صورت

حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n}\right)^2$ کدام است؟

① $\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$ ② $\frac{(\pi-\alpha)(\pi+\alpha)}{2}$

③ $\alpha(\pi-\alpha)$ ④ $(\pi-\alpha)(\pi+\alpha)$

حل: $f(x)=\overset{\frac{a_0}{2}}{\frac{\alpha}{\pi}}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\overset{a_n}{\frac{2\sin n\alpha}{\pi\ \ n}}\cos nx$ $\qquad \frac{n\pi}{L}=n\longrightarrow L=\pi$

انتگرال در یک دوره تناوب

پارسوال $\frac{\cancel{1}\,2}{L}\int_{\cancel{-L}\,0}^{L} f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+\cancel{b_n^2})\longrightarrow \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\alpha}1^2\,dx=\frac{2\alpha^2}{\pi^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\sin n\alpha}{n\pi}\right)^2$

f(x) زوج است و اگر هم به توان ۲ برسد، باز هم زوج می‌ماند.

$\frac{a_0}{2}=\frac{\alpha}{\pi}\to a_0=\frac{2\alpha}{\pi}\to a_0^2=\frac{4\alpha^2}{\pi^2}\to\frac{a_0^2}{2}=\frac{\frac{4\alpha^2}{\pi^2}}{\frac{2}{1}}=\frac{4\alpha^2}{2\pi^2}=\frac{2\alpha^2}{\pi^2}$

$\to\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}dx=\frac{2\alpha^2}{\pi^2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}\to\frac{2}{\pi}(\alpha)-\frac{2\alpha^2}{\pi^2}=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin n\alpha)^2}{n^2}$

$\to\frac{2\alpha\pi-2\alpha^2}{\cancel{\pi^2}}=\frac{4}{\cancel{\pi^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin n\alpha)^2}{n^2}\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin n\alpha)^2}{n^2}=\frac{2\alpha\pi-2\alpha^2}{4}$

$\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin n\alpha)^2}{n^2}=\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\alpha^2}{2}$

$=\frac{\alpha\pi-\alpha^2}{2}$

$=\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$ گزینه «۱»

(مکانیک ۷۵) صفحه ۹۶: اگر $-\pi<x<\pi$ و $f(x)=2x+1$ دارای سری فوریه $f(x)=1-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}$ باشد، کدامیک از عبارات زیر درست است؟

① با انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری فوریه فوق می‌توان سری فوریه $f(x)=x^2+x$ و $-\pi<x<\pi$ را بدست آورد.

از سری فوریه داده شده در تست انتگرال گرفتیم و $x^2+x=x+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx+c \rightarrow x^2=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx+c$

سری فوریه x^2 بدست آمد. پس گزینه ① غلط است.

نکته مهم: اگر در بسط فوریه $f(x)$، $\frac{a_0}{2}$ مخالف صفر باشد، با انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری فوریه $f(x)$، سری فوریه $\int f(x)\,dx$ بدست نمی‌آید بلکه سری فوریه $\int f(x)\,dx-\frac{a_0}{2}x$ بدست می‌آید (درحالی‌که اگر $\frac{a_0}{2}$ صفر باشد، سری فوریه $\int f(x)dx$ بدست می‌آید).

② با مشتق‌گیری جمله به جمله از سری فوریه فوق می‌توان سری فوریه تابع $g(x)=2$ برای $-\pi<x<\pi$ را بدست آورد.

$2=-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos nx \longrightarrow$ اگر تابع پیوسته باشد، حق مشتق‌گیری داریم $\longrightarrow f(x)=2x+1 \xrightarrow[\text{است}]{\text{مرزی}} -\pi<x<\pi$ درواست $f(\pi)=2\pi+1$، حرصیب $f(-\pi)=-2\pi+1$ ← که نیستند و ناپیوسته است $\Rightarrow$ حق مشتق‌گیری نداریم

روش دوم: سرعت همگرایی $\alpha\frac{c}{n}$ از روی سری فوریه داده شده $\Rightarrow$ پس تابع $f(x)$ داده شده حتماً ناپیوسته است $\Leftarrow$ حق مشتق‌گیری نداریم

روش سوم: سرعت همگرایی $\alpha\frac{c}{n}$ $\longrightarrow$ اگر مشتق بگیریم، سرعت همگرایی را کم می‌کند $\Rightarrow$ حق مشتق‌گیری نداریم

روش چهارم: سری فوریه عدد ثابت برابر خودش می‌شود $\longrightarrow$ درحالی‌که این طور نشده! $2\neq-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos nx$

③ حد سری متناوب $\dots+\frac{1}{7}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-1$ برابر $\frac{\pi}{4}$ می‌شود.

④ مقدار تابع f در نقطه ناپیوستگی $x=\pi$ برحسب سری فوریه برابر $f(\pi)=2$ خواهد بود.

$$\text{مقدار سری فوریه در نقطه } x_0=\frac{\lim_{x\to 0^-}f(x)+\lim_{x\to 0^+}f(x)}{2}$$

$$f(\pi)=\frac{\lim_{x\to\pi}f(x)+\lim_{x\to-\pi}f(x)}{2}=\frac{(2\pi+1)+(-2\pi+1)}{2}=1\longrightarrow f(\pi)=1$$

گزینه (۳) صحیح است.

حل گزینه ۳

ابتدا جمله عمومی سری را می‌نویسیم $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ یکی را درست می‌کنیم و بقیه خودش درست می‌شود.

$\xrightarrow[\text{سرعت همگرایی تابع } f(x) \text{ نیز } \frac{c}{n} \text{ می‌باشد پس با عددگذاری به ما جواب را می‌دهد.}]{\text{سرعت همگرایی } \frac{c}{n} \text{ است}}$ مثلاً $x = \frac{\pi}{2}$ که نقطه پیوستگی است. $\rightarrow 2 * \frac{\pi}{2} + 1 = 1 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{\pi}{2} n}{n}$

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n = 2k \quad \text{زوج} \\ (-1)^{k+1} & n = 2k-1 \quad \text{فرد} \end{cases}$$

متوازی

$$\boxed{\text{نکته: } \sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^{k+1}}$$

$$\pi = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{2k-1}}_{-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

(مواد ۸۹) صفحه ۷۴۲: سری فوریه تابع $f(x)$ در بازه $(0, 2\pi)$ به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

اگر سری فوریه $\int_0^x f(y)\, dy$ در همان بازه به صورت

$$\int_0^x f(y)\, dy = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

باشد، در این صورت B_n برابر است با:

① $\frac{a_n}{n}$ ② $\frac{b_n}{n}$ ③ $\frac{1}{n}(a_n - a_0)$ ④ $\frac{1}{n}(b_n - a_n)$

«روش اول»

حل: B_n نمی‌تواند برحسب b_n باشد. $\longrightarrow$ گزینه‌های ② و ④ غلط‌اند، چون:

$\Rightarrow$ گزینه «۳»

گزینه ① نیز غلط است $\xrightarrow{\text{چون}}$ $\frac{a_0}{2}$ مخالف صفر است، وقتی که انتگرال می‌گیریم، a_0 خواهیم داشت.

«روش دوم» $\int f(x)\, dx = \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx + c$ $\quad \frac{-a_0}{n}$

از دو طرفین انتگرال می‌گیریم.

چرا؟! چرا؟!

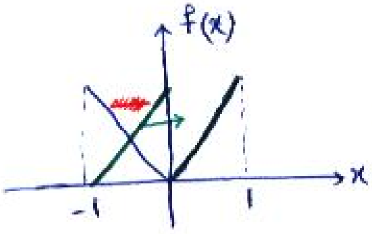
چون B_n را خواسته، b_n را حساب می‌کنیم $\rightarrow b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{a_0}{2} x}_{f(x)} \sin nx\, dx = \frac{-a_0}{n} \Rightarrow \underbrace{B_n = \frac{a_n}{n} - \frac{a_0}{n}}_{\text{چرا؟!}} = \frac{a_n - a_0}{n}$ $\quad b_n$

~~3~~4

(برق ۷۶) صفحه ۹۶_تست ۴۵: حاصل کدام یک از سری‌های زیر را می‌توان از بسط فوریه تابع متناوب $f(x)=|x|$ در فاصله $(-1, 1)$ بدست آورد.

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

حل: شکل سری فوریه



$2n-1 \longrightarrow$ فقط شامل جمله‌های با n فرد می‌باشد $\longrightarrow$ منطبق است $\longrightarrow$

گزینه «۱»

(مخابرات کشتی ۸۴) صفحه ۸۶_تست ۲۳: اگر سری فوریه $f(t)=\begin{cases} t^2 & 0<t<2 \\ f(t+2)=f(t) \end{cases}$ بصورت زیر باشد:

$$f(t)=\frac{4}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi t+\left(\frac{-4}{n\pi}\right)\sin n\pi t\right]$$

مطلوبست محاسبه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

۱) $\frac{\pi^4}{6}$ ۲) $\frac{\pi^2}{9}$ ۳) $\frac{\pi^4}{90}$ ۴) $\frac{\pi^2}{96}$

$\boxed{\frac{n\pi}{L}=n\pi \longrightarrow L=1}$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{4}{3} \longrightarrow a_0=\frac{8}{3} \longrightarrow a_0^2=\frac{64}{9} \longrightarrow \frac{a_0^2}{2}=\frac{\frac{64}{9}}{\frac{2}{1}}=\frac{64\div 2}{18\div 2}=\frac{32}{9}$$

حل: از پارسوال استفاده می‌کنیم.

$$\frac{1}{L}\int_T f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{1}\int_0^2 t^4\,dt=\frac{32}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{16}{n^4\pi^4}+\frac{16}{n^2\pi^2}\right)$$

انتگرال در یک دوره تناوب

چرا؟

$$\text{if}: t=0 \xrightarrow{f(0)} 2=\frac{4}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}$$

$f(t+2)=f(t) \xrightarrow{t=0} f(2)=f(0)$

ما با $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}$ کار داریم؛ پس فقط همین را بدست می‌آوریم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^2\pi^2} = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^2\pi^2} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{32}{5} = \frac{32}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4\pi^4} + \frac{8}{3} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4\pi^4} = \frac{32}{5} - \frac{32}{9} - \frac{8}{3}$$

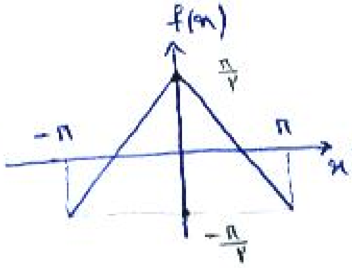
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{16}\left(\frac{32}{5} - \frac{32}{9} - \frac{8}{3}\right) \cdots \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$ گزینه «۳»

(مکانیک ۹۰) ـ مسئله: با استفاده از سری فوریه مثلثاتی تابع
$$f(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2} & -\pi < t \le 0 \\ -t + \frac{\pi}{2} & 0 \le t \le \pi \end{cases}$$
مقدار زیر کدام است؟

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2K-1)^2} + \cdots$$

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi^2}{8}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi^2}{4}$

حل: شکل سری فوریه تابع ←



← تابع زوج است ← $b_n = 0$ ← $a_0 = \frac{\text{مساحت}}{T} = 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(-t + \frac{\pi}{2}\right)\cos nt\, dt = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos n\pi}{n^2}\right)$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\,\frac{1-\cos n\pi}{n^2}\cos nx$$

مقداردهی: $1 - \cos n\pi = \begin{cases} 0 & n = 2K \\ 2 & n = 2K-1 \end{cases}$

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2K-1)x}{(2K-1)^2} \xrightarrow[\text{سوال}]{\text{خواسته}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2K-1)^2} = ?$$

$$t = 0 \longrightarrow f(0) = \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2K-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \longrightarrow$$ گزینه «۲»

$f(0)$ نقطه پیوستگی است

مقدار سری فوریه در $t=0$ $= \dfrac{\lim_{t\to 0^-} f(t) + \lim_{t\to 0^+} f(t)}{2} = \dfrac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}$

(نانو ۹۰): درصورتی که برای $0<x<2$ داشته باشیم $x^2=\frac{4}{3}+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}x$ ، مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

برابر است با:

۱) $\frac{\pi^4}{30}$ ۲) $\frac{\pi^4}{32}$ ۳) $\frac{\pi^4}{90}$ ۴) $\frac{\pi^4}{96}$

چون سری داده شده، زوج است، پس برای محاسبه سری خواسته شده از قضیه پارسوال استفاده می‌کنیم

(برق ۷۹) - صفحه ۹۷ - تست ۶۹: از میان کلیه توابع مجموعهٔ $\{\alpha+\beta\cos x+\gamma\sin x : \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

کدام یک از توابع زیر نزدیکتر هستند (به معنی کمترین مربعات).

$$f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi<x<-\frac{\pi}{2} \\ -a\left(x+\frac{\pi}{2}\right) & -\frac{\pi}{2}<x<0 \\ a\left(x-\frac{\pi}{2}\right) & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$$

(a یک ثابت حقیقی است)

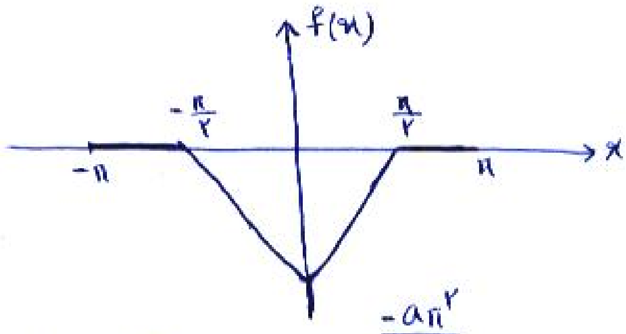
۱) $\frac{-a\pi}{4}-\frac{2a}{\pi}\cos x$ ۲) $\frac{-a\pi}{8}-\frac{2a\cos x}{\pi}$ ۳) $\frac{-a\pi}{8}+\frac{2a}{\pi}\cos x$ ۴) $\frac{-a\pi}{8}-\frac{2a}{\pi}\cos x+\frac{2a}{\pi}\sin x$

حل: تابعی نزدیک است که ضرائب α ، β و γ آن، ضرائب فوریه باشند. یعنی:

$\alpha \to a_0$ و $\beta \to a_n$ و $\gamma \to b_n$

$$\left.\begin{array}{l} T=2\pi \\ T=2L \end{array}\right\} \to L=\pi \Rightarrow \begin{cases} \beta \to a_1 \\ \gamma \to b_1 \end{cases}$$

شکل سری فوریه



$\to$ تابع زوج است $\to b_n=0 \to \gamma=0 \to$ فقط cos داریم

گزینه ④ غلط است

$$\frac{a_0}{2}=\frac{\text{مساحت در یک دوره تناوب}}{T}=\frac{\frac{-a\pi^2}{4}}{2\pi}=\frac{-a\pi}{8} \to$$ گزینه ① غلط است

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x\,dx=\frac{-2a}{\pi} \to$$ گزینه ② درست است

نکته: می‌توانستیم از بین گزینه‌های ② و ③ به این نتیجه برسیم که گزینه ② صحیح می‌باشد. چون که در صورت سؤال گفته به کدام نزدیکتر است. یعنی اگر $-\frac{2a}{\pi}$ را انتخاب کنیم، برازش بیشتری با شکل سری فوریه خواهیم داشت. بعبارت دیگر چون شکل سری فوریه در سمت منفی می‌باشد، برای اینکه نزدیک هم شوند، $-\frac{2a}{\pi}$ را انتخاب می‌کنیم.

(برق ۸۴) صفحه ۸۲ ـ تست ۵: اگر برای $0 < x < 2$ داشته باشیم $x = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{2}x + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}x \dots\right)$ در این صورت ضریب جمله $\cos \pi x$ در بسط عبارت $x(x-1)$ عبارت است از:

۱) $\frac{2}{\pi^2}$ ۲) $\frac{4}{\pi^2}$ ۳) $\frac{8}{\pi^2}$ ۴) $\frac{16}{\pi^2}$

حل: $2 \times \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{2\pi} = \frac{4}{\pi^2}$ ← گزینهٔ «۲»

ضریب جمله $\cos \pi x$ را در بسط $x^2 - x$ می‌خواهیم. x را در $x^2 - x$ حذف می‌کنیم، چون در صورت سؤال خودش x داده است. پس فقط x^2 می‌ماند. از x به x^2 می‌خواهیم برسیم. پس از x انتگرال می‌گیریم (می‌شود $\frac{x^2}{2}$). توجه شود که نیازی به انتگرال گیری از کل x داده شده از صورت سؤال نیست، چون فقط ضریب $\cos \pi x$ را می‌خواهیم. که متناظر با $-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{2}x$ می‌باشد؛ یعنی $-\frac{1}{2}\sin \pi x$. اگر از این انتگرال بگیریم می‌شود: $-\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\pi}\cos \pi x\right)$. در نتیجه $\frac{1}{2\pi}\cos \pi x$.

$$\Rightarrow 2 \times \frac{1}{2\pi} \times \frac{4}{\pi}$$

2: برای حذف $\frac{x^2}{2}$

$\frac{1}{2\pi}$: ضریب جمله $\cos \pi x$

$\frac{4}{\pi}$: باید باشد؛ چون $\frac{4}{\pi}$ در صورت سؤال داده و در کل x ضرب شده است.

(کامپیوتر ۸۱) صفحه .. اگر برای $-\pi < x < \pi$ داشته باشیم: $x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right)$

عبارت $(\pi + x)(\pi - x)$ در بازه‌ی $-\pi < x < \pi$ کدام است؟

۱) $\pi^2 - 4\left(\sin^2 x - \frac{\sin^2 2x}{2^2} + \frac{\sin^2 3x}{9} - \dots\right)$

۲) $\frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots\right)$

۳) $\frac{2\pi^2}{3} + 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots\right)$

۴) $\frac{\pi^2}{3} + 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots\right)$

حل: $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\,dx = \frac{4\pi^2}{3} \longrightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{2\pi^2}{3} \longrightarrow$ گزینهٔ «۳»

اگر دو گزینه داشتیم که $\frac{2\pi^2}{3}$ بود، به این صورت عمل می‌کنیم: از x می‌خواهیم به x^2 برسیم پس انتگرال می‌گیریم (انتگرال $\sin$ می‌شود $-\cos$) پس گزینهٔ ① غلط است. و $-\cos$ در یک منفی ضرب می‌شود و باید $+\cos$ شود ← گزینهٔ «۲» غلط.

(برق ۷۱): سری فوریه تابع $-\pi < x < \pi$ و $f(x)=\frac{x}{2}$ به صورت زیر می‌باشد.

$$f(x)=\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\dots$$

آنگاه سری فوریه تابع $-\pi < x < \pi$ و $g(x)=x^2$ عبارتست از:

۱) $g(x)=2\left(\cos x-\frac{\cos 2x}{2^3}+\dots\right)$

۲) $g(x)=4\left(\frac{\pi^2}{12}-\cos x+\frac{\cos 2x}{2^2}-\dots\right)$

۳) $g(x)=4\left(-\sin x+\frac{\sin 2x}{2^2}-\dots\right)$

۴) $g(x)=4\left(\sin x+\frac{\sin 2x}{2^2}-\dots\right)$

حل: از x می‌خواهیم به x^2 برسیم ⇐ انتگرال می‌گیریم ⇐ درست ⇐ گزینه‌های ۳ و ۴ غلط هستند ⇐ تفاوت گزینه‌های ۱ و ۲ در $\frac{a_0}{2}$ است ⇐ گزینه (۲) صحیح است؛ چون $\frac{a_0}{2}$ باید داشته باشیم. یعنی به دلیل اینکه شکل سری فوریه $f(x)=x^2$ درست بالای محور می‌باشد؛ پس $\frac{a_0}{2}$ دارد.

حال فرض می‌کنیم که در دو گزینه $\frac{a_0}{2}$ وجود داشته باشد. ما می‌رویم سمت علامت گزینه‌ها. می‌بینیم که در گزینه ۱، $\cos x$ + داریم و غلط است چون انتگرال $\sin$ می‌شود $-\cos$.

(برق ۷۸): اگر بسط به سری کسینوسی فوریه $0 < x < \pi$ و $f(x)=x$ به صورت زیر باشد:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\dots\right)$$

بسط به سری فوریه سینوسی $0 < x < \pi$ و $g(x)=x(\pi-x)\frac{\pi}{8}$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{(2n)^3}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n^3}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$

حل: هرگاه $f(x)$ صورت سؤال از درجه پائین بود و تابع بعدی ما از درجه بالاتری بود، حتماً از انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم. توجه اینکه هنگام انتگرال‌گیری، هارمونیک‌ها هیچ تغییری نمی‌کند. پس در نتیجه، انتگرال $\cos$، $\sin$ می‌شود. چون $f(x)$ هارمونیک‌های فرد دارد، پس گزینه‌ها نیز باید هارمونیک‌های فرد داشته باشند ($2n+1$ یا $2n-1$) ⇐ گزینه‌های ۱ و ۳ غلط هستند.

تفاوت گزینه‌های ۲ و ۴ در $2n+1$ و $2n-1$ می‌باشد. در گزینه ۲ اگر $n=0$ باشد؛ از $\sin 3x$ شروع می‌شود در حالی که $f(x)$ از $\cos x$ شروع می‌شود ⇐ گزینه ۲ غلط می‌باشد. اگر $n=1$ در گزینه ۴ قرار دهیم؛ از $\sin x$ شروع می‌شود و درست است ⇐ گزینه (۴)

$$\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{2}x \longrightarrow \frac{1}{2}x(x-\pi)$$

(برق ۸۷): درصورتی که سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=x^2$ و $-L\le x\le L$ بصورت زیر باشد:

$$\frac{1}{3}L^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L^2}{(n\pi)^2}(-1)^n\cos\frac{n\pi}{L}x$$

آنگاه سری فوریه مثلثاتی تابع $\frac{x}{3}\left(\frac{x^2}{L^2}-1\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{\pi n^3}(-1)^n\sin\frac{n\pi}{L}x$

۲) $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin\frac{n\pi}{L}x$

۳) $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nL}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x$

۴) $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nL}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{L}x$

حل: از x^2 می‌خواهیم به x^3 برسیم؛ پس انتگرال می‌گیریم.

$$\frac{x^3}{3}-\frac{L^2}{3}x \longrightarrow \frac{L^2}{3}\left(\frac{x^3}{L^2}-x\right)$$

انتگرال‌گیری باعث افزایش سرعت همگرایی می‌شود ← گزینه «۱»

یعنی سرعت همگرایی $\frac{c}{n^2}$ بود و با انتگرال‌گیری باید به $\frac{c}{n^3}$ برسیم.

(کامپیوتر ۸۹): اگر برای $0<x<2$ داشته باشیم: $x=\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}-\cdots\right)$

در این صورت دو جمله اول بسط فوریه تابع زوج $f(x)=1-\frac{x^2}{4}$ در فاصله $0<x<2$ عبارتست از:

۱) $\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}-\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}+\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}$

حل: گزینه «۳»

$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{a_0}{2}=\frac{2}{3}\Rightarrow$ گزینه‌های ① و ④ غلط هستند

انتگرال $\sin$، $\cos$ می‌شود و باید در یک منفی ضرب شود $\xrightarrow[\text{داریم}]{\text{چون } -\frac{x^2}{4}}$ $+\cos$ ⇐ گزینه «۳» صحیح است.

(مکانیک ۸۷) فرض کنیم $\frac{d^2u}{dx^2}+k^2u=f(x)$ که در آن $k\neq 0$ ثابت حقیقی و $-L<x<L$ ($L>0$ ثابت) و

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right]$ در این صورت $u(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\frac{n\pi}{L}x+B_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right]$ که در آن:

۱) $A_n=\dfrac{b_n}{k^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$ $\quad B_n=\dfrac{a_n}{k^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$ $\quad A_0=\dfrac{a_0}{k^2}$

۲) $A_n=\dfrac{a_n}{k^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$ $\quad B_n=\dfrac{b_n}{k^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$ $\quad A_0=\dfrac{a_0}{k^2}$

۳) $A_n=\dfrac{a_n}{k^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$ $\quad B_n=\dfrac{b_n}{k^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$ $\quad A_0=0$

۴) $A_n=\dfrac{a_n}{k^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$ $\quad B_n=\dfrac{b_n}{k^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$ $\quad A_0=\dfrac{a_0}{k^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$

حل) گزینه «۲»

انتگرال فوریه:

از توابع گروه سوم توابعی که در بازه‌ی ($+\infty$ و $-\infty$) انتگرال پذیر باشند، انتگرال فوریه دارند

گروه اول و دوم انتگرال فوریه ندارند. یعنی اگر تابعی سری فوریه داشته باشد، دیگر انتگرال فوریه ندارد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < M$$

مثال) تابع زیر دارای انتگرال فوریه هست یا نه؟

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & x>\pi\\ 0 & x<\pi\end{cases}$$

حل: $\int_{-\infty}^{+\infty} |\cos x|\,dx=\infty$

پس این تابع انتگرال فوریه ندارد. پس در واقع توابعی انتگرال فوریه دارند که در بازه خود انتگرال پذیر باشند.

نکته: اگر تابعی انتگرال فوریه داشته باشد، سری فوریه ندارد.

نکته: همیشه تابعی که انتگرال فوریه دارد، باید از $-\infty$ تا $+\infty$ تعریف شده باشد. در غیر اینصورت انتگرال فوریه ندارد.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\quad\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[A(w)\cos wx+B(w)\sin wx\right]dw$$

$$A(w)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\quad\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos wx\,dx$$

$$B(w)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\quad\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin wx\,dx$$

توجه: هم ضریب $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ درست است و هم ضریب $\frac{1}{\pi}$، و انتخاب ما $\frac{1}{\pi}$ می‌باشد.

اگر $f(x)$ زوج باشد
$$\begin{cases}B(w)=0\\ A(w)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}f(x)\cos wx\,dx\\ f(x)=\displaystyle\int_0^{\infty}A(w)\cos wx\,dw\end{cases}$$

اگر $f(x)$ فرد باشد
$$\begin{cases}A(w)=0\\ B(w)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}f(x)\sin wx\,dx\\ f(x)=\displaystyle\int_0^{\infty}B(w)\sin wx\,dw\end{cases}$$

مثال) انتگرال فوریه توابع زیر را بدست آورید:

$$\text{①}\ f(x)=\begin{cases} 0 & x<-3 \\ 2 & -3<x<-1 \\ 1 & -1<x<0 \\ x & 0<x<1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$$

حل: تابع $f(x)$ نه فرد و نه زوج است.

$$\rightarrow A(w)=\frac{1}{\pi}\left[\cancel{\int_{-\infty}^{-3} 0\cos wx\,dx}+\int_{-3}^{-1} 2\cos wx\,dx+\int_{-1}^{0} 1\cos wx\,dx+\int_{0}^{1} x\cos wx\,dx+\cancel{\int_{1}^{\infty} 0\cos wx\,dx}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[2\int_{-3}^{-1}\cos wx\,dx+\int_{-1}^{0}\cos wx\,dx+\int_{0}^{1}x\cos wx\,dx\right]$$

$$B(w)=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-3}^{-1} 2\sin wx\,dx+\int_{-1}^{0} 1\sin wx\,dx+\int_{0}^{1}x\sin wx\,dx\right]$$

$$\text{②}\ f(x)=e^{-|x|}$$

حل: تابع $f(x)$ زوج است

$$\rightarrow B(w)=0 \quad \text{و} \quad A(w)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos wx\,dx=\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{1+w^2}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \left.\frac{s}{s^2+w^2}\right|_{s=1}=\frac{1}{1+w^2}$$

نکته: $\mathcal{L}\{\cos wx\}=\dfrac{s}{s^2+w^2}$

نکته: $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-ax} f(x)\,dx=\left.F(s)\right|_{s=a}$ $\longrightarrow$ یعنی از $f(x)$ لاپلاس بگیر و بجای s ضریب e^{-ax} را بذار.

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}\frac{2}{\pi(1+w^2)}\cos wx\,dw=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+w^2}\cos wx\,dw$$

«نکته» $A(w)$ نسبت به w تابعی زوج است و $B(w)$ نسبت به w تابعی فرد است. یعنی $\left.\begin{aligned}A(-w)&=A(w)\\ B(-w)&=-B(w)\end{aligned}\right\}$

برق ۷۹ : در معادله انتگرالی زیر، تابع $f(w)$ کدام است؟

$$\int_0^\infty f(w)\cos wx\, dw = \begin{cases}1-x & 0\le x\le 1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

۱) $\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos w}{w^2}\right)$

۲) $\frac{2}{\pi}\left(\frac{1+\cos w}{w^2}\right)$

۳) $\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos w-1}{w^2}\right)$

۴) $\frac{2}{\pi}\left(\frac{2\sin w}{w}+\frac{1-\cos w}{w^2}\right)$

حل) $f(w)=A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-x)\cos wx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos w}{w^2}\right)\longrightarrow$ گزینه (۱)

برق ۷۷ : در صورتیکه $f(x)=\int_0^\infty \frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$ و علاوه بر این $f(x)=\begin{cases}0 & x<\alpha\\ c & \alpha<x<\beta\\ 0 & x>\beta\end{cases}$

آنگاه:

۱) $c=\frac{1}{2}$ و $\beta=-\alpha=\pi$

۲) $c=\frac{\pi}{2}$ و $\beta=-\alpha=1$

۳) $c=\frac{1}{2}$ و $\beta=-\alpha=1$

۴) $c=\frac{\pi}{2}$ و $\beta=-\alpha=\pi$

حل) $\beta=-\alpha$ (خودش گفته) و $A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\beta c\cos wx\,dx=\frac{2c}{\pi}\frac{\sin\beta w}{w}$

تابع $f(x)$ زوج است $\longrightarrow B(w)=0$ و $A(w)=\frac{\sin\lambda}{\lambda}=\frac{\sin w}{w}$

$$\Rightarrow \frac{2c}{\pi}\frac{\sin\beta w}{w}=\frac{\sin w}{w}\longrightarrow\frac{2c\sin\beta w}{\sin w}=\frac{\pi w}{w}\longrightarrow\frac{2c\,\cancel{\sin\beta w}}{\cancel{\sin w}}=\pi\longrightarrow c=\frac{\pi}{2}$$

چون: $\frac{\sin\beta w}{w}=\frac{\sin w}{w}\Rightarrow\beta=1$

نتیجه: $\begin{cases}c=\frac{\pi}{2}\\ \beta=-\alpha=1\end{cases}$

برق ۸۰: در معادله انتگرالی $\int_0^\infty f(x)\cos wx\, dw = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0<x<1 \\ \frac{1}{4} & x=1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$ تابع $f(w)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sin w}{w}$ ۲) $2\frac{\sin w}{w}$ ۳) $\frac{\sin w}{\pi w}$ ٤) $\frac{2}{\pi}\frac{\sin w}{w}$

حل: $f(w)=A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{2}\cos wx\, dx = \frac{1}{\pi w}\sin w \rightarrow$ «گزینه ۳»

برق ۸۱: معادله انتگرالی زیر را در نظر بگیرید.

$$\int_0^\infty f(w)\sin wx\, dw = \begin{cases} 1-x & 0<x<1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$$

در این صورت $f(w)$ کدام است؟

۱) $\frac{2(w-\sin w)}{\pi w^2}$ ۲) $\frac{2(w+\sin w)}{\pi w^2}$

۳) $\frac{2(w-2\cos w-\sin w)}{\pi w^2}$ ٤) $\frac{2(2\cos w-w-\sin w)}{\pi w^2}$

حل) $f(w)=B(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\sin wx\, dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{w}-\frac{\sin w}{w^2}\right)=\frac{2}{\pi}\frac{w-\sin w}{w^2}$ «گزینه ۱»

تابع $f(x)$ فرد است.

برق ۸٤: مرحله؛ $\int_0^\infty g(t)\cos tx\, dt = \begin{cases} 1 & |x|<a \\ 0 & |x|>a \end{cases}$ باشد. $g(0)$ کدام است؟

۱) $2a$ ۲) $\frac{a}{\pi}$ ۳) $\frac{2}{\pi}$ ٤) $\frac{2a}{\pi}$

$t \rightarrow w$

حل: $\int_0^\infty A(w)\cos wx\, dw = \begin{cases} 1 & |x|<a \\ 0 & |x|>a \end{cases}$

تابع زوج است.

$A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^a 1\cos wx\, dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{w}\sin wx\right)_0^a = \frac{2}{w\pi}(\sin aw) = \frac{2\overset{wa}{\sin wa}}{w\pi}$

$g(0)=A(0)=\frac{2}{\pi}a$ «گزینه ٤»

برق ۸۴: اگر $f(x)$ در رابطه انتگرالی:

$$\int_0^\infty \underbrace{f(x)}_{B(w)}\sin(wx)\,dx+\int_0^\infty \underbrace{x f(x)}_{A(w)}\cos(wx)\,dx=0$$

صدق کند و $f(1)=1$ باشد، در این صورت $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{2x}{x^2+1}$ ۲) $\frac{2x}{x^4+1}$ ۳) $\frac{4x}{(x^2+1)^2}$ ۴) $\frac{4x^3}{(x^2+1)^2}$

حل: چون همه توابع فرد است، پس $f(x)$ فرد خواهد بود.

$$\rightarrow B(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin wx\,dx \Longrightarrow \frac{dB(w)}{dw}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty x f(x)\cos wx\,dx$$

نکته: هرگاه در انتگرال فوریه $x^n f(x)$ دیدید، از $A(w)$ یا $B(w)$ یک بار مشتق بگیرید (نسبت به w). مثلاً اگر $x^3 f(x)$ بود، سه بار از $A(w)$ یا $B(w)$ مشتق می‌گیریم.

در اینجا چون $x f(x)$ ضریب sin بوده، از $B(w)$ مشتق گرفتیم. اگر $x f(x)$ ضریب cos بوده، از $A(w)$ مشتق می‌گیریم.

$$*\begin{cases} B(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin wx\,dx \rightarrow \int_0^\infty f(x)\sin wx\,dx=\dfrac{B(w)}{\frac{2}{\pi}} \\ \dfrac{dB(w)}{dw}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty x f(x)\cos wx\,dx \rightarrow \int_0^\infty x f(x)\cos wx\,dx=\dfrac{\frac{dB(w)}{dw}}{\frac{2}{\pi}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{B(w)}{\frac{2}{\pi}}+\frac{\frac{dB(w)}{dw}}{\frac{2}{\pi}}=0 \rightarrow \frac{\pi B(w)}{2}+\frac{\pi\, dB(w)}{2\, dw}=0 \rightarrow \frac{\pi}{2}B(w)+\frac{\pi}{2}\frac{dB(w)}{dw}=0$$

$$\rightarrow \frac{dB(w)}{B(w)}=-dw \xrightarrow[\text{طرفین}]{\text{انتگرال از}} \int\frac{dB(w)}{B(w)}=\int -dw \rightarrow B(w)=ce^{-w}$$

چون $f(x)$ تابعی فرد است، پس $A(w)$ آن صفر است.

$$\rightarrow f(x)=\int_0^\infty B(w)\sin wx\,dw=\int_0^\infty ce^{-w}\sin wx\,dw=c\,\frac{x}{1+x^2}$$

$$f(1)=1 \rightarrow f(1)=\frac{c}{2}=1 \rightarrow c=2 \Rightarrow f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$$

گزینه (۱)

برق ۷۶: اگر $f(x)=\int_0^\infty a(w)\cos wx\,dw$ باشد، آنگاه $A(w)$ در نمایش $xf(x)=\int_0^\infty A(w)\sin wx\,dw$ کدام است؟

۱) $-\frac{da(w)}{dw}$ ۲) $-\frac{d^2a(w)}{dw^2}$ ۳) $\frac{da(w)}{dw}$ ۴) $-a(w)$

حل: [redacted] $a(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos wx\,dx \longrightarrow \frac{da(w)}{dw}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty -xf(x)\sin wx\,dx$

$A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty xf(x)\sin wx\,dx \Rightarrow A(w)=-\frac{da(w)}{dw}\longrightarrow$ گزینه «۱»

تست ۹۰: در معادله انتگرالی $\int_0^\infty f(w)\cos wx\,dw=\frac{e^{-x}\sin x}{x}$ تابع $f(w)$ کدام است؟

۱) $\frac{-1}{\pi}\text{Arc}\,tg\frac{w^2}{2}$

۲) $\frac{-1}{2}\text{Arc}\,tg\frac{w}{2}$

۳) $\frac{1}{2}\text{Arc}\,tg\frac{w}{2}$

۴) $\frac{1}{\pi}\text{Arc}\,tg\frac{w^2}{2}$

حل: $A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-x}\sin x}{x}\cos wx\,dx \xrightarrow[\text{اول}]{\text{روش}} \frac{2}{\pi}\mathcal{L}\left[\frac{\sin x\cos wx}{x}\right]_{s=1}=\frac{-1}{\pi}tg^{-1}\frac{w^2}{2}$

روش دوم حل انتگرال: $\xrightarrow[\text{به } w \text{ مشتق می‌گیریم}]{\text{از طرفین نسبت}} \frac{dA(w)}{dw}=\frac{-2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\sin x\sin wx\,dx=\frac{-2}{\pi}\mathcal{L}[\sin x\sin wx]_{s=1}$

$$=\frac{-1}{\pi}\mathcal{L}[\cos(1-w)x-\cos(1+w)x]_{s=1}$$

$$=\frac{-1}{\pi}\left[\frac{1}{1+(1-w)^2}-\frac{1}{1+(1+w)^2}\right]$$

$\xrightarrow[\text{طرفین}]{\text{انتگرال از}} A(w)=\frac{-1}{\pi}\int\left[\frac{dw}{1+(1-w)^2}-\frac{dw}{1+(1+w)^2}\right]=\frac{-1}{\pi}\left[tg^{-1}(w-1)-tg^{-1}(w+1)\right]$

$$=\frac{-1}{\pi}tg^{-1}\frac{w-1-w-1}{1+(w-1)(w+1)}=\frac{-1}{\pi}tg^{-1}\frac{-1}{w^2}+c$$

نکته: $tg^{-1}\alpha-tg^{-1}\beta=tg^{-1}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}$

یادآوری $\begin{cases} tg^{-1}x + cotg^{-1}x = \frac{\pi}{2} \\ tg^{-1}x = cotg^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$

$$tg^{-1}x = \pi/2 - cotg^{-1}x \Longrightarrow A(w) = \frac{1}{\pi} tg^{-1}\frac{2}{w^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} cotg^{-1}\frac{2}{w^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} tg^{-1}\frac{w^2}{2} + \overset{-\frac{\pi}{2}}{C}$$

«محاسبه انتگرال توسط انتگرال فوریه»

① انتگرال فوریه تابع مورد نظر را بدست می آوریم.

② عبارت مقابل انتگرال را با عبارت مقابل انتگرال فوریه مقایسه می کنیم. در صورت مشابه بودن (مثل سمت همگرایی) با عددگذاری مناسب و ساده کردن، حاصل انتگرال داده شده را بدست می آوریم. در غیر اینصورت از فرمول پارسوال انتگرال فوریه استفاده می کنیم.

رابطه پارسوال در انتگرال فوریه

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx = \int_0^{\infty}\left[A^2(w)+B^2(w)\right]dw$$

مثال) $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & x<0 \text{ و } x>1\end{cases}$

حل: $x=0 \longrightarrow$ مقدار $=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$

$x=1 \longrightarrow$ مقدار $=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2} \longrightarrow$ مقدار $=1$

$x=2789 \longrightarrow$ مقدار $=0$

$x=4567/5 \longrightarrow$ مقدار $=0$

مثال) با استفاده از انتگرال سینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<a\\ 0 & x>a\end{cases}$ حاصل انتگرال های زیر را بدست بیاورید.

① $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x}\sin x\,dx$

تابع فرد است $\longrightarrow A(w)=0 \longrightarrow B(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^a \sin wx\,dx=\frac{2}{\pi}\,\frac{1-\cos wa}{w}$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos aw}{w}\sin wx\,dw$$

$$\longrightarrow x=a \longrightarrow \frac{0+1}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos aw}{w}\sin aw\,dw$$

«درصورت سوال» بجای $x \leftarrow a$ می گذاریم: $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1-\cos w}{w}\sin w\,dw$

$$\xrightarrow{a=1}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos w}{w}\sin w\,dw=\frac{\pi}{4}$$

④ $\int_0^\infty \frac{\sin^4 w}{w^2}\, dw$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^a (1)^2 dx = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{(1-\cos aw)^2}{w^2}\, dw \rightarrow \frac{2}{\pi} a = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{4\sin^4 \frac{aw}{2}}{w^2}\, dw$$

$$\xrightarrow{a=2} \int_0^\infty \frac{\sin^4 w}{w^2}\, dw = \frac{\pi}{4}$$

کامپیوتر ۷۸ - صفحه ۱۲۸ - تست ۱۶: شکل انتگرالی تابع $f(t)=\begin{cases} 1 & |t|<1 \\ 0 & |t|>1 \end{cases}$ عبارت است از $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\cos wt\, dw$

در این صورت حاصل انتگرال $I=\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x}\, dx$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi^2}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi^2}{4}$

$$I=\int_0^\infty \frac{\sin w^2}{w}\, dw$$

$$w^2=t \rightarrow 2w\,dw = dt \rightarrow dw = \frac{dt}{2w}$$

$$I=\int_0^\infty \frac{\sin t}{w}\frac{dt}{2w} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt \rightarrow \overset{f(x)}{1} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\, dw \rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\, dw = \frac{\pi}{2}$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{4}$$ «گزینه ۳»

کامپیوتر ۹۰ -

$$\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } a} -xe^{-ax} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{-2a\alpha\sin\alpha x}{(a^2+\alpha^2)^2}\, d\alpha \rightarrow xe^{-x} = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha\sin\alpha x}{(1+\alpha^2)^2}\, d\alpha$$

«گزینه ۲»

تبدیل فوریه

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)\,e^{+jwx}\,dw$$

$$F(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-jwx}\,dx$$

انتخاب ما

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)e^{jwx}\,dw \\[2ex] F(w)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-jwx}\,dx \end{cases}$$

نکته: $F(w)$ را تبدیل فوریه $f(x)$ می‌نامند.

مثال) تبدیل فوریه تابع زیر را بدست آورید:

① $$f(x)=\begin{cases} 5 & x<-4 \\ 6 & -4<x<-1 \\ -2 & -1<x<0 \\ x & 0<x<1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$$

$$F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-jwx}\,dx=\int_{-\infty}^{-4}5\,e^{-jwx}\,dx+\int_{-4}^{-1}6e^{-jwx}\,dx+\int_{-1}^{0}-2e^{-jwx}\,dx+\int_{0}^{1}x\,e^{-jwx}\,dx$$

② $$f(x)=e^{-a|x|}$$

$$F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-jwx}\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|x|}e^{-jwx}\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|x|}(\cos wx-j\sin wx)\,dx$$

$$=2\int_{0}^{\infty}e^{-ax}\cos wx\,dx=\frac{2a}{a^2+w^2}$$

$2\int_0^\infty$ ← چون زوج است

sin نداریم

نکته: $e^{-ax}\ ,\ x>0 \xrightarrow{\ \mathcal{L}\ } \dfrac{1}{s+a}$

نکته

$$f(x)=\begin{cases} e^{-ax} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases} \xrightarrow{\ F\ } \frac{1}{s+a}\bigg|_{s=jw}=\frac{1}{jw+a}$$

این غلط است $\rightarrow$ $f(x)=\begin{cases} \cos x & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases} \xrightarrow{\ F\ } \dfrac{s}{s^2+a^2}\bigg|_{s=jw}=\dfrac{jw}{a^2-w^2}$ که غلط است!

خواص تبدیل فوریه

① تغییر مقیاس

$$f(x)\xrightarrow{\ F\ }F(w)$$

$$f(ax)\xrightarrow{\ F\ }\frac{1}{|a|}F\left(\frac{w}{a}\right)$$

② $e^{jax}f(x)\xrightarrow{\ F\ }F(w-a)$

③ $f(x-a)\xrightarrow{\ F\ }e^{-jaw}F(w)$

④ $f^{(n)}(x)\xrightarrow{\ F\ }(jw)^n F(w)$

⑤ $x^n f(x)\xrightarrow{\ F\ }(j)^n F^{(n)}(w)$

⑥ دوگانی

$$f(x)\longrightarrow F(w)$$

$$F(x)\longrightarrow 2\pi f(-w)$$

⑦ کانولوشن

الف) $f(x)*g(x)\xrightarrow{\ F\ }F(w)\,G(w)$

ب) $f(x)\,g(x)\xrightarrow{\ F\ }\dfrac{1}{2\pi}F(w)*G(w)$

کانولوشن $f(x)*g(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-\lambda)g(\lambda)\,d\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)g(x-\lambda)\,d\lambda$

$$\rightarrow \int_0^x f(x-\lambda)\, g(\lambda)\, d\lambda$$

(۸) رابطه پارسوال $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x)\right)^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|F(w)\right|^2 dw$

(۹) $f(x)$ فرد و حقیقی $\longleftrightarrow$ $F(w)$ فرد و موهومی

$f(x)$ زوج و حقیقی $\longleftrightarrow$ $F(w)$ زوج و حقیقی

مثال) با استفاده از تبدیل فوریه $f(x) = e^{-a|x|}$ تبدیل فوریه $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ را بدست آورید و سپس با استفاده از آن تبدیل فوریه تابع $h(x) = x e^{-jx} \cos 2x \, tg^{-1} x$ را محاسبه کنید.

زوج است $\rightarrow F(w) = 2\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos wx \, dx = \frac{2a}{a^2+w^2}$

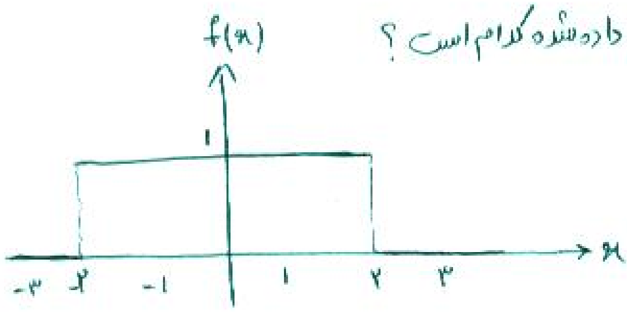
خاصیت دوگان $\rightarrow \dfrac{2a}{x^2+a^2} \xrightarrow{F} 2\pi e^{-a|-w|} = 2\pi e^{-a|w|}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+a^2} \xrightarrow{F} \frac{\pi}{a} e^{-a|w|}$$

$g(x) \xrightarrow{F} G(w)$ هست

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{2jx} + e^{-2jx}\right)}_{\cos 2x} g(x) \xrightarrow{(2)} \frac{1}{2}\left(G(w-2) + G(w+2)\right)$$

$e^{-jx}($



کامپیوتر ۸۲ـ صفحه ۱۵۵ـ تست ۳: تبدیل فوریه تابع $f(x)$ که در شکل مقابل نشان داده شده کدام است؟

۱) $\frac{2\sin(2w)}{w}$ ۳) $2\cos(4w)$

۲) $\frac{4\cos(2w)}{w}$ ۴) $4\sin(2w)$

$$F(w)=2\int_0^2 \cos w\, dw=\frac{2\sin 2w}{w}$$ گزینه «۱»

۱۴۹

کامپیوتر ۷۸ـ صفحه ۱۵۶ـ تست ۹: تبدیل فوریه پاسخ معادله $y'-4y=\begin{cases} e^{-4t} & t\geq 0 \\ 0 & t\leq 0 \end{cases}$ چیست اگر $Y(w)$ تبدیل فوریه $y(t)$ باشد؟ ($j=\sqrt{-1}$).

۱) $\frac{-1}{16+w^2}$ ۲) $\frac{1}{4-jw}$ ۳) $\frac{1}{4+jw}$ ۴) $\frac{1}{16-w^2}$

۴ غلط است

$$(jw)Y(w)-4Y(w)=\frac{1}{4+jw} \longrightarrow Y(w)=\frac{1}{(4+jw)(jw-4)} \longrightarrow Y(w)=\frac{-1}{16+w^2}$$ گزینه «۱»

مواد ۸۲ـ صفحه ۱۵۷ـ تست ۱۰: اگر $F(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\alpha x} f(x)\, dx$ تبدیل فوریه $f(x)$ باشد تبدیل فوریه $2\cos ax\, f(x)$ کدام است؟

۱) $F(\alpha-a)+F(\alpha+a)$ ۲) $F(\alpha-a)-F(\alpha-a)$ ۳) $F(a-\alpha)-F(a+\alpha)$ ۴) $F(a-\alpha)+F(a+\alpha)$

$f(x)\xrightarrow{F} F(w)$ هسته

$$(e^{jax}+e^{-jax})f(x) \xrightarrow{2} F(w-a)+F(w+a)$$ گزینه «۱»

برق ۸۲ - صفحه ۱۵۵ - تست ۱: اگر تبدیل فوریه $\hat{f}(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jwt} f(t)\,dt$ تعریف شود، آنگاه تبدیل فوریه تابع زیر کدام است؟

$f(t)=e^{-a|t|}\sin bt$

$a,b>0$ ثابت

۱) $\dfrac{-j4abw}{(a^2+b^2+w^2)^2-4b^2w^2}$ ۲) $\dfrac{j4bw}{(a^2+b^2+w^2)^2-4b^2w^2}$

۳) $\dfrac{j4abw}{(a^2+b^2+w^2)^2-4b^2w^2}$ ۴) $\dfrac{4abw}{(a^2+b^2+w^2)^2-4b^2w^2}$

$$e^{-a|t|}=g(t)$$

$$g(t)\xrightarrow{F}G(w)$$

$$e^{-a|t|}\sin bt\Rightarrow g(t)\left(e^{jbt}-e^{-jbt}\right)\frac{1}{2j}\xrightarrow{F}\frac{1}{2j}\left(G(w-b)-G(w+b)\right)$$

$$G(w)=2\int_0^{\infty}e^{-at}\cos wt\,dt=\frac{2a}{a^2+w^2}$$

$$F(w)=\frac{1}{2j}\left(\frac{2a}{\underbrace{a^2+(w-b)^2}_{a^2+w^2-2wb+b^2}}-\frac{2a}{\underbrace{a^2+(w+b)^2}_{a^2+w^2+2wb+b^2}}\right)=\frac{-j4wba}{(a^2+w^2+b^2)^2-4w^2b^2}$$

گزینه «۱»

کامپیوتر ۸۳ - صفحه ۱۵۵ - تست ۴: تبدیل فوریه حل معادله دیفرانسیل $\pi y''-\pi y=\dfrac{-1}{t^2+1}$ چیست؟

۱) $Y(w)=w^2e^{-w}$ ۲) $Y(w)=\dfrac{e^{-w}}{w}$

۳) $Y(w)=(w^2+1)e^{-w}$ ۴) $Y(w)=\dfrac{e^{-w}}{w^2+1}$

$$\left(\pi(jw)^2-\pi\right)y(w)=-\pi e^{-|w|}$$

$$y(w)=\frac{e^{-|w|}}{w^2+1}$$ گزینه «۴»

توجه: در گزینه ها باید قدر مطلق می بود.

برق ۷۴ - (۱۵۷) ← ۱۲ و مکانیک ۸۷ - (۱۶۱) ← ۳۳ : اگر تبدیل فوریه تابع $f(t)=\dfrac{t}{t^2+a^2}$ بصورت زیر تعریف شود

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t}\, f(t)\, dt$$

در اینصورت:

۱) $F(\omega)=2\pi j e^{-\omega a}$

۲) $F(\omega)=\pi j e^{-\omega a}$

۳) $F(\omega)=\begin{cases} -\pi e^{-\omega a} & \omega>0 \\ \pi e^{+\omega a} & \omega<0 \end{cases}$

۴) $F(\omega)=-\pi j e^{-\omega a}$

$f(t)$ فرد و موهومی است ⇐ $F(\omega)$ نیز باید فرد و حقیقی باشد. گزینه (۳)

ت ۱۴۴

برق ۸۶ - (۱۶۰) ← ۲۶ : اگر $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ و داشته باشیم $\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$ آنگاه $\hat{f}(\omega)$ (تبدیل فوریه f) کدام است؟

۱) $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}\pi & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$
۲) $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$
۳) $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}2\pi & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$
۴) $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases} a & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases} \xrightarrow{\text{زوج است}} F(\omega)=2\int_0^1 a\cos\omega x\, dx=\frac{2a\sin\omega}{\omega}$$

$$\frac{2a\sin x}{x} \xrightarrow{F} 2\pi f(-\omega)=2\pi f(\omega)=2\pi\begin{cases} a & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$$

$$F\left[\frac{\sin x}{x}\right]=\begin{cases}\pi & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$$

گزینه (۱)

برق ۸۷ – (۱۶۱) ← ۱۱: تابع $F(w)$ تبدیل فوریه تابع $f(x)=e^{-x^2}$ در کدام یک از معادلات دیفرانسیل زیر صادق است؟
۱۴۳

۱) $\frac{dF(w)}{dw}+wF(w)=0$ ۲) $\frac{dF(w)}{dw}+\frac{w^2}{2}F(w)=0$ ۳) $\frac{dF(w)}{dw}+\frac{w}{2}F(w)=0$ ۴) $\frac{dF(w)}{dw}+\frac{2}{w}F(w)=0$

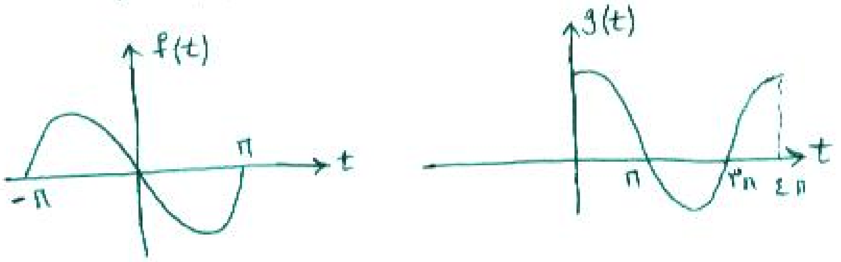
متن $\longrightarrow e^{-x^2}=f(x)$

$$f'(x)=-2x\,e^{-x^2}=-2x\,f(x)\longrightarrow f'(x)=-2x\,f(x)\xrightarrow[\text{از طرفین}]{\text{تبدیل فوریه}} jwF(w)=-2j\frac{dF(w)}{dw}+wF(w)=0$$

$$jwF(w)=-2jF'(w)\longrightarrow F'(w)+\frac{w}{2}F(w)=0$$

گزینه «۳»

برق ۷۶ – (۱۵۹) ← ۲۱: اگر تابع $f(t)$ و $g(t)$ به شکل زیر باشند تبدیل فوریه تابع $g(t)$ و $G(w)$ برحسب $F(w)$ برابر است با:



۱) $2F(2w)e^{-jw\pi}$
۲) $2F(2w)e^{-2jw\pi}$
۳) $jwF(w)e^{-jw\pi}$
۴) $jw2F(w)e^{-j2w\pi}$

حل تشریحی در سایت m-karimi.ir

$f(t)=-\sin t$
$g(t)=\cos\frac{t}{2}$

گزینه «۴»

کامپیوتر ۸۹. برای تابع $f(x)=\begin{cases} x & -1<x<1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$ تبدیل فوریه با تعریف $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-jwx}\,dx$ عبارت است از:

۱) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2\cos w}{-jw}+\frac{1}{w^2}\left(e^{-jw}+e^{jw}\right)\right]$

۲) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{j}{w^2}(w\cos w-\sin w)$

۳) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2\cos w}{jw}+\frac{1}{w^2}\left(e^{-jw}-e^{jw}\right)\right]$

۴) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{j\cos w}{w}-\frac{j\sin w}{w^2}\right)$

$$F(w)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 -jx\sin wx\,dx=\frac{-2j}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-\cos w}{w}+\frac{\sin w}{w^2}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\;j\,\frac{\cos w-\sin w}{w^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{j\cos w}{w^2}-\frac{j\sin w}{w^2}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(w\cos w-\sin w)\frac{j}{w^2}$$

گزینه «۲»

تبدیل فوریه کسینوسی $F_c(\omega)=\varnothing\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx$

تبدیل فوریه سینوسی $F_s(\omega)=\varnothing\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx$

برق ۸۷ - (۱۶۱) ← ۳۲: تبدیل فوریه سینوسی $f(t)=\frac{e^{-at}}{t}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{a}{a^2+w^2}$ ۲) $tg^{-1}\left(\frac{w}{a}\right)$ ۳) $tg\left(\frac{w}{a}\right)$ ۴) $\frac{w}{a^2+w^2}$

$$F_s(w)=\int_0^\infty f(x)\sin wx\,dx=\int_0^\infty \frac{e^{-at}}{t}\sin wt\,dt=\mathcal{L}\left[\frac{\sin wt}{t}\right]_{s=a}=tg^{-1}\left(\frac{w}{a}\right)$$ گزینه «۲»

OR: $$\frac{dF_s(w)}{dw}=\int_0^\infty e^{-at}\cos wt\,dt=\frac{a}{a^2+w^2}\Rightarrow F_s(w)=\int\frac{a}{a^2+w^2}\,dw=tg^{-1}\left(\frac{w}{a}\right)$$

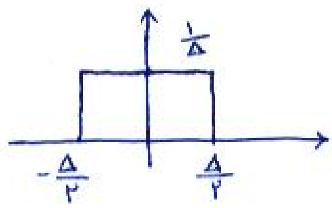
مکانیک ۸۲ - (۱۵۵) ← ۲: تبدیل فوریه کسینوسی تابع $x>0$ و $f(x)=e^{-x}$ عبارتست از:

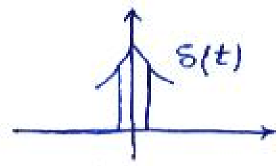
۱) $F_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{z}{z^2+1}$ ۲) $F_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{z^2+1}$

۳) $F_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{z^2-1}$ ۴) $F_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{z}{z^2-1}$

$$F_c(w)=\overset{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\cancel{2}}\int_0^\infty f(x)\cos wx\,dx=\overset{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\cancel{2}}\int_0^\infty e^{-x}\cos wx\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{1+w^2}\equiv\frac{1}{1+z^2}$$ گزینه «۲»

تابع ضربه
(دلتای دیراک)





خاصیت:

① $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \delta(x)\,dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x)\,dx = 1$

② $f(x)\delta(x-a) = f(a)\,\delta(x-a)$

③ $f(x) * \delta(x-a) = f(x-a)$

④ $\left(u_a(x)\right)' = \delta(x-a) \qquad u_a(x) = u(x-a)$

⑤ $\delta(x) \xrightarrow{F} 1$

⑥ $\delta(-x) = \delta(x)$

مثال) سری فوریه تابع $f(x) = \delta(x)$ و $-L<x<L$ را بدست آورید.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \delta(x)\,dx = \frac{1}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\underbrace{\int_{-L}^{L} \delta(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx}_{\delta(x)} = \frac{1}{L}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\underbrace{\int_{-L}^{L} \delta(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx}_{\text{صفر}} = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \delta(x) = \frac{1}{2L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L}\cos\frac{n\pi}{L}x$$

مثال) تبدیل فوریه تابع $f(x) = 1$ را بدست آورید.

$$\delta(x) \xrightarrow{F} 1$$

$$1 \xrightarrow{F} 2\pi\,\delta(-\omega) = 2\pi\,\delta(\omega)$$

مثال) تبدیل فوریه $f(x) = e^{jax}$ را بدست آورید.

$$1 \xrightarrow{F} 2\pi\,\delta(\omega)$$

$$e^{jax} \xrightarrow{F} 2\pi\,\delta(\omega-a)$$

(مثال) تبدیل فوریه $f(x) = \cos ax$ را بدست آورید.

$$\cos ax = \frac{e^{jax} - e^{-jax}}{2} \xrightarrow{F} \frac{2\pi}{2}\left(\delta(w-a) + \delta(w+a)\right)$$

(مثال) تبدیل فوریه تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ را بدست آورید.

$$x f(x) = \sin x \longrightarrow -j F'(w) = \frac{\pi}{j}\left(\delta(w-a) - \delta(w+a)\right)$$

$$F'(w) = \pi\left(\delta(w-a) - \delta(w+a)\right)$$

پایان فصل اول

$$\int f(x) g(x)\, dx = f(x) g_1(x) - f'(x) g_2(x) + f''(x) g_3(x) - \cdots \longrightarrow \int f'''(x) g_3(x)\, dx$$

مشتق راحت — انتگرال راحت — انتگرال توقف

$$g_{i+1}(x) = \int g_i(x)\, dx$$

$$\text{OR} \int f(x) g_0(x)\, dx = f(x) g_1(x) - \int f'(x) g_1(x)\, dx$$

$$\int f(x) g_0(x)\, dx = f g_1 - f' g_2 + f'' g_3 - f''' g_4 + \int f^{(4)} g_4\, dx$$

مثال) $\int x^4 \cos x\, dx = x^4(\sin x) - 4x^3(-\cos x) + 12x^2(-\sin x) - 24x(\cos x) + 24(\sin x)$

مثال) $\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(1+x^2)$

مثال) $\int \operatorname{Ln} x\, dx = x \operatorname{Ln} x - x$

مثال) $\int \frac{\operatorname{Ln} x}{x^2}\, dx = \operatorname{Ln} x \times \left(\frac{-1}{x}\right) - \frac{1}{x}$

مثال) $\int e^x \sin x \, dx = e^x(-\cos x) - e^x(-\sin x)$

$$z = x + jy = r(\cos\theta + j\sin\theta) = re^{j\theta}$$

فرم دکارتی — فرم قطبی — فرم نمایی (اویلری)

$Re(z) = x$

$Im(z) = y$

$r \longrightarrow$ اندازه یا مدول z

$\theta \longrightarrow$ آرگومان یا فاز z

$\theta = Arg(z)$

$$r(\cos\theta + j\sin\theta) = r\,cis\,\theta$$

تبدیل فرم دکارتی به فرم قطبی

$$z = x + iy \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \begin{cases} tg^{-1}\frac{y}{x} \longrightarrow \text{اگر نقطه در ربع اول یا چهارم باشد} \\ \pi + tg^{-1}\frac{y}{x} \longrightarrow \text{اگر نقطه در ربع دوم یا سوم باشد} \end{cases} \end{cases}$$

مثال) $z = 1 + i\sqrt{3}$

$r = 2$

$\theta = tg^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$ $\longrightarrow (2, \frac{\pi}{3})$

ربع اول

مثال) $z = -1 + j\sqrt{3}$

$r = 2$

$\theta = \pi + tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \frac{2\pi}{3}$

ربع دوم

مثال) $z = -1 - i\sqrt{3}$

$r = 2$

$\theta = \pi + tg^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = \frac{4\pi}{3}$

ربع سوم

مثال) $z = 1 - i\sqrt{3}$

$r = 2$

$\theta = tg^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{-\pi}{3}$

ربع چهارم

$$f(z) = Re[f(z)] + i\, Im[f(z)] = u + iv$$

$$|f(z)| = \sqrt{[Re(f(z))]^2 + [Im(f(z))]^2}$$

$$\arg[f(z)] = tg^{-1} \frac{Im[f(z)]}{Re[f(z)]}$$

مثال) اندازه و فاز تابع $W = z^2$ را بدست آورید

اندازه $\quad W = |z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2$

فاز $\quad \arg(z^2) = \arg(x+iy)^2 = \arg(x^2 - y^2 + 2ixy) = tg^{-1} \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

$$* \left| e^{f(z)} \right| = e^{Re[f(z)]}$$

$$* \arg\left(e^{f(z)}\right) = Im(f(z))$$

$$* \left| e^{if(x,y)} \right| = 1$$

$$* |e^z| = e^z$$

$$* \arg(e^z) = y$$

$$* e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = re^{i\theta}$$

$$* e^{f(z)} = e^{Re[f(z)] + i\, Im[f(z)]} = e^{Re[f(z)]} \cdot e^{i\, Im[f(z)]} = re^{i\theta}$$

* قضیه موآور: برای توان رساندن یا ریشه nام گرفتن از یک عدد یا عبارت مختلط.

$$z = x+iy = re^{i\theta} = r\,\mathrm{cis}\,\theta \longrightarrow z^n = r^n \mathrm{cis}^n\theta = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$(z)^{\frac{1}{n}} = (r)^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{cis}\,\frac{2k\pi+\theta}{n} = (r)^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)} = (r)^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

* ریشه های nام هر عدد، دقیقاً n تا می باشند که اندازه تمامی آنها یکسان و برابر $(r)^{\frac{1}{n}}$ و تفاوت آنها در فاز (زاویه) آنها می باشد.

* تمامی ریشه های هر عدد روی دایره به شعاع $(r)^{\frac{1}{n}}$ و مرکز مبداء قرار دارد.

* ریشه های معادله $z^n + A = 0$ را بدست آورید $\equiv$ ریشه های nام عدد $A-$ را بدست آورید.

مثال) ریشه های معادله $z^4+1=0$ را بدست آورید.

$$z^4+1=0 \longrightarrow z^4=-1 \longrightarrow z=(-1)^{\frac{1}{4}} = (1\,\mathrm{cis}\,\pi)^{\frac{1}{4}} = (1)^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{cis}\left(\frac{2k\pi+\pi}{4}\right),$$

$k = 0, 1, 2, 3$

$$k=0 \longrightarrow z_0 = \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$k=1 \longrightarrow z_1 = \mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

$$k=2 \longrightarrow z_2 = \mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$$

$$k=3 \longrightarrow z_3 = \mathrm{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

مثال) ریشه های سوم عدد 1 را بدست آورید.

$$z^3=1 \longrightarrow z=(1)^{\frac{1}{3}} = (1)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{cis}\left(\frac{2k\pi+0}{3}\right),\ k=0,1,2$$

$$k=0 \longrightarrow z_0 = \mathrm{cis}\,0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$k=1 \longrightarrow z_1 = \mathrm{cis}\,\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زمانی که ریشه خواسته شده حقیقی باشد.

نکته: اگر در معادله $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ ضرائب a_i حقیقی باشند، در صورتی که z_0 ریشه باشد، حتماً $\overline{z_0}$ هم ریشه است.

$z_1 = r_1 \operatorname{cis}\theta_1$

$z_2 = r_2 \operatorname{cis}\theta_2$

$\vdots$

$z_n = r_n \operatorname{cis}\theta_n$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n \operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) \\ \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2) \end{cases}$$

مثال) حاصل عبارت $\dfrac{(1+i)^{20}(1+i\sqrt{3})^{30}}{(\sqrt{3}+i)^{15}(-1+i)^{20}}$ را بدست آورید:

$$W = \frac{(\sqrt{2})^{20} \times (2)^{30}}{(2)^{15} \times (\sqrt{2})^{20}} \operatorname{cis}\left(20\cdot\frac{\pi}{4} + 30\cdot\frac{\pi}{3} - 15\frac{\pi}{6} - 20\cdot\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= (2)^{15}\operatorname{cis}\left(\frac{-5\pi}{2}\right) = 2^{15}(-i) = -i\,2^{15}$$

لگاریتم عدد مختلط:

$Z = re^{i(\theta+2k\pi)} \Rightarrow \boxed{\operatorname{Ln}Z = \operatorname{Ln}r + i(\theta+2k\pi)}$ جواب کلی

$\boxed{\operatorname{Ln}Z = \operatorname{Ln}r + i\theta}$ جواب اصلی

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید (جواب اصلی)

① $\operatorname{Ln}(-1) = \operatorname{Ln}(1) + i(\pi) = i\pi$

② $\operatorname{Ln}(i) = \operatorname{Ln}(1) + i\left(\frac{\pi}{2}\right) = i\frac{\pi}{2}$

③ $\operatorname{Ln}(1+i) = \operatorname{Ln}(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4}\right)$

نکته: برای محاسبه عبارتهای به فرم u^n که در آن u و n مختلط هستند، بهتر است ابتدا از طرفین لگاریتم گرفته و سپس عبارت را حل کنیم.

④ $W = (i)^i \Rightarrow \operatorname{Ln}W = \operatorname{Ln}(i)^i \longrightarrow \operatorname{Ln}W = i\,\underbrace{\operatorname{Ln}(i)}_{i\frac{\pi}{2}} \longrightarrow \operatorname{Ln}W = i\left[i\frac{\pi}{2}\right] = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{Ln}W = -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow e^{\operatorname{Ln}W} = e^{-\frac{\pi}{2}} \Rightarrow W = e^{-\frac{\pi}{2}}$

$i^2 = i \times i = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = 1 \longrightarrow$ غلط است

نکته: در اعداد مختلط ← $\sqrt{z_1}\,\sqrt{z_2} \neq \sqrt{z_1 z_2}$ می‌باشد.

بلکه: $i^2 = -1 \Rightarrow i^3 = i^2 i \longrightarrow i^3 = -i \Rightarrow i^4 = i^2 i^2 = 1 \Rightarrow i^{4p} = 1$

$$\begin{cases} i^{4p+1} = i \\ i^{4p+2} = -1 \\ i^{4p+3} = -i \end{cases}$$

ⓐ $w=(-1)^{i} \Rightarrow Ln\,w = Ln(-1)^{i} \Rightarrow Ln\,w = i\,\underbrace{Ln(-1)}_{Ln(1)+i\pi = i\pi} \Rightarrow Ln\,w = i[i\pi] \Rightarrow Ln\,w = -\pi \Rightarrow e^{Ln\,w} = e^{-\pi} \Rightarrow w = e^{-\pi}$

مثال) اندازه و فاز (زاویه) $w = i^{i^{i}}$ را بدست آورید.

$$w = i^{(i)^{i}} \longrightarrow Ln\,w = \underbrace{i^{i}}_{e^{-\frac{\pi}{2}}}\,\underbrace{Ln\,i}_{i\frac{\pi}{2}} \longrightarrow Ln\,w = e^{-\frac{\pi}{2}}\, i\frac{\pi}{2} \longrightarrow w = e^{i\frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi}{2}}}$$

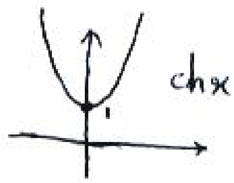
مقایسه روابط مثلثاتی و هایپربولیکی :

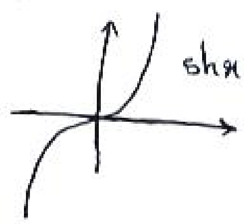
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\begin{cases} \cosh x = ch\,x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} \\[2ex] \sinh x = sh\,x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} \end{cases}$$





$$\cos(ix) = \frac{e^{i(ix)}+e^{-i(ix)}}{2} = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = ch\,x$$

$$\sin(ix) = \frac{e^{i(ix)}-e^{-i(ix)}}{2i} = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2i} = \frac{-1}{i}\,sh\,x = i\,sh\,x$$

روابط بسیار مهم

$$\begin{cases} \cos(ix) = ch\,x \\ sh(ix) = \cos x \\ \sin(ix) = i\,sh\,x \\ sh(ix) = i\sin x \\ tg(ix) = i\,th\,x \\ th(ix) = i\,tg\,x \end{cases}$$

تذکر: اگر روابط مثلثاتی را در ذهن داشته باشیم، نیازی به حفظ کردن روابط هایپربولیکی نیست!

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \longrightarrow \cos^2(ix)+\sin^2(ix)=1 \Rightarrow \cosh^2 x-\sinh^2 x=1$$

$$\begin{cases} \cos x \longrightarrow ch\,x \\ \sin x \longrightarrow i\,sh\,x \\ tg\,x \longrightarrow i\,th\,x \end{cases}$$

$$1+tg^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1[redacted]tg^2 x=\frac{1}{ch^2 x}$$

$$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x \longrightarrow ch^2 x+sh^2 x=ch\,2x$$

$$\sin 2x=2\sin\cos x \longrightarrow i\,sh\,2x=2i\,sh\,x\cosh x$$

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2} \longrightarrow -sh^2 x=\frac{1-ch\,2x}{2} \longrightarrow sh^2 x=\frac{\cosh 2x-1}{2}$$

بسط توابع مثلثاتی و هایپربولیکی را می‌توان به این روش نوشت:

$$\sin(z)=\sin(x+iy)=\sin x\cos(iy)+\cos x\sin(iy)=\sin x\,ch\,y+i\cos x\,sh\,y$$

$$\cos(z)=\cos(x+iy)=\cos x\cos(iy)-\sin x\sin(iy)=\cos x\,ch\,y-i\sin x\,sh\,y$$

$$ch(z)=\cos(iz)=\cos(ix-y)=\cos(ix)\cos y+\sin(ix)\sin y=ch\,x\cos y+i\,sh\,x\sin y$$

$$sh(z)=-i\sin(iz)=-i\sin(ix-y)=-i[\sin(ix)\cos y-\cos(ix)\sin y]=-i[i\,sh\,x\cos y-ch\,x\sin y]$$

$$=sh\,x\cos y+i\,ch\,x\sin y$$

$$\sin(iz)=\sin(ix-y)=\sin(ix)\cos y-\cos(ix)\sin y=i\,sh\,x\cos y-ch\,x\sin y$$

نکته: $\sin(iz)=i\,sh\,z \longrightarrow sh\,z=-i\sin(iz)$

نکته: $\frac{1}{i}=-i$

حل معادلات هایپربولیکی :

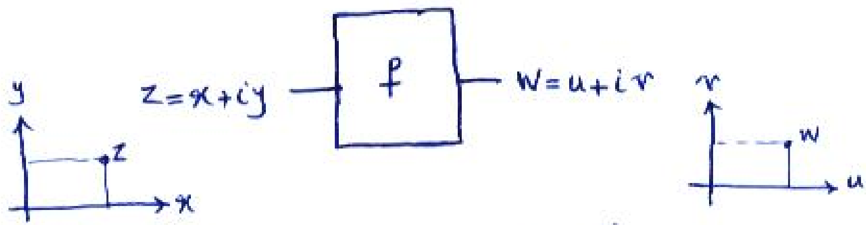
$$sh^2 z + ch^2 z = 0$$

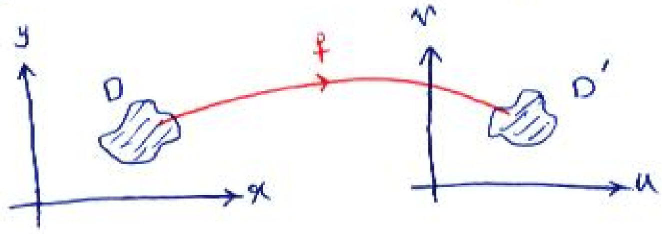
$$\cos^2(iz) - \sin^2(iz) = 0 \longrightarrow \cos(2iz) = 0 \longrightarrow 2iz = (2k-1)\frac{\pi}{2} \longrightarrow z = (2k-1)\, i\, \frac{\pi}{4}$$

توابع مختلط :

تابع سیستمی است که به ازای ورودی مشخص، خروجی مشخص تولید کند.

تابع مختلط تابعی است که ورودی و خروجی آن عدد مختلط باشد.



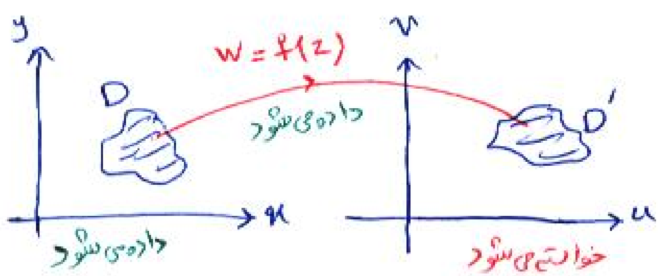


* اگر ورودی در فضای D تغییر کند، خروجی در فضای D' تغییر می کند.

* اگر دامنه f ، D باشد، برد f ، D' است.

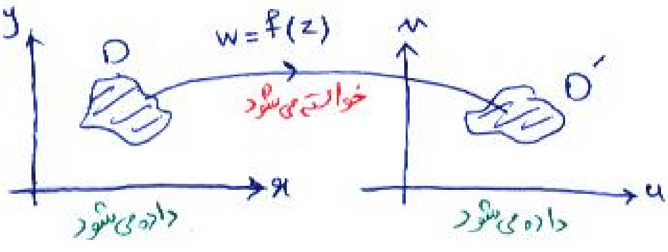
* نگاشت ناحیه D توسط تابع f ناحیه D' است.

مسائل نگاشت :



نوع ۱

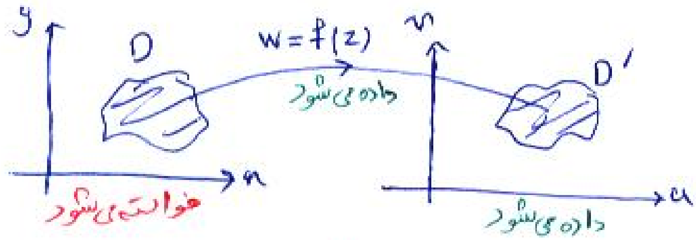
سؤالش $\longrightarrow$ • نگاشت ناحیه D توسط w = f(z) را بدست آورید.



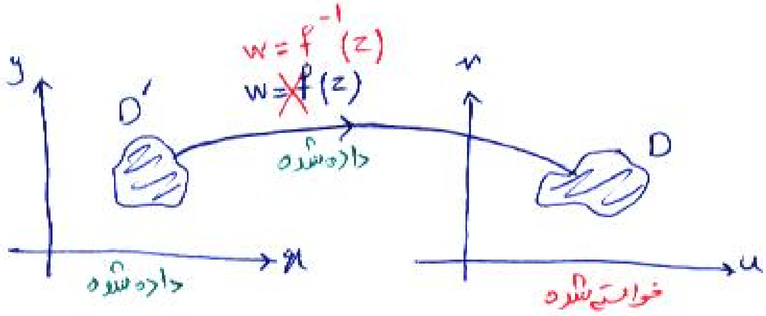
نوع ۲

سؤالش $\longrightarrow$ کدام نگاشت (تابع) ناحیه D را به ناحیه D' تصویر می کند (نگاشت می کند).

البته امکان دارد که $w=f(z)$ و D' را بدهند و D را بخواهند:



ابتدا وارون $f(z)$ را محاسبه می‌کنیم ($f^{-1}(z)$):



و شبیه نوع ① بررسی می‌کنیم.

روش محاسبه نگاشت D توسط تابع $w=f(z)$:

① معادله مرزها را می‌نویسیم (که ۹۸٪ معادلات، خط و دایره است).

② از رابطه $w=f(z)$ سعی می‌کنیم x و y را برحسب u و v یا u و v را برحسب x و y بدست می‌آوریم. $u+iv=f(x+iy)$

تذکر ۱: در شرایط کلی، بهتر است x و y را برحسب u و v بدست می‌آوریم.

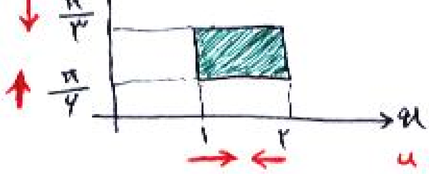
تذکر ۲: اگر فضای ورودی برحسب z باشد، بهتر است z را برحسب w بدست آورده و سپس با توجه به تغییرات z در مورد تغییرات w بحث می‌کنیم.

③ نگاشت مرزها را بدست می‌آوریم.

④ نگاشت مرزها را به کل ناحیه تعمیم می‌دهیم.

نکته: نگاشت مرزها در ورودی، مرزهای ناحیه خروجی را تشکیل می‌دهد.

مثال: نگاشت ناحیه هاشور خورده توسط $w=e^z$ را بدست آورید.



① $\begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ y=\frac{\pi}{4} \\ y=\frac{\pi}{3} \end{cases}$

② $u+iv=e^{x+iy} \Rightarrow \begin{cases} u=e^x\cos y \\ v=e^x\sin y \end{cases}$

$e^x.e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$

$\Rightarrow u+iv=e^x\cos y+ie^x\sin y$

③ $x=1 \begin{cases} u=e\cos y \\ v=e\sin y \end{cases}$

حذف پارامتر y

$$u^2+v^2=e^2\cos^2 y+\sin^2 y$$

$$\boxed{u^2+v^2=e^2}$$

معادله دایره به شعاع e^2

$x=2 \begin{cases} u=e^2\cos y \\ v=e^2\sin y \end{cases}$

حذف پارامتر y

$$u^2+v^2=e^4\cos^2 y+\sin^2 y$$

$$\boxed{u^2+v^2=e^4}$$

معادله دایره به شعاع e^4

$y=\frac{\pi}{4} \begin{cases} u=e^x\cos(\frac{\pi}{4}) \\ v=e^x\sin(\frac{\pi}{4}) \end{cases}$

حذف پارامتر x

$$\frac{v}{u}=\frac{e^x\sin(\frac{\pi}{4})}{e^x\cos(\frac{\pi}{4})}$$

$$\frac{v}{u}=tg(\frac{\pi}{4})$$

$$\boxed{v=tg(\frac{\pi}{4})u}$$

معادله خط با شیب $\frac{\pi}{4}$

$y=\frac{\pi}{3} \begin{cases} u=e^x\cos(\frac{\pi}{3}) \\ v=e^x\sin(\frac{\pi}{3}) \end{cases}$

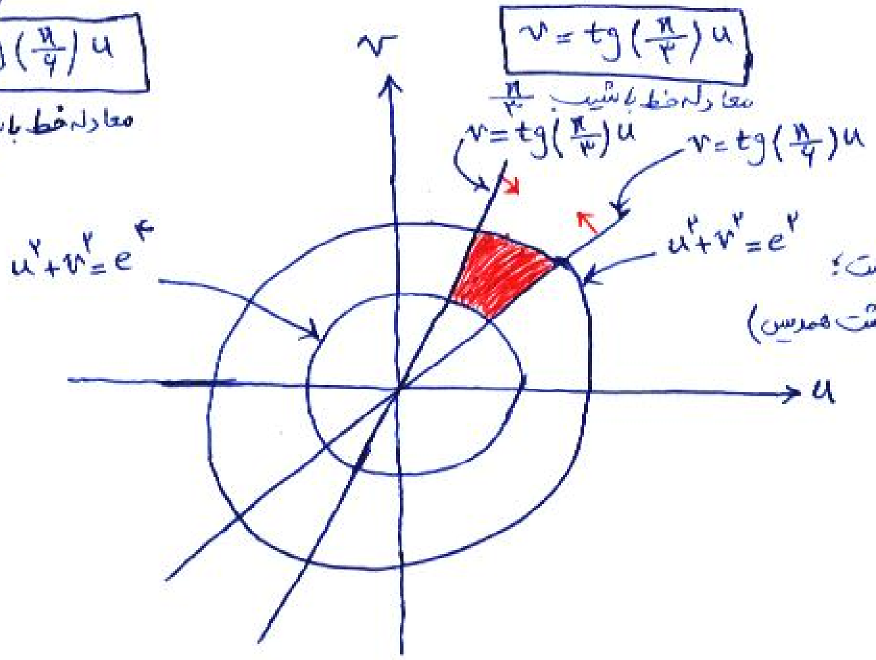
حذف پارامتر x

$$\frac{v}{u}=\frac{e^x\sin(\frac{\pi}{3})}{e^x\cos(\frac{\pi}{3})}$$

$$\frac{v}{u}=tg(\frac{\pi}{3})$$

$$\boxed{v=tg(\frac{\pi}{3})u}$$

معادله خط با شیب $\frac{\pi}{3}$



یا می‌توان گفت که چون سؤال در ربع اول است، نگاشت آن نیز باید در ربع اول باشد (نگاشت همدیس)

نکته: در صفحه z (x و y) ← $|z-z_0|=2$ ⟸ دایره به مرکز z_0 و شعاع ۲

نکته: در صفحه w (u و v) ← $|w-w_0|=2$ ⟸ دایره به مرکز w_0 و شعاع ۲

روش تستی:

$w=u+iv=e^{x}\cos y+i e^{x}\sin y$

$|w|=e^{x}$ و $\arg(w)=y$

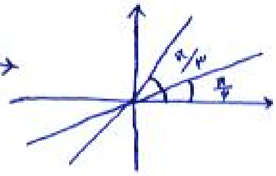
$1<x<2 \longrightarrow e<|w|<e^{2}$ ① $\xrightarrow{\text{دایره یعنی}}$ دو معادله $\longrightarrow$ e ○ یکی معادله دایره به شعاع e

اگر ناحیه ① و ② را رسم کنیم همان ناحیه هاشور خورده خواهد شد.

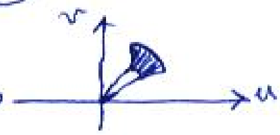
$\frac{\pi}{6}<y<\frac{\pi}{3} \longrightarrow \frac{\pi}{6}<\underbrace{\arg(w)}_{\theta}<\frac{\pi}{3}$ ②

e^{2} ○ دیگری معادله دایره به شعاع e^{2}

یعنی

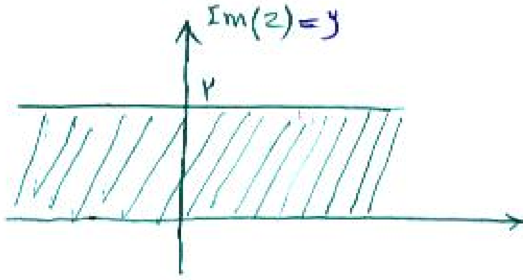


$\Rightarrow$



۲۱۸

کامپیوتر ۸۴ - (۲۴۸) ← ٤٤ ناحیه هاشور زده شده در صفحه z، $(0<Im(z)<2)$ با نگاشت $w=e^{\frac{\pi z}{2}}$ به کدام ناحیه از صفحه مختلط w تبدیل می‌شود؟



۱) $Im(w)<0$

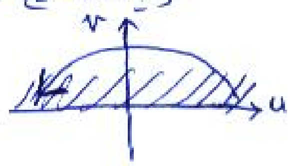
۲) $Im(w)>0$

۳) $Re(w)>0$

۴) $Re(w)<0$

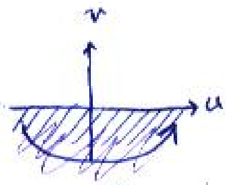
$w=e^{\frac{\pi}{2}z} \longrightarrow \arg(w)=\frac{\pi}{2}y$ و $0<y<2 \Rightarrow 0<\overbrace{\arg(w)}^{\theta}<\pi \longrightarrow$ گزینه «۲» صحیح است

$v=Im(w)>0$



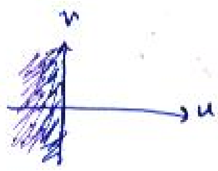
گزینه ۱ $\longrightarrow$

$v=Im(w)<0$



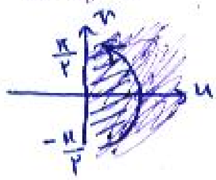
گزینه ۴ $\longrightarrow$

$u=Re(w)<0$

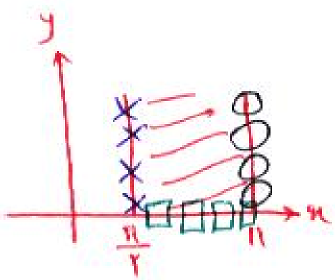


گزینه ۳ $\longrightarrow$

$u=Re(w)>0$



مثال) نگاشت ناحیه هاشور خورده توسط $W=\sin z$ را بدست آورید.



① معادله مرزها $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \pi \\ y = 0 \end{cases}$

shy

② $u + iv = \sin(z) \to u + iv = \sin(x + iy) \to u + iv = \sin x\, chy + i\cos x\, shy$

$\Rightarrow \begin{cases} u = \sin x\, chy \\ v = \cos x\, shy \end{cases}$

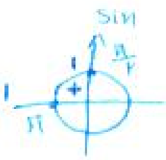
③ $x = \frac{\pi}{2} \to \begin{cases} u = chy \\ v = 0 \end{cases}$ I: y: ۰ تا ∞ → ۱ تا ∞

$x = \pi \to \begin{cases} u = 0 \\ v = -shy \end{cases}$ II: y: ۰ تا ∞ → ۰ تا -∞

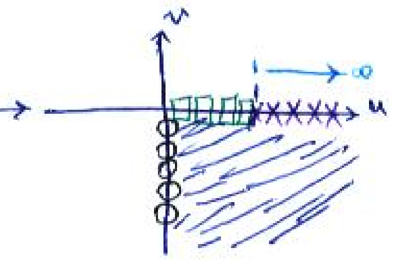
$y = 0 \to \begin{cases} u = \sin x \\ v = 0 \end{cases}$ III: x: $\frac{\pi}{2}$ تا π → ۰ تا ۱

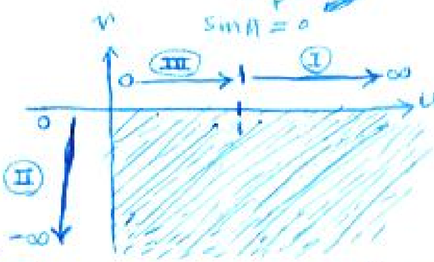
$\sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\sin\pi = 0$



④ رسم نگاشت مرزها →

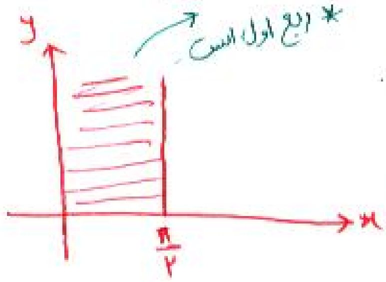




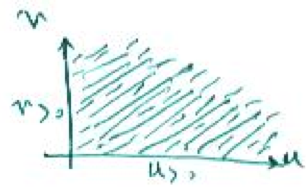
نکته تستی بسیار مهم: نگاشت نیم نوارهای موازی محور y ها که عرض آنها معادل یک ربع دایره مثلثاتی است؛ توسط sin z و cos z همواره به یک ربع مختصات دکارتی در صفحه w تبدیل می‌شوند که برای تشخیص ربع کافی است علامت u و v را تشخیص دهیم.

مثال نگاشت نواحی داده شده را بدست آورید.

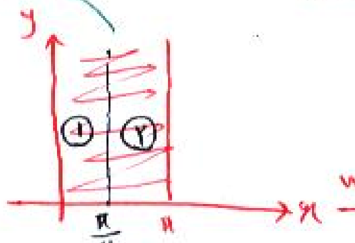
* اگر y مثبت باشد؛ روی shy و chy خط می‌زنیم



$\xrightarrow{w = \sin z}$ $\begin{cases} u = \sin x\, \cancel{chy} \\ v = \cos x\, \cancel{shy} \end{cases}$ $u > 0$, $v > 0$



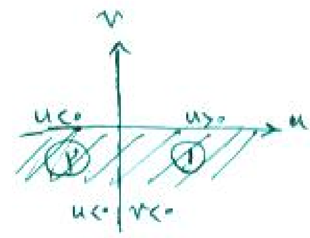
* در ربع اول sin و cos: sinx و cosx مثبت است.



$\xrightarrow{w = \cos z}$ $\begin{cases} u = \cos x\, \cancel{chy} \\ v = -\sin x\, \cancel{shy} \end{cases}$ چون y مثبت است.

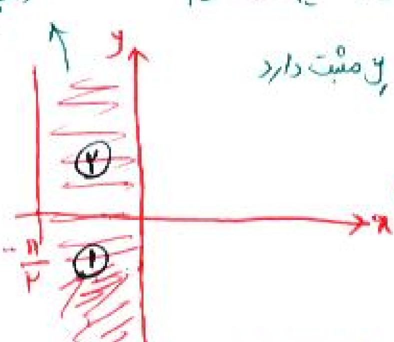
① ربع اول $\begin{cases} u > 0 \\ v < 0 \end{cases}$

② ربع سوم $\begin{cases} u < 0 \\ v < 0 \end{cases}$



* y مثبت و منفی است

چون π است؛ تبدیل به دو نیم نواری کنیم

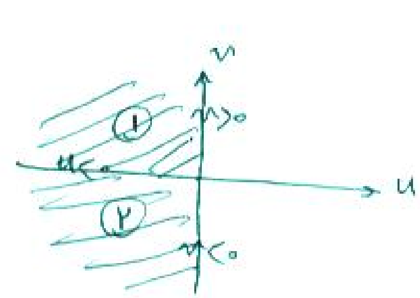


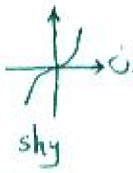
خط می‌زنیم چون یعنی فقط y مثبت دارد

$\xrightarrow{w = \sin z}$ $\begin{cases} u = \sin x\, \cancel{chy} \\ v = \cos x\, shy \end{cases}$

① ربع چهارم $\begin{cases} u < 0 \\ v > 0 \end{cases}$

② ربع چهارم $\begin{cases} u < 0 \\ v < 0 \end{cases}$





خط نمی‌زنیم چون یعنی y مثبت و منفی دارد.

برق ۷۷ - (۲۴۱) ← ۱۱: نگاشت $W=-\cos(z)$ ناحیه نیم نوار

ناحیه‌ای در صفحه w تبدیل می‌کند؟

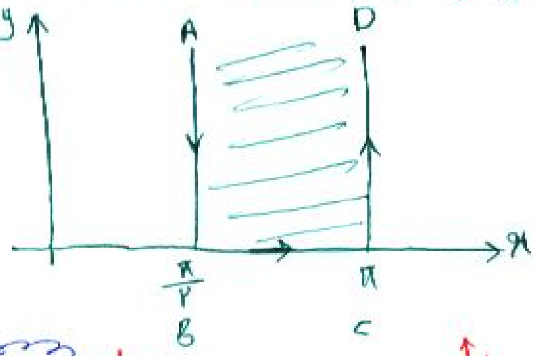
۱) ربع اول

۲) ربع دوم

۳) نیم نوار $1 \geq u \geq 0$ و $v \geq 0$

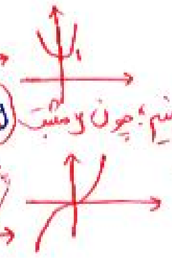
۴) نیم نوار $0 \leq u \leq -1$ و $v \geq 0$

$\left\{\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \;,\; y \geq 0\right\}$ از صفحه z (شکل) را به چه

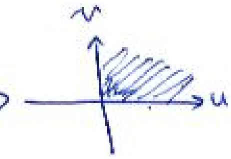


$\{u>0\}$ cos

$$W=-\cos(z) \longrightarrow \begin{cases} u=-\cos x\, \cancel{\operatorname{ch} y} \\ v=\sin x\, \cancel{\operatorname{sh} y} \end{cases}$$



خط‌ها زیر نیم؛ چون مثبت است. $\Rightarrow$



→ گزینه ۱

در ربع دوم sin $\{v>0\}$

نگاشت $\frac{1}{z}$:

$$z=\frac{1}{W} \rightarrow x+iy=\frac{1}{u+iv}\times\frac{u-iv}{u-iv} \longrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y=\dfrac{-v}{x^2+y^2} \end{cases}$$

نکته: اگر در نگاشت $w=f(z)$ بتوانیم x و y را برحسب u و v بدست آوریم، آنگاه نگاشت هر منحنی در صفحه x و y با جاگذاری x و y برحسب u و v معادله خروجی آن در صفحه u و v معلوم می‌شود.

مثال: نگاشت منحنی $x^4+xy^3=x^2y^2$ توسط نگاشت $w=\frac{1}{z}$ را بدست آورید.

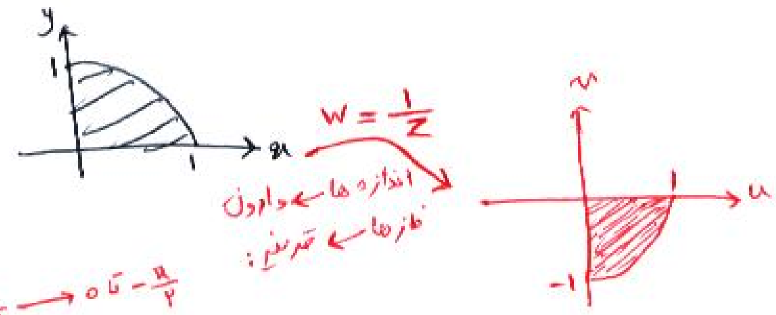
$$\frac{u^4}{(u^2+v^2)^4}+\frac{u(-v)^3}{(u^2+v^2)^4}=\frac{u^2v^2}{(u^2+v^2)^4} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y=\dfrac{-v}{u^2+v^2} \end{cases}$$

نکته: ← نگاشت $\frac{1}{z}$ اندازه‌ها را وارون و فازها را قرینه می‌کند

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{r\operatorname{cis}\theta}=\frac{1}{r}\operatorname{cis}(-\theta)$$

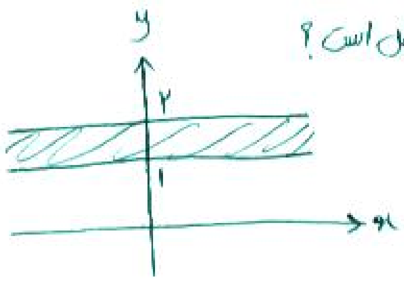
نکته: هرگاه هر معادله‌ای دادند جاگذاری می‌کنیم. بجای x ← $\frac{u}{u^2+v^2}$ و بجای y ← $\frac{-v}{u^2+v^2}$ می‌گذاریم.

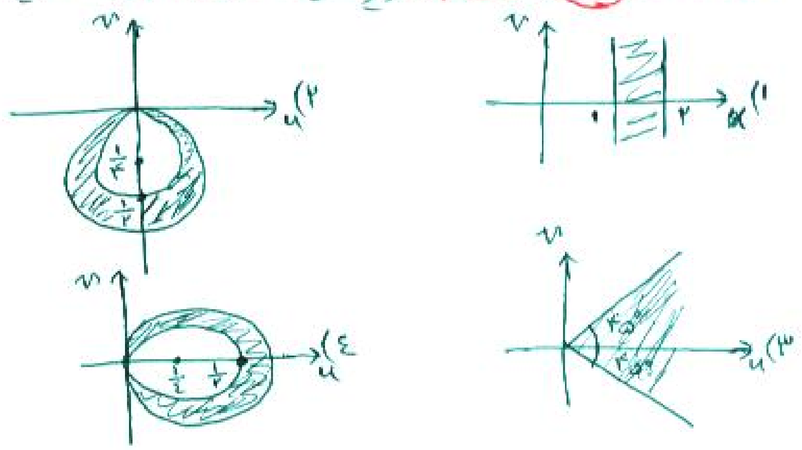
مثال: نگاشت ناحیه هاشور خورده توسط $w=\frac{1}{z}$ را بدست آورید.



0 تا $\frac{\pi}{2}$ ⟵ 0 تا $-\frac{\pi}{2}$

مکانیک ۸۳ - (۲۴۳) ← ۲۴: تصویر ناحیه هاشور خورده زیر تحت تبدیل $w=\frac{1}{z}$ مطابق با کدام شکل است؟





گزینه «۲» زاویه (فاز) سؤال از 0 تا π است $\xleftarrow{\frac{1}{z}}$ $-\pi$ تا 0 که فقط گزینه ۲ است.

روش دوم: نقاط مهم ← 0 و ∞ ⟵ $\begin{cases} z=0 \to w=\infty \\ z=\infty \to w=0 \end{cases}$

$z=0$ در صورت سؤال نداریم؛ پس نباید در گزینه ها (w) ∞ داشته باشیم که ① و ③ غلط هستند.

$z=\infty$ در صورت سؤال داریم؛ پس باید در گزینه ها (w) 0 داشته باشیم، که از بین گزینه های ② و ④، گزینه «۲» صحیح می شود.

مکانیک ۸۵ - (۲۴۳) ← ۲۲: تصویر سهمی $y=x^2$ تحت تبدیل $w=\frac{1}{z}$ کدام است؟

۱) $v(u^2+v^2)=-u$ ۲) $v(u+v)=-u$

۳) $v(u^2+v^2)=u^2$ ۴) $v(u^2+v^2)=-u^2$

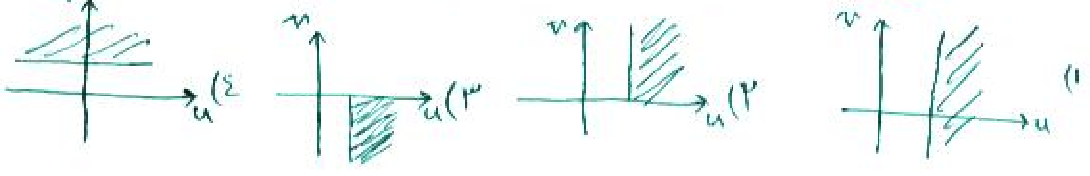
$$\frac{-v}{u^2+v^2}=\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} \to \frac{-v}{u^2}=\frac{1}{u^2+v^2}$$

$$\to -v(u^2+v^2)=u^2 \to v(u^2+v^2)=-u^2$$

گزینه «۴» بجای x ← $\frac{u}{u^2+v^2}$ می گذاریم و بجای y ← $\frac{-v}{u^2+v^2}$ می گذاریم.

مواد فلزات ۸۳ - (۲۵۰) ← ۵۵: معادل نقاط داخل نیمدایره

با تبدیل $w=\frac{1}{z}$ کدام ناحیه است؟



گزینه «۳» در صورت سؤال فاز از 0 تا $\frac{\pi}{2}$ است $\xleftarrow{\frac{1}{z}}$ 0 تا $-\frac{\pi}{2}$

مواد ۷۹-(۲۴۹)←۴۸: نگاشت $W=T(Z)=\sin z$، خط $x=c$ به طوری که $0<c<\frac{\pi}{2}$ را در صفحه W به کدام یک از منحنی های زیر می نگارد؟

۱) خط ۲) هذلولی ۳) دایره ۴) بیضی

چون معادله داده است؛ جای‌گذاری می کنیم.

$$W=\sin z=\begin{cases}u=\sin x\, chy\\ v=\cos x\, shy\end{cases}$$

$$x=c\rightarrow\begin{cases}u=\sin c\ chy\\ v=\cos c\ shy\end{cases}\xrightarrow[y]{\text{حذف پارامتر}}\frac{u^2}{\sin^2 c}-\frac{v^2}{\cos^2 c}=1\rightarrow \text{معادله هذلولی}\qquad ch^2y-sh^2y=1$$

مکانیک ۸۷-(۲۵۲)←۶۷: تصویر دایره $|z-i|=1$ تحت نگاشت $W=u+iv=\frac{i}{z}$ کدام است؟

۱) $v=\frac{1}{2}$ ۲) $u=\frac{1}{2}$ ۳) $u=-\frac{1}{2}$ ۴) $v=-\frac{1}{2}$

چون معادله داده است؛ جای‌گذاری می کنیم. و چون z و W برحسب هم اند؛ z را برحسب W بدست می آوریم:

$$W=\frac{i}{z}\rightarrow z=\frac{i}{W}\rightarrow\left|\frac{i}{W}-i\right|=1\rightarrow\left|i\left(\frac{1}{W}-1\right)\right|=1\rightarrow|i|\left|\frac{1-W}{W}\right|=1\rightarrow|1-W|=|W|$$

$$\rightarrow\sqrt{(1-u)^2+v^2}=\sqrt{u^2+v^2}\rightarrow 1+u^2-2u+v^2=u^2+v^2\rightarrow 1-2u=0\rightarrow u=\frac{1}{2}\Rightarrow \text{گزینه «۲»}$$

کامپیوتر ۸۸-(۴۷۴)←۴: خط $y=\frac{x}{2}$ از صفحه مختلط z، $(z=x+iy)$ تحت نگاشت $W=\frac{1}{z}$، به کدام منحنی در صفحه W، $(W=u+iv)$ تبدیل می‌شود؟

۱) $v=-2u$ ۲) $v=\frac{1}{2}u$ ۳) $v=2u$ ۴) $v=\frac{-1}{2}u$

هرجا که معادله دیدی ــــ جایگذاری کن:

$$\frac{-v}{u^2+v^2}=\frac{\frac{u}{u^2+v^2}}{2}\rightarrow\frac{-v}{u^2+v^2}=\frac{u}{2(u^2+v^2)}\rightarrow\frac{-v}{u}=\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow v=-\frac{1}{2}u\rightarrow \text{گزینه «۴»}$$

کامپیوتر ۸۹ - تست ۴: ناحیه $1 \leq Im(z)$ از صفحه z تحت نگاشت وارون ($W=\frac{1}{z}$) در صفحه W به چه ناحیه‌ای تبدیل می‌شود؟

۱) $|w-\frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2}$ ۲) $|w-\frac{i}{2}| \geq \frac{1}{2}$ ۳) $|w+\frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2}$ ۴) $|w+\frac{i}{2}| \geq \frac{1}{2}$

گزینه ۴

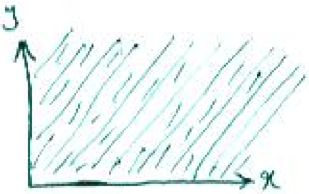
$$Im(z)=y \longrightarrow y \leq 1 \longrightarrow \frac{-v}{u^2+v^2} \leq 1 \longrightarrow u^2+v^2+v \geq 0 \longrightarrow u$$

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \longrightarrow O\left|\begin{array}{l} \frac{-a}{2}=x \\ \frac{-b}{2}=y \end{array}\right. \quad \text{شعاع } r=\sqrt{-c+\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)}$$

$$u^2+v^2+au+bv+c=0 \longrightarrow O\left|\begin{array}{l} u=\frac{-a}{2} \\ v=\frac{-b}{2} \end{array}\right. \quad \text{شعاع } r=\sqrt{-c+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}$$

$$\Rightarrow O\left|\begin{array}{l} u=0 \\ v=\frac{-1}{2} \end{array}\right. \quad r=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2} \Rightarrow u^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \rightarrow u^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \geq 0 \Rightarrow \left|W+\frac{i}{2}\right| \geq \frac{1}{2}$$

نگاشت دوخطی (موبیوس): $W=\frac{az+b}{cz+d}$



مثال) نگاشت ناحیه هاشور خورده توسط $W=\frac{z-1}{z-i}$ را بدست آورید.

نکته: هرگاه در یک نگاشت، امکان محاسبه x و y برحسب u و v وجود داشته باشد؛ بجای معادله مرزها بهتر است که شرط مرزها نوشته شود، یعنی ابتدا معادله مرزها را می‌نویسیم و سپس آنرا به نامعادله تبدیل می‌کنیم:

$$\text{معادله مرزها}\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \longrightarrow \text{شرط مرزها}\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

نکته مهم: در نگاشت دوخطی $W=\frac{az+b}{cz+d}$ برای محاسبه z برحسب W، کافی است جای z با W و a با d را تعویض کرده و همچنین a و d را قرینه کنیم.

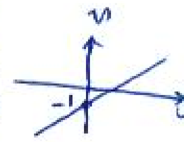
$$z=\frac{az+b}{cz+d} \xrightarrow{z \text{ برحسب } W} z=\frac{-dW+b}{cW-a} \xRightarrow[\substack{a=i \\ b=-1 \\ c=1}]{d=-i} z=\frac{iW-1}{W-1} \Rightarrow x+iy=\frac{i(u+iv)-1}{u+iv-1} \Rightarrow x+iy=\frac{iu-v-1}{u+iv-1}$$

$$\rightarrow x+iy=\frac{-v-1+iu}{u-1+iv} \times \frac{u-1-iv}{u-1-iv}=\frac{-u+v+1+i(v^2+v+u^2-u)}{(u-1)^2+v^2}$$

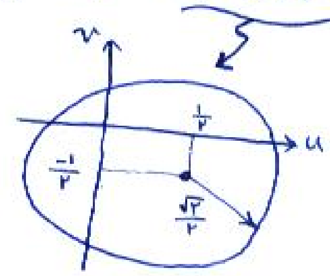
$$x=\frac{uv-(v+1)(u-1)}{(u-1)^2+v^2}=\frac{v-u+1}{(u-1)^2+v^2} \qquad y=\frac{u(u-1)+v(v+1)}{(u-1)^2+v^2}=\frac{u^2+v^2-u+v}{(u-1)^2+v^2}$$

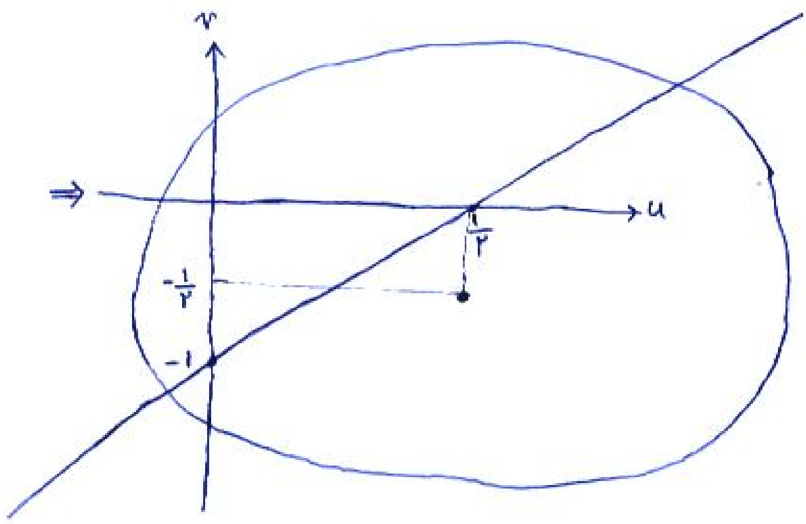
$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \longrightarrow v - u + 1 \geq 0 \longrightarrow v \geq u - 1 \\ y \geq 0 \longrightarrow u^2 + v^2 - u + v \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ معادله خط : $y = \underset{\text{شیب}}{a}x + \underset{\text{عرض از مبداء}}{b} \Rightarrow v = au + b \longrightarrow v = u - 1 \begin{cases} a = 1 & \text{شیب مثبت است} \\ b = -1 & \text{عرض از مبداء} \end{cases}$

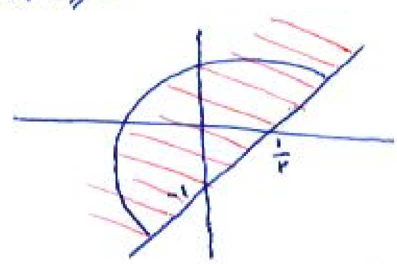


$$\Rightarrow O \begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = \frac{-1}{2} \end{cases} \quad r = \sqrt{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$



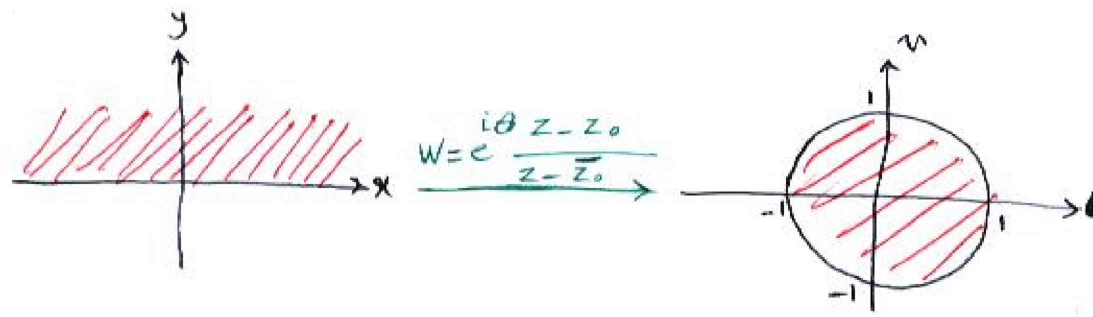


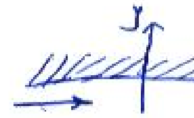
$$\Rightarrow v \geq u - 1 \longrightarrow v - u + 1 \geq 0$$
$$u^2 + v^2 - u + v \geq 0$$



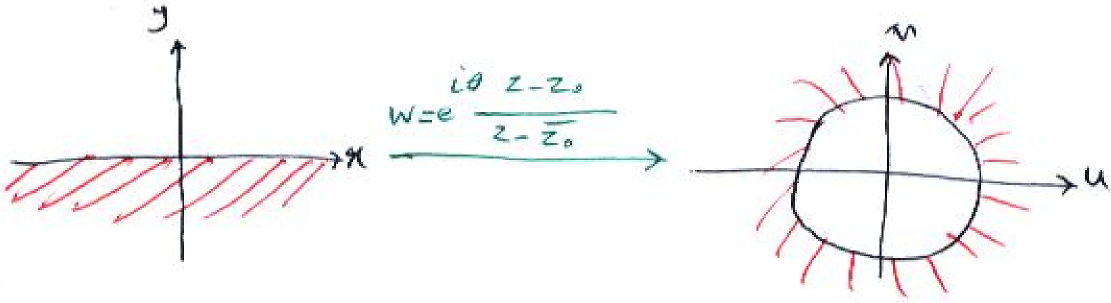
نکته بسیار مهم : در نگاشت $W = e^{i\theta}\dfrac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$ داریم :

الف) اگر $Im(z_0) > 0$ باشد :





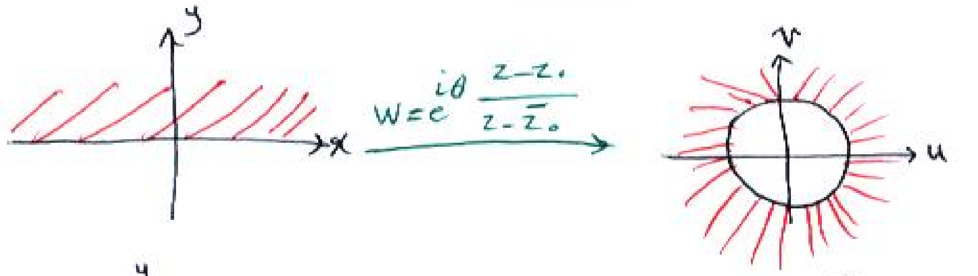
چون z_0 در $+y$ وجود دارد $\Leftarrow$ داخل دایره واحد .

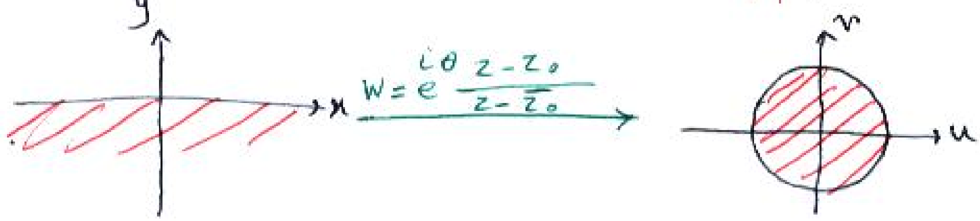


چون z_0 در $+y$ وجود ندارد $\Leftarrow$ خارج دایره واحد

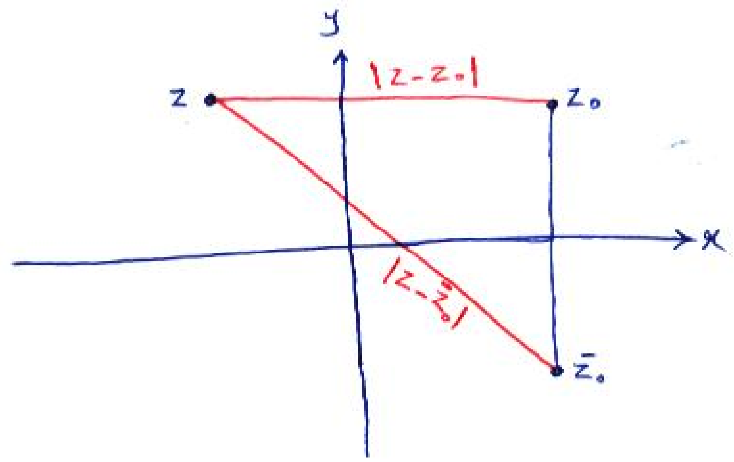
ب) اگر $Im(z_0) < 0$ باشد:

z_0 مطابق:

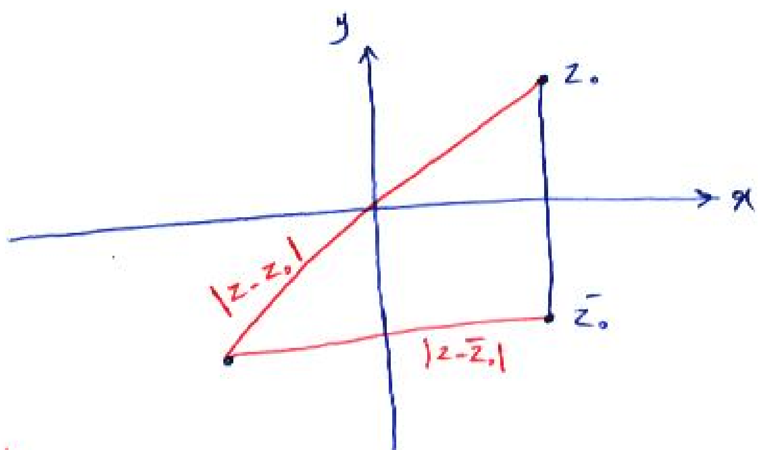




تحلیل حالت «الف»

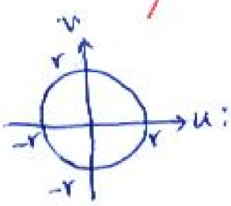


تحلیل حالت «ب»



$$|w| = \cancel{|e^{i\theta}|}^{\,1}\frac{|z-z_0|}{|z-\bar{z}_0|} \Rightarrow |w| \leq 1$$

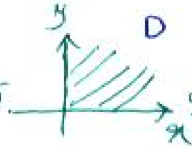
نکته: اگر $w = 2e^{i\theta}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ باشد، فقط بجای شعاع ۱، ۲ می‌شود. یعنی همان حالت «الف» و «ب» می‌شود با شعاع ۲:



نکته: اگر نگاشت ناحیه D توسط $w=f(z)$ ناحیه D' باشد، آنگاه نگاشت ناحیه D توسط $e^{i\theta} f(z)$ همان ناحیه D' است که به اندازه θ در جهت مثلثاتی (مثبت) دوران می‌کند.

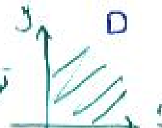
$$* \; D \xrightarrow{w=f(z)} D' \;\longrightarrow\; D \xrightarrow{e^{i\theta} f(z)} D'$$ | دوران به اندازه θ

مثال) اگر نگاشت ناحیه

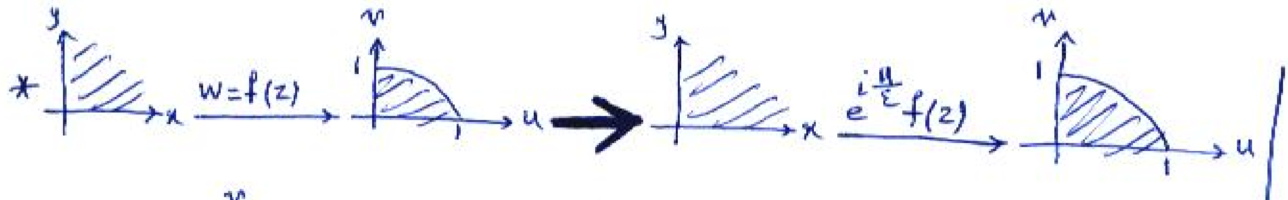


توسط تابع $w=f(z)$ ناحیه

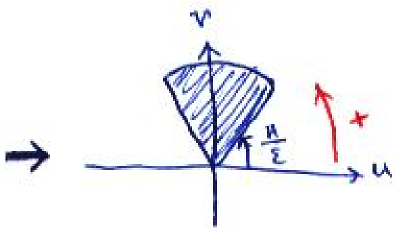
باشد، آنگاه نگاشت ناحیه



توسط $e^{i\frac{\pi}{4}} f(z)$ را بدست آورید.



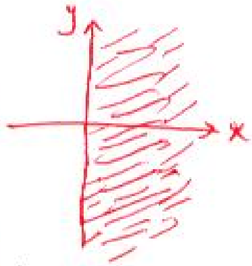
دوران به اندازه $\theta=\frac{\pi}{4}$



فرم کلی

نکته: نگاشت عمود منصف z_1 و z_2 توسط $w=e^{i\theta}\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ همواره دایره واحد است. بنابراین نگاشت ناحیه‌های بالا یا پایین عمود منصف که z_1 در آن واقع باشد، همواره داخل دایره واحد و ناحیه‌ای که z_1 در آن واقع نباشد، همواره خارج دایره‌ی واحد می‌باشد.

مثال

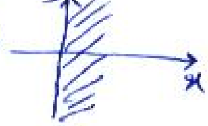


$w=\dfrac{z-1}{z+1}$ → ؟

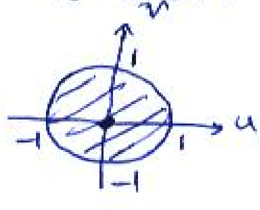
① ابتدا عمود منصف بودن را بررسی کن: اگر بود ← یا داخل است یا خارج. اگر نبود ←

② سپس جواب بدست می‌آید.

برای اینکه بدانیم داخل است یا خارج:
$z_1=1$, $z_2=-1$ → واقع



در $z_1=1$ است. ⇒ داخل دایره واحد



نقطه وسط $=\dfrac{-1+1}{2}=0$ → پس عمود منصف است و یا داخل است و یا خارج.

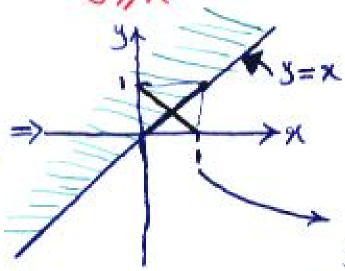
چون در نقطه وسط $=0$، هم عمود است و هم نصف می‌کند.

نکته: برای اینکه بدانیم عمود منصف است یا نه:

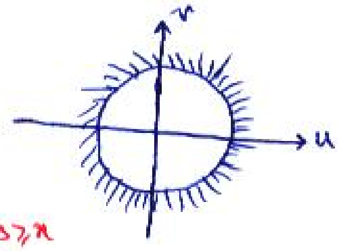
مثال نگاشت ناحیه $y \geq x$ $\xrightarrow{W=\frac{z-1}{z-i}}$ ؟

$z_1 = 1$

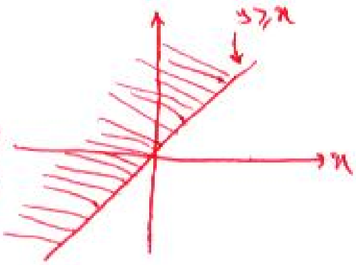
$z_2 = +i$ ⇒



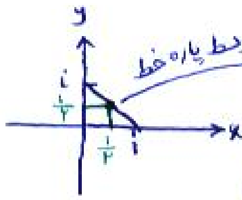
مختصات نقطه وسط پاره خط z_1 و z_2
$$\begin{cases} z_1 = 1 \longrightarrow \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} = x \\ z_2 = 1 \longrightarrow \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} = y \end{cases}$$
⟵ در مرزی باشد ⇐ یا داخل است و یا خارج دایره واحدی باشد ⇐ خارج دایره واحد می‌باشد چون $z_1 = 1$ واقع نیست



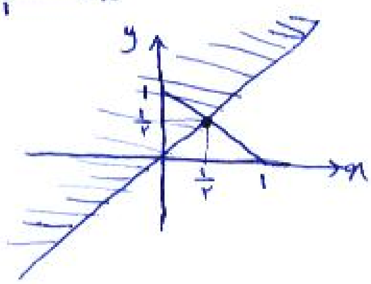
بعبارت دیگر



$\xrightarrow{W=\frac{z-1}{z-i}}$

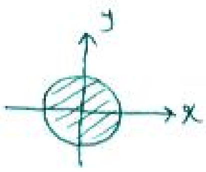


وسط پاره خط
$$\begin{cases} x = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow$$ عمود و منصف است.

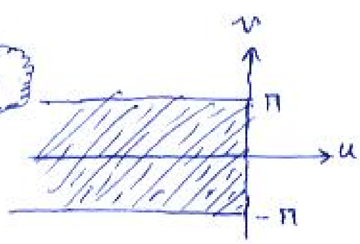


نگاشت $\operatorname{Ln} z$

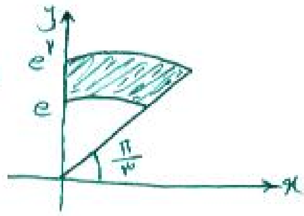
$W = \operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} r + i\theta$ و $-\pi \leq \theta \leq \pi$ $\Rightarrow \begin{cases} u = \operatorname{Ln} r \\ v = \theta \end{cases}$ $-\pi < \theta \leq \pi$

مثال  $\xrightarrow{W=\operatorname{Ln} z}$ ؟

$$W = \operatorname{Ln} z = \begin{cases} u = \operatorname{Ln} r \longrightarrow r \leq 1 \longrightarrow \operatorname{Ln} r \leq 0 \longrightarrow u \leq 0 \\ v = \theta \longrightarrow -\pi < \theta \leq \pi \longrightarrow -\pi < v \leq \pi \end{cases}$$

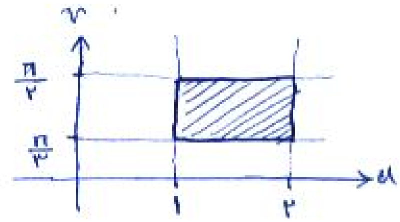


مثال



$\xrightarrow{W=\ln Z}$?

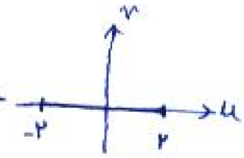
$$W=\ln Z=\ln r+\theta=\begin{cases}u=\ln r \longrightarrow e\leq r\leq e^2 \longrightarrow 1\leq \ln r\leq 2 \longrightarrow \underline{1\leq u\leq 2}\\ v=\theta \longrightarrow \frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \longrightarrow \underline{\frac{\pi}{3}\leq v\leq \frac{\pi}{2}}\end{cases}$$



$$W=z+\frac{1}{z}\Rightarrow u+iv=r\cos\theta+ir\sin\theta+\frac{1}{r}\cos\theta-i\frac{1}{r}\sin\theta\Rightarrow\begin{cases}u=r\cos\theta+\frac{1}{r}\cos\theta=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta\\ v=r\sin\theta-\frac{1}{r}\sin\theta=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta\end{cases}$$

الف) $r=a$ ⟵ معادله دایره به شعاع a

$$\begin{cases}\overset{r=1}{a=1}\Rightarrow\begin{cases}u=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta\longrightarrow u=2\cos\theta\\ v=0\end{cases}\\ a\neq1\Rightarrow\begin{cases}u=\left(a+\frac{1}{a}\right)\cos\theta\\ v=\left(a-\frac{1}{a}\right)\sin\theta\end{cases}\end{cases}$$



$$\longrightarrow \frac{u^2}{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=1$$ ⇐ معادله بیضی

ب) $\theta=\alpha$ متغیر ثابت

$$\begin{cases}u=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\alpha\longrightarrow \frac{u^2}{\cos^2\alpha}=r^2+\frac{1}{r^2}+2\\ v=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\alpha\longrightarrow \frac{v^2}{\sin^2\alpha}=r^2+\frac{1}{r^2}-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{\cos^2\alpha}-\frac{v^2}{\sin^2\alpha}=4$$ ⇐ معادله هذلولی

برق ۸۶ - (۲۵۱) ← ۵۸ : تحت نگاشت $W=z^K+\frac{1}{z^K}$ دایره $|z|=\alpha$ به چه شکلی تبدیل می‌شود؟ (K عدد طبیعی و $\alpha>1$)

۱) یک هذلولی با کانون های $W=\pm2$

۲) یک هذلولی با کانون های $W=2K$ و $W=-2K$

۳) یک بیضی با کانون های $W=\pm2$

۴) یک بیضی با کانون های $W=2K$ و $W=-2K$

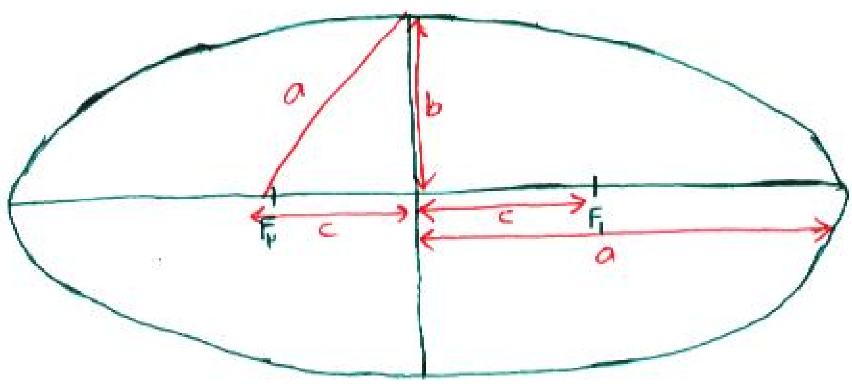
$$W=z^K+\frac{1}{z^K}=\begin{cases} u=\left(r^K+\frac{1}{r^K}\right)\cos K\theta \\ v=\left(r^K-\frac{1}{r^K}\right)\sin K\theta \end{cases}$$

چون: $W=z^K+\frac{1}{z^K}=r^K\cos K\theta+\frac{1}{r^K\cos K\theta}+i\left(r^K\sin K\theta-\frac{1}{r^K}\sin K\theta\right)$

$$\xrightarrow{r=d}\begin{cases} u=\left(d^K+\frac{1}{d^K}\right)\cos K\theta \\ v=\left(d^K-\frac{1}{d^K}\right)\sin K\theta \end{cases}\longrightarrow \frac{u^2}{\left(d^K+\frac{1}{d^K}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(d^K-\frac{1}{d^K}\right)^2}=1$$

$$a^2=b^2+c^2\longrightarrow d^{2K}+\frac{1}{d^{2K}}+2=d^{2K}+\frac{1}{d^{2K}}-2+c^2\Rightarrow c^2=4\rightarrow c=\pm 2$$ «گزینه «۳»

«یادآوری معادله بیضی»



مکان هندسی نقاطی که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت (کانون های بیضی) برابر مقدار ثابت $2a$ (طول قطر بزرگتر بیضی) باشد را بیضی می نامند.

$a^2=b^2+c^2$ و $a>c$

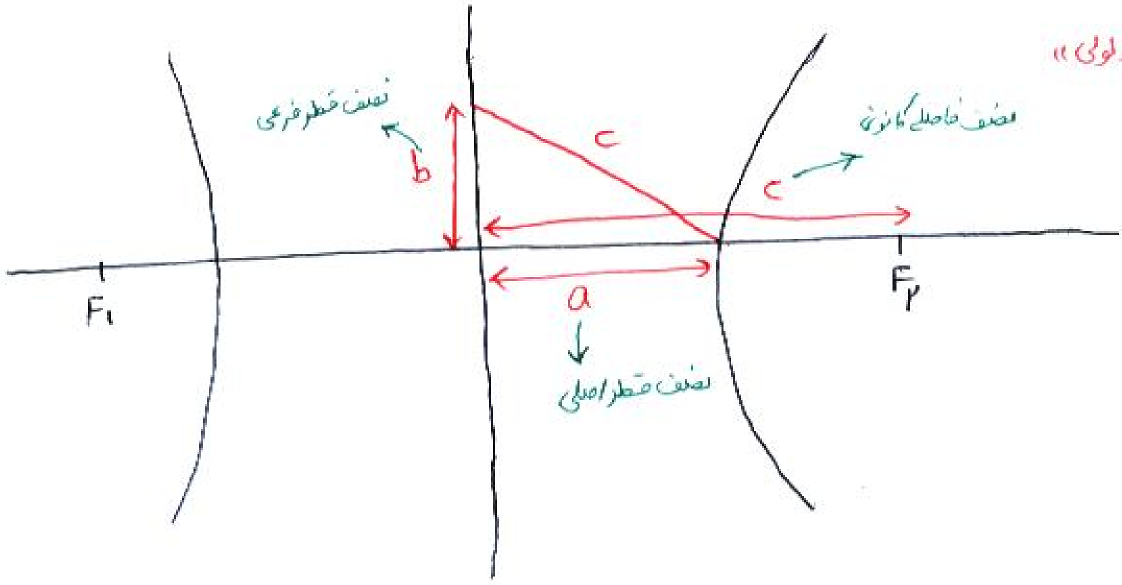
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

مرکز بیضی $O\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ $\quad F_{1,2}\left|\begin{matrix}\alpha\mp c\\ \beta\end{matrix}\right.$

$z_1, z_2\longrightarrow$ کانونهای بیضی هستند $\xrightarrow{\text{با شرط}} |z_1-z_2|<2a$

$$|z-z_1|+|z-z_2|=2a$$

«یادآوری معادله ~~[crossed out]~~ هذلولی»



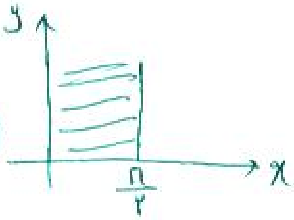
$c^2=a^2+b^2$ $\qquad$ $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

$|z-z_1|-|z-z_2|=2a$ $\quad$ (z_1 و z_2 کانون های هذلولی هستند (با شرط $|z_1-z_2|>2a$))

«نگاشت های ترکیبی»

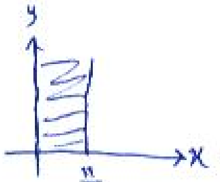
$x \longrightarrow \boxed{f} \xrightarrow{f(x)} \boxed{g} \xrightarrow{g(f(x))} \boxed{h} \longrightarrow h(g(f(x)))=y$

مثال

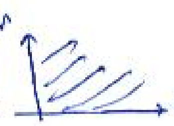


$\xrightarrow{W=Ln\left(\frac{\sin^2 z-i}{\sin^2 z+i}\right)}$ ؟

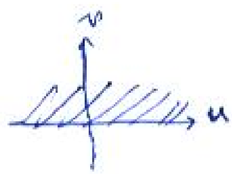
$z \longrightarrow \boxed{\sin} \xrightarrow{T=\sin z} \boxed{T^2} \xrightarrow{s=T^2} \boxed{\frac{s-i}{s+i}} \xrightarrow{M=\frac{s-i}{s+i}} \boxed{\ln M} \longrightarrow w$



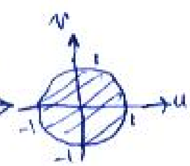
$\xrightarrow{\sin z}$ $\sin z=\begin{cases} u=\sin x \operatorname{ch} y \\ v=\sin x \operatorname{sh} y\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u>0 \\ v>0 \end{matrix} \longrightarrow$



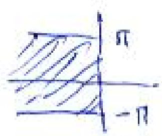
$\xrightarrow{z^2}$



$\xrightarrow{\frac{z-i}{z+i}}$



$\xrightarrow{Ln z}$



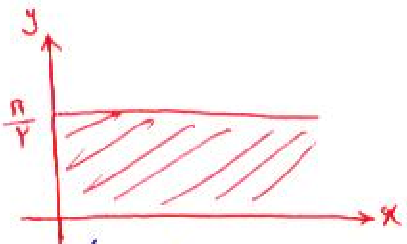
مکانیک ۸۵ - (۲۴۳) ← ۲۱: معادله خط $y=\frac{\pi}{4}$ تحت نگاشت $w=\cosh z$ کدام است؟

۱) $u^2-v^2=1$ ۲) $v^2-u^2=1$ ۳) $u^2-v^2=\frac{1}{2}$ ۴) $v^2-u^2=\frac{1}{2}$

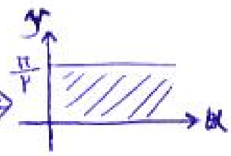
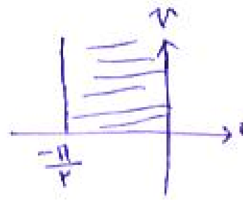
$$w=\operatorname{ch}z=\cos(iz)=\cos(ix-y)=\operatorname{ch}x\cos y+i\operatorname{sh}x\sin y\longrightarrow\begin{cases}u=\operatorname{ch}x\cos y\\ v=\operatorname{sh}x\sin y\end{cases}$$

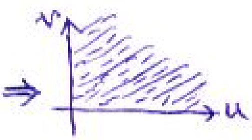
$$y=\frac{\pi}{4}\begin{cases}u=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch}x\\ v=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh}x\end{cases}\longrightarrow 2u^2-2v^2=1\longrightarrow u^2-v^2=\frac{1}{2}\longrightarrow$$ گزینه «۳»

مثال) نگاشت ناحیه هاشور خورده توسط $w=\operatorname{ch}z$ را بدست آورید.



از نگاشت ترکیبی حل می‌کنیم.

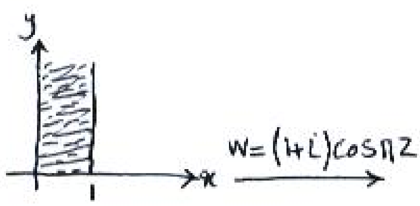
$w=\cosh z=\cos(iz)\Rightarrow$  $\xrightarrow{iz}$  $\xrightarrow{\cos z}$ $\begin{cases}u=\cos x\ \operatorname{ch}y\\ v=\sin x\ \operatorname{sh}y\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}u>0\\ v>0\end{matrix}$

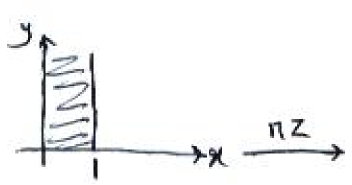
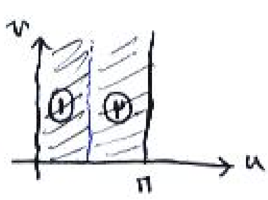
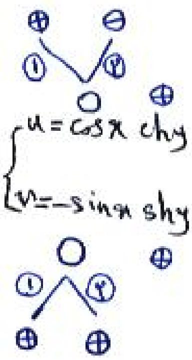
$\Rightarrow$ 

۲۳۴

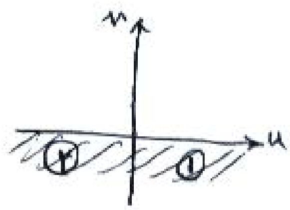
برق ۸۴ - (۲۴۳) ← ۲۰: نگاشت $w=(1+i)\cos\pi z$، نیم‌نوار ($0\le x\le 1$ و $y\ge 0$) از صفحه z را به چه ناحیه‌ای در صفحه w تبدیل می‌کند؟

۱) $u-v\ge 1$ ۲) $u-v\le 0$ ۳) $u+v\ge 0$ ۴) $u+v\le 0$

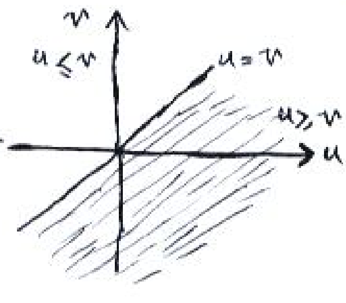
 $\xrightarrow{w=(1+i)\cos\pi z}$ ؟

 $\xrightarrow{\pi z}$  $\xrightarrow{\cos z}$ $\begin{cases}u=\cos x\ \operatorname{ch}y\\ v=-\sin x\ \operatorname{sh}y\end{cases}$ 

① $\begin{matrix}u>0\\ v<0\end{matrix}$ ② $\begin{matrix}u<0\\ v<0\end{matrix}$

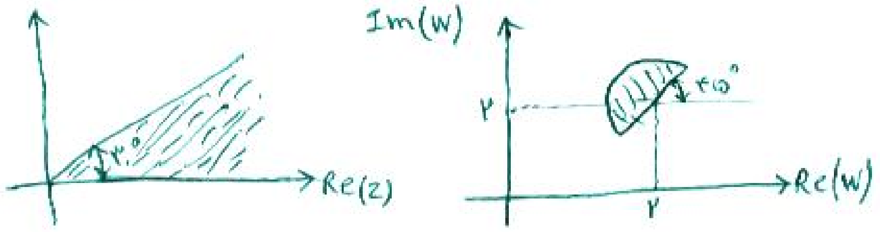


$(1+i)\cos z$, $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

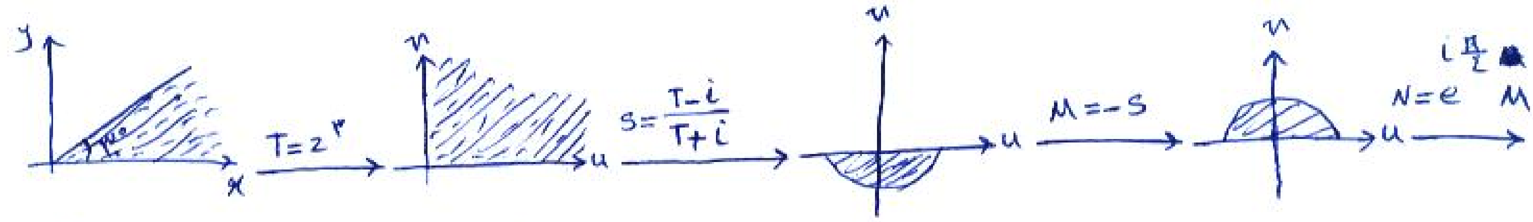


گزینه «۱»

برق ۶۷ - ۲۳۹ ← ۱ : کدام یک از تبدیل های همشکل «conformal» زیر منطقه هاشور خورده در صفحه z را به یک نیمه دیسک به شعاع ۱ واحد در صفحه W تصویر می کند؟
۲۳٤



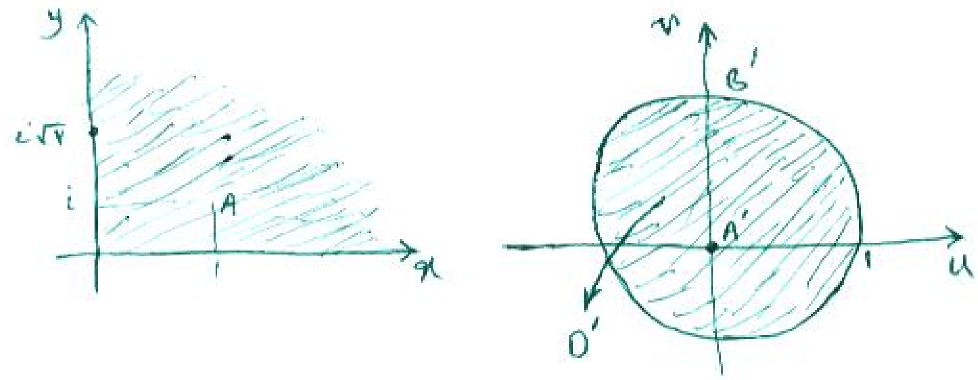
۱) $W(z)=-e^{i\frac{\pi}{4}}\dfrac{z^3-i}{z^3+i}+2+2i$ ۲) $W(z)=e^{i\frac{\pi}{4}}\dfrac{z^3-i}{z^3+i}+2+2i$ ۳) $W(z)=e^{i\frac{\pi}{4}}\dfrac{z^6-i}{z^6+i}+2+2i$ ۴) $W(z)=-e^{i\frac{\pi}{4}}\dfrac{z^6-i}{z^6+i}+2+2i$



$\Rightarrow$ گزینه «۱»

$$W=e^{i\frac{\pi}{4}}M+2+2i=-e^{i\frac{\pi}{4}}S+2+2i=-e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{T-i}{T+i}+2+2i \Rightarrow W=-e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{z^3-i}{z^3+i}+2+2i$$

برق ۷۵ - ۲٤۰ ← ۱۰ : با کدام تابع می توان حوزه D را به حوزه ′D تبدیل کرد بطوری که نقاط A و B مطابق شکل به نقاط ′A و ′B تصویر شوند؟



۱) $f(z)=e^{i\pi}\dfrac{z^2+2i}{z^2-2i}$

۲) $f(z)=e^{i\pi}\dfrac{z^2-2i}{z^2+2i}$

۳) $f(z)=\dfrac{z^2+2i}{z^2-2i}$

٤) $f(z)=\dfrac{z^2-2i}{z^2+2i}$

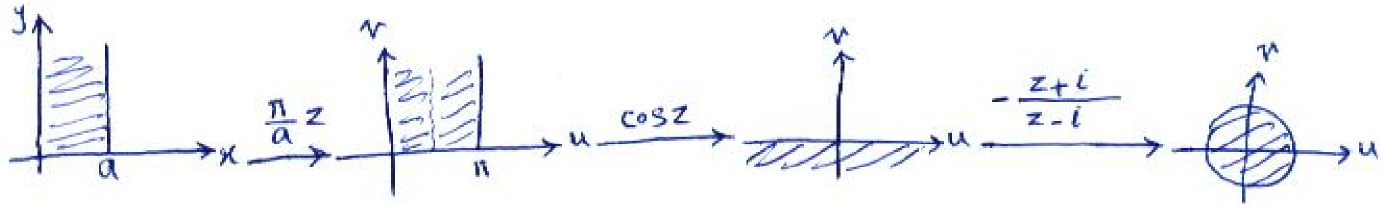
گزینه های ۱ و ۳ غلط هستند؛ چون خارج از دایره هستند.

$$z=i\sqrt{2}\rightarrow w=e^{i\pi}\frac{-2-2i}{-2+2i}=e^{i\pi}\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=ie^{i\pi}=-i\longrightarrow$$ گزینه ۲ غلط است

گزینه «٤» صحیح است.

کامپیوتر ۷۴ - ۲۴۹ ← ۳۶: تبدیل $w=\left(\dfrac{i+\cos\frac{\pi}{a}z}{i-\cos\frac{\pi}{a}z}\right)$ ناحیه نیم نوار $0\leq x\leq a$ و $0\leq y$ را به چه ناحیه‌ای در صفحه مختلط تبدیل می‌کند؟

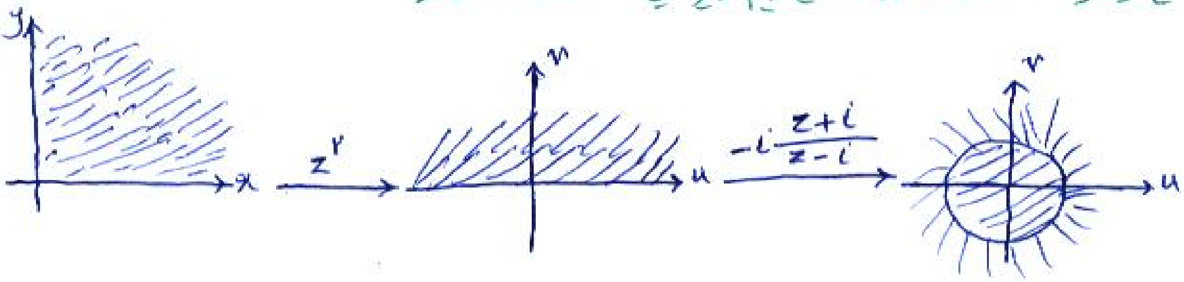
۱) نیم صفحه بالایی ۲) نیم دایره واحد بالای محور حقیقی ۳) ناحیه خارج نیم دایره واحد بالای محور حقیقی ۴) قرص دایره واحد



گزینه «۴»

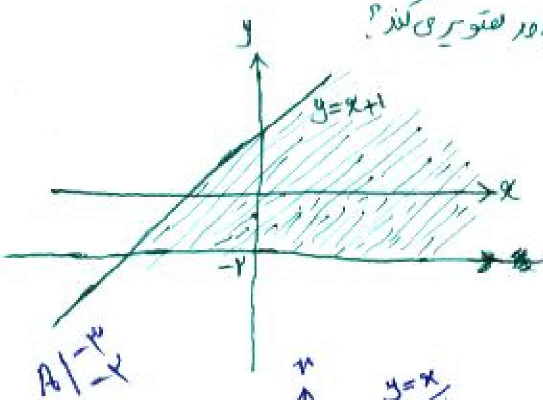
کامپیوتر ۷۹ - ۲۴۸ ← ۴۱: نگاشت $\dfrac{z^2+i}{iz^2+1}$ ربع اول صفحه z ($y>0$ و $x>0$) را به کدام ناحیه از صفحه w تبدیل می‌کند؟

۱) نیم دایره بالای از دایره یک ۲) خارج دایره یک ۳) بالای محور x خارج از نیم دایره یک ۴) داخل دایره یک



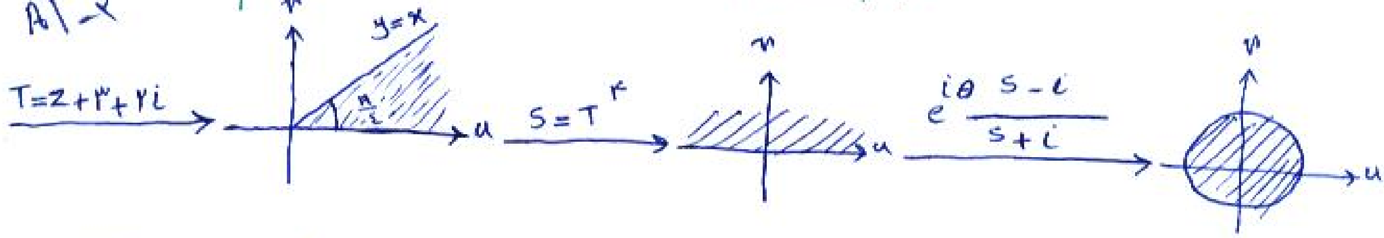
خارج دایره یک درست است

برق ۷۹ - ۲۴۲ ← ۱۴: کدامیک از نگاشتهای داده شده ناحیه زیر را بر روی نقاط داخلی دایره واحد تصویر می‌کند؟



۱) $f(z)=\dfrac{z^4-(3+2i)}{-iz^4+2+3i}$ ۲) $f(z)=\dfrac{(z-3-2i)^4-i}{-i(z-3-2i)^4+1}$

۳) $f(z)=\left[\dfrac{z-(3+2i)}{z+(3-2i)}\right]^4$ ۴) $f(z)=\dfrac{(z+3+2i)^4-i}{-i(z+3+2i)^4+1}$



$$w=e^{i\theta}\frac{(z+3+2i)^4-i}{(z+3+2i)^4+i}=-ie^{i\theta}\frac{(z+3+2i)^4-i}{-i(z+3+2i)^4+1}\longrightarrow$$ گزینه «۴»

معدن ۸۴ - نگاشت

$W = \dfrac{e^z - i}{e^z + i}$ ناحیه $A = \{z = x + iy : 0 < y < \pi\}$ را به کدام ناحیه از نواحی داده شده‌ی نگاشت می‌دهد؟

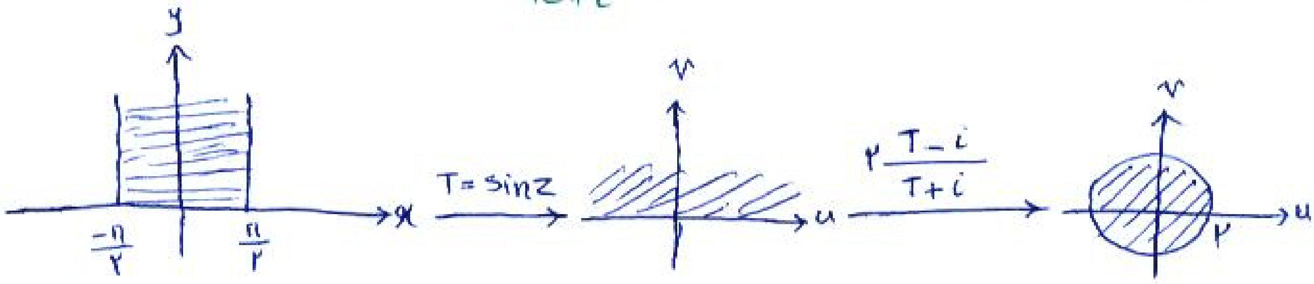
۱) $|W| < 1$ ✓ ۲) $|W| > 1$ ۳) $\operatorname{Im} W < 0$ ۴) $|W - i| < 1$

برق ۸۷: کدام یک از نگاشت‌های زیر ناحیه $\{ |x| < \frac{\pi}{2}$ و $0 < y \}$ را بر داخل دایره به شعاع ۲ و مرکز $2+i$ تصویر می‌کند؟

(۲۵۲) ← ۶۶

۱) $\dfrac{2\sin z - i}{\sin z + i} + 2 + i$ ۲) $\dfrac{2\sin z - 2i}{\sin z + i} + 2 + i$

۳) $\dfrac{2\ln z - 2i}{\ln z + i} + 2 + i$ ۴) $\dfrac{2\ln z - i}{\ln z + i} + 2 + i$



$W = 2\dfrac{\sin z - i}{\sin z + i} + 2 + i \longrightarrow$ گزینه «۱»

۶۹۲

ابزار دقیق ۸۸ - ۶۷۷ ← ۱۰: نقاط ثابت تبدیل $W = f(z) = \dfrac{z^2 + 2i}{3z}$ چه نقاطی ثابت می‌مانند؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

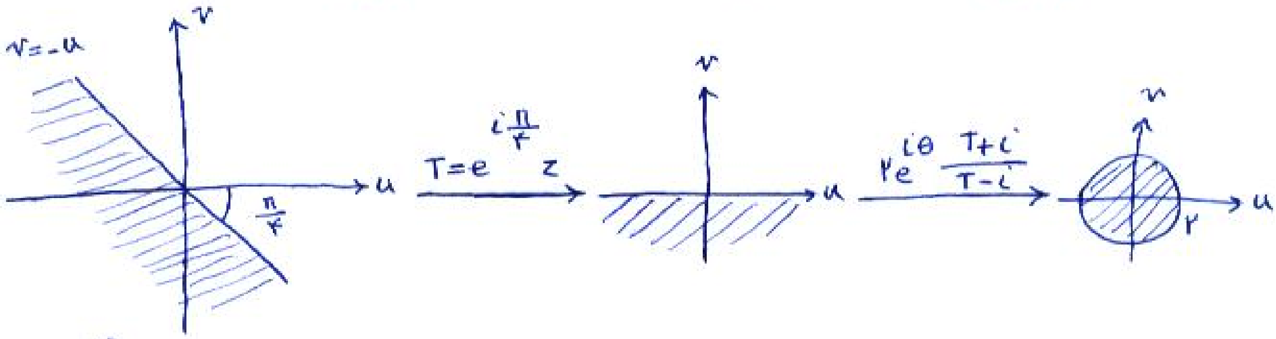
ثابت می‌ماند $\xrightarrow{\text{یعنی}} W = f(z) \longrightarrow f(z) = z \longrightarrow z = \dfrac{z^2 + 2i}{3z} \longrightarrow z^2 + 2i = 3z^2 \longrightarrow -2z^2 + 2i = 0 \longrightarrow 2z^2 = 2i \longrightarrow z^2 = i$

اگر ورودی z است، خروجی نیز z باشد.

$\Rightarrow z = \operatorname{cis} \dfrac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{2}$ → $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ → گزینه «۱»

برق ۸۹-۷۰۸ ← ۶: کدام تبدیل، دیسک $|z|<2$ را روی ناحیه $u+v>0$ تصویر می‌کند؟

۱) $w=e^{-i\frac{\pi}{4}}\dfrac{z-2i}{z+2i}$ ۲) $w=e^{i\frac{\pi}{4}}\dfrac{z+2i}{z-2i}$ ۳) $w=e^{-i\frac{\pi}{4}}\dfrac{z+2i}{z-2i}$ ۴) $w=e^{i\frac{\pi}{4}}\dfrac{z-2i}{z+2i}$



$$w=2e^{i\theta}\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}z+i}{e^{i\frac{\pi}{4}}z-i} \qquad e^{i\frac{\pi}{4}}zw-iw=2e^{i\theta}e^{i\frac{\pi}{4}}z+2e^{i\theta}i\longrightarrow z\left(e^{i\frac{\pi}{4}}w-2e^{i\theta}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)=iw+2e^{i\theta}i$$

$$\Rightarrow z=e^{-i\frac{\pi}{4}}\,i\,\frac{w+2e^{i\theta}}{w-2e^{i\theta}}\longrightarrow w=e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{z+2e^{i\theta}}{z-2e^{i\theta}}$$

اگر $\theta=\frac{\pi}{2}\longrightarrow w=e^{i\frac{\pi}{4}}\dfrac{z+2i}{z-2i}\longrightarrow$ گزینه «۲»

این تست غلط طرح شده است؛ چون هم گزینه «۲» و هم گزینه «۴» درست است.

اگر $\theta=\frac{-\pi}{2}\longrightarrow w=e^{i\frac{\pi}{4}}\dfrac{z-2i}{z+2i}\longrightarrow$ گزینه «۴»

مکانیک ۸۹- ۷۱۲ ← ۳: نگاشت $w=\dfrac{z-1}{z-2}$ نقاط واقع بر منحنی $|z+1|=3$ را بر کدام منحنی می‌نگارد؟

۱) خطی که از مبداء مختصات می‌گذرد. ۲) خطی موازی محور مختلط ۳) دایره‌ای که از مبداء مختصات می‌گذرد ۴) دایره‌ای که مرکز آن مبداء مختصات است.

$$z=\frac{2w-1}{w-1} \text{ و } |z+1|=3\Rightarrow\left|\frac{2w-1}{w-1}+1\right|=3\longrightarrow\left|\frac{3w-2}{w-1}\right|=3\longrightarrow|3w-2|^2=9|w-1|^2$$

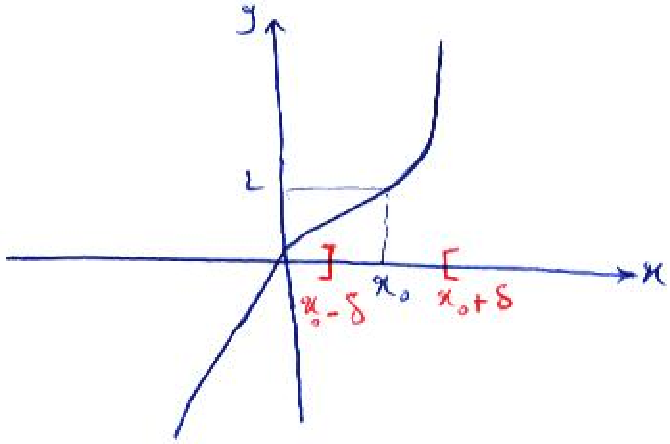
$$\longrightarrow(3u-2)^2+9v^2=9(u-1)^2+9v^2\longrightarrow-12u+4=-18u+9\longrightarrow6u=5\longrightarrow u=\frac{5}{6}\longrightarrow$$ گزینه «۲»

حد توابع مختلط:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

$$\underset{\exists}{\cancel{\forall}} \varepsilon > 0 \,,\ \underset{\forall}{\cancel{\exists}} \delta > 0 \,;\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

*در همسایگی x_0 نقاطی وجود دارند که به ازای آن‌ها می‌توانیم به هر اندازه دلخواه $f(x)$ را به L نزدیک کنیم.

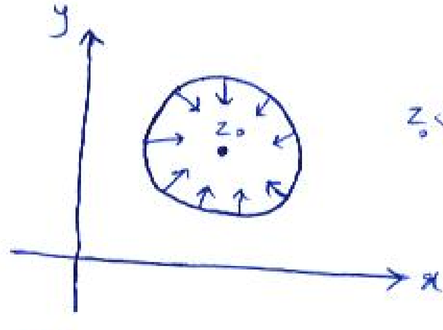


$$|x - a| < b \equiv \begin{cases} * & \text{فاصله } x \text{ از } a \text{ کمتر از } b \text{ است.} \\ * & \text{همسایگی حول } a \text{ به شعاع } b \end{cases}$$

$$\exists \delta > 0 \,,\ \forall \varepsilon > 0 \,;\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

$$\forall \beta > 0 \,;\ \exists \alpha > 0 \longrightarrow |z - z_0| < \alpha \longrightarrow |f(z) - L| < \beta$$



ببینیم z به سمت z_0 نزدیک می‌شود.

نکته: برای محاسبه $\lim_{z \to z_0} f(z)$ مطابق زیر عمل می‌کنیم:

1. $t = z - z_0$ در نظر می‌گیریم تا حد حول صفر تبدیل شود.
2. بجای z، $z = r\,cis\,\theta$ قرار می‌دهیم و سپس $r \to 0$ می‌دهیم. درصورتی که حاصل حد به θ بستگی داشته باشد، می‌گوییم حد وجود ندارد.

مثال) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z^2}{(\bar{z})^2} = \dfrac{r^2 \operatorname{cis} 2\theta}{r^2 \operatorname{cis}(-2\theta)} = \operatorname{cis}(4\theta) \longrightarrow$ حد وجود ندارد؛ چون به θ وابسته است

مثال) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z^3+2\bar{z}}{\bar{z}} = \dfrac{r^3 \operatorname{cis} 3\theta}{r \operatorname{cis}(-\theta)} + 2 = \lim\limits_{r\to 0} r^2 \operatorname{cis}(4\theta)+2 = 2 \longrightarrow$ حد وجود دارد؛ چون به θ وابسته نیست و یک عدد است.

نکته: اگر در توابع کسری، صورت و مخرج نسبت به z و $\bar{z}$ همگن باشند ۳ نکته داریم:

مرتبه همگنی صورت و مخرج یکسان $\longrightarrow$ حد وجود ندارد

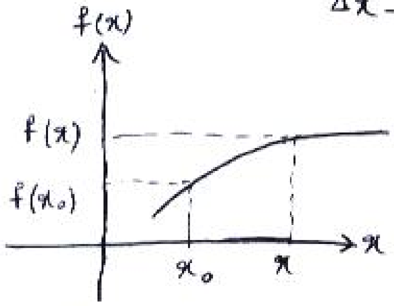
مرتبه همگنی صورت بیشتر مخرج $\longrightarrow$ حد وجود دارد و برابر صفر است

مرتبه همگنی صورت کمتر از مخرج $\longrightarrow$ حد وجود ندارد و مقدار آن ∞ است

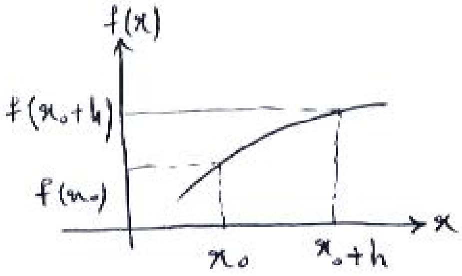
ج ۶-۱

☑ مشتق توابع مختلط:

$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow y \qquad \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$



$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$z \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow w$

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

قضیه ۱: اگر تابع $f(z)=u+iv$ مشتق پذیر باشد، آنگاه شرایط کوشی ریمان در مورد u و v به قرار زیر است:

شرایط کوشی ریمان در مختصات دکارتی
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

شرایط کوشی ریمان در مختصات قطبی
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \theta}=-r\dfrac{\partial v}{\partial r}\end{cases}$$

نتیجه ۱: اگر شرایط کوشی ریمان برقرار نباشد، تابع $f(z)$ مشتق پذیر نیست.

مثال) مشتق پذیری $f(z)=\bar z$ را بررسی کنید.

$$w=f(z)=\bar z=x-iy \Rightarrow \begin{cases}u=x \longrightarrow u_x=1,\ u_y=0\\ v=-y \longrightarrow v_x=0,\ v_y=-1\end{cases} \qquad \neq$$

تابع $f(z)=\bar z$ در هیچ نقطه‌ای مشتق ندارد.

نتیجه ۲: ممکن است شرایط کوشی ریمان در نقطه z_0 برقرار باشد، اما تابع $f(z)$ در z_0 مشتق پذیر نباشد.

مثال) ثابت کنید که با وجود اینکه شرایط کوشی ریمان در $z=0$ برای تابع
$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{(\bar z)^2}{z} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$$
برقرار است، اما تابع در $z=0$ مشتق ندارد؟

$$f(z)=\frac{(x-iy)^2}{x+iy}$$

$x=0 \Rightarrow f(z)=iy \Rightarrow \begin{cases}u=0 \longrightarrow u_x=0,\ u_y=0\\ v=y \longrightarrow v_x=0,\ v_y=1\end{cases}$

$y=0 \Rightarrow f(x)=x \Rightarrow \begin{cases}u=x \longrightarrow u_x=1,\ u_y=0\\ v=0 \longrightarrow v_x=0,\ v_y=0\end{cases}$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0}=1 \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=0}=0$$
$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{y=0}=0 \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{x=0}=1$$

تابع فوق در مبدأ از مختصات شرایط کوشی ریمان برقرار است.

$$f'(0)=\frac{\frac{(\bar z)^2}{z}-0}{z-0}=\frac{(\bar z)^2}{z^2}\longrightarrow$$

چون همگن از درجه یک می‌باشد حد وجود ندارد. در نتیجه مشتق پذیر نیست (مشتق وجود ندارد).

برق ۸۷ - ۳.۸ ← ۳ ۴ : کدام یک از گزاره‌های زیر، درمورد تابع مختلط $f(z)=\begin{cases}\frac{(\bar z)^3}{z^2} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$ صحیح است؟
۲۶۲

۱) درمبداء O پیوسته نیست.

۲) مبداء O مشتق پذیر نیست اما روابط کوشی ریمان در این نقطه صدق می‌کند.

۳) درمبداء O مشتق پذیر نیست و در روابط کشی ریمان نیز در این نقطه صدق نمی‌کند.

۴) درمبداء O پیوسته است و در روابط کشی ریمان نیز در این نقطه صدق می‌کند.

$$f(z)=\frac{(\bar z)^3}{z^2}=\frac{(x-iy)^3}{(x+iy)^2}$$

$\xrightarrow{x=0} -iy \to u=0,\ v=-y$

$\xrightarrow{y=0} x \to u=x,\ v=0$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0}=1 \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=0}=0$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{y=0}=0 \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{x=0}=-1$$

$\longrightarrow$ مشتق پذیر نیست و روابط کشی ریمان نیز در این نقطه صدق نمی‌کند $\longrightarrow$ «گزینه (۳)»

$$f'(0)=\frac{\frac{(\bar z)^3}{z^2}-0}{z-0}=\frac{(\bar z)^3}{z}\Rightarrow$$ حد وجود ندارد

قضیه ۲: اگر درمورد تابع $f(z)=u+iv$ دو شرط زیر برقرار باشد؛ آنگاه $f(z)$ مشتق پذیر است.

① توابع حقیقی u و v پیوسته و دارای مشتقات جزئی باشند.

② شرایط کشی ریمان درمورد u و v برقرار باشد.

مثال) مشتق پذیری توابع زیر را بررسی کنید.

① $w=\sin z$

$w=\sin z\begin{cases}u=\sin x\,\mathrm{ch}\,y\\ v=\cos x\,\mathrm{sh}\,y\end{cases}$ $\longrightarrow$ شرط ① برقرار است $\longrightarrow$ حال شرط ② $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x\,\mathrm{ch}\,y & \frac{\partial v}{\partial x}=-\sin x\,\mathrm{sh}\,y\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\sin x\,\mathrm{sh}\,y & \frac{\partial v}{\partial y}=\cos x\,\mathrm{ch}\,y\end{cases}$

$\sin z$ در تمام صفحه مختلط w مشتق پذیر است.

② $w=|z|^2$

$$w=|z|^2=x^2+y^2\quad\begin{cases}u=x^2+y^2\\ v=0\end{cases}\longrightarrow \underset{\text{برقرار است}}{\text{شرط اول}}\longrightarrow \underset{\text{بررسی می‌کنیم}}{\text{شرط دوم را}}\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x & \dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=2y & \dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$$

$x=0$, $y=0$ — این تابع فقط در $z=0$ مشتق دارد.
مبداء

③ $w=x^2+iy^2$

$$w=x^2+iy^2\quad\begin{cases}u=x^2\\ v=y^2\end{cases}\longrightarrow \underset{\text{برقرار است}}{\text{شرط ①}}\longrightarrow \text{شرط ②}\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x & \dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=0 & \dfrac{\partial v}{\partial y}=2y\end{cases}$$

این تابع فقط روی خط $x=y$ مشتق دارد. $2x=2y\longrightarrow x=y$

④ $w=\cos(\bar z)$

$$w=\cos(\bar z)=\cos(x-iy)=\begin{cases}u=\cos x\,\operatorname{ch}y\\ v=\sin x\,\operatorname{sh}y\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\sin x\,\operatorname{ch}y & \dfrac{\partial v}{\partial x}=\cos x\,\operatorname{sh}y\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=\operatorname{sh}y\,\cos x & \dfrac{\partial v}{\partial y}=\operatorname{ch}y\,\sin x\end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\longrightarrow -\sin x\,\operatorname{ch}y=\sin x\,\operatorname{ch}y\longrightarrow 2\sin x\,\operatorname{ch}y=0\longrightarrow \sin x=0\longrightarrow x=-k\pi$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\longrightarrow 2\cos x\,\operatorname{sh}y=0\begin{cases}\cos x=0\longrightarrow x=(2k-1)\frac{\pi}{2}\\ \operatorname{sh}y=0\longrightarrow y=0\end{cases}$$

این تابع فقط در $k\pi$ و 0 یا $z=k\pi$ مشتق دارد.

⑤ $w=\operatorname{Ln}z$

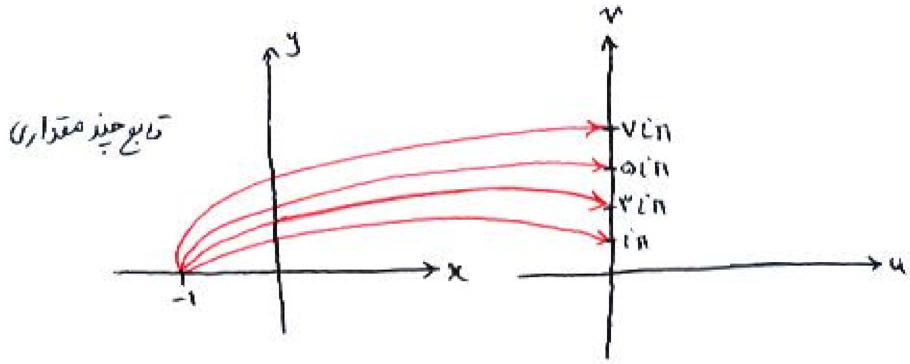
$$w=\operatorname{Ln}z=\operatorname{Ln}r+i\theta$$

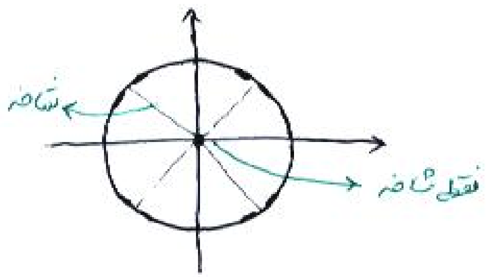
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial \theta}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial r}=0\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial \theta}=1\end{cases}\qquad \begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\longrightarrow \frac{1}{r}=\frac{1}{r}\\ &\frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}\longrightarrow 0=0\end{aligned}$$

$\operatorname{Ln}(z)$ در مبداء و نقاط روی شاخه اش مشتق پذیر نمی باشد.

$\ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$

$\ln(-1) = \cancel{\ln 1}^{\,0} + i(\pi + 2k\pi) = i(\pi + 2k\pi)$





$\alpha < \theta \leq 2\pi + \alpha \longleftrightarrow$ α شاخه است

شاخه اصلی $\longrightarrow \alpha = -\pi$

$\ln z = \ln r + i\theta$ تابع تک مقداری

$\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$

Ln روی شاخه، مشتق پذیر نیست.

نکته مهم: برای توابعی که می‌شود آنها را برحسب z و $\bar{z}$ نوشت، داریم:

$\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \equiv$ روابط کوشی ریمان برقرار است

یعنی هم شرط ① و هم شرط ② برقرار است.

مثال) $\dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0 \longrightarrow$ شرط ① و ② برقرار است

مثال) $w = \bar{z}z \longrightarrow \dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0 \longrightarrow$ فقط در $z=0$ مشتق دارد

مثال) $w = \cos(\bar{z}) \longrightarrow \dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}} = -\sin \bar{z} = 0 \longrightarrow \bar{z} = k\pi \longrightarrow z = k\pi$

مثال) $\dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$

مثال) $f(z) = z^4 e^{z^2} \cos z \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \longrightarrow$ در تمام نقاط

* توابع تحلیلی:

تابع $f(z)$ در z_0 تحلیلی است اگر دو شرط زیر برقرار باشد:

① $f(z)$ در z_0 مشتق پذیر باشد.

② در همسایگی z_0 به شعاع r، در تمام نقاط مشتق پذیر باشد.

نتیجه ۱: اگر $f(z)$ در z_0 مشتق پذیر نباشد، تحلیلی هم نیست.

مثال) تابع $\bar{z}$ در کل صفحه مشتق پذیر نمی باشد ← در کل صفحه تحلیلی هم نیست.

نتیجه ۲: ممکن است $f(z)$ در z_0 مشتق پذیر باشد، اما در z_0 تحلیلی نباشد.

مثال) تابع $|z|^2 = w$ با وجود اینکه در مبدا، مشتق دارد، اما در این نقطه تحلیلی نیست.

برق ۷۴-۲۹۹ ← ۷: تابع $f(z) = x^2 + iy^2$ مفروض است. کدام عبارت صحیح نیست؟

۱) تابع $f(z)$ بر $x=y$ تحلیلی است.

۲) تابع $f(z)$ بر $x=y$ مشتق پذیر است.

۳) روابط کشی ریمان در $x=y$ برقرار است.

۴) این تابع ناپیوسته نیست.

گزینه «۱».

* مشتق توابع تحلیلی:

اگر تابع $f(z) = u + iv$ تحلیلی باشد، آنگاه:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

نتیجه: اگر در یک تابع تحلیلی، حداقل یکی از قسمت‌های حقیقی یا موهومی $f(z)$ معلوم باشد، مشتق تابع $(f'(z))$ معلوم است.

مثال) اگر در تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ ، $u=\sin x\, chy+2xy$ باشد، آنگاه $f'(z)$ را بدست آورید.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\cos x\, chy+2y-i(\sin x\, shy+2x) \Rightarrow f'(z)=\cos z-2iz$$

نکته: اگر تابع $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد و برحسب x و y داده شده باشد؛ برای آنکه $f(z)$ را برحسب z بنویسیم کافی است بجای x ها z و بجای y ها صفر قرار دهیم.

$$f(x+iy)\Big|_{\substack{x=z\\ y=0}}=f(z) \qquad f(re^{i\theta})\Big|_{\substack{r=z\\ \theta=0}}=f(z)$$

مثال) $f(z)=x^2+iy^2$ را برحسب z بدست آورید.

$$f(z)=x^2+iy^2\Big|_{\substack{x=z\\ y=0}}=z^2=(x+iy)^2=x^2+i2xy-y^2 \Rightarrow f(z)=x^2-y^2+i2xy$$

که غلط است؛ چون $f(z)$ تحلیلی نیست.

☑ مشتق $f(z)$ در مختصات قطبی:

$$f'(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-i\theta}$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial r}-i\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)e^{-i\theta}$$

$$=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-i\theta}$$

نکته: با مشخص بودن حداقل یکی از مشتقهای حقیقی یا موهومی، $f'(z)$ معلوم است.

مثال) اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد و $v=r^2\cos 2\theta$ باشد، آنگاه $f'(z)$ را بدست آورید.

$$f'(z)=\left(\frac{1}{r}(-2r^2\sin 2\theta)+i2r\cos 2\theta\right)e^{-i\theta}\Big|_{\substack{\theta=0\\ r=z}}=2iz$$

اتوماسیون ۸۵ - ۳.۶ ← ۵۴: اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ یک تابع تحلیلی و $u(x,y)=2x-2xy$ آنگاه $f'(z)$ کدام است؟

۱) $f'(z)=2(1-y)+2iy$ ۲) $f'(z)=2(1-y)+2ix$ ۳) $f'(z)=2(1-y)+2i(x+y)$ ۴) $f'(z)=2(1-y)+2i(x-y)$

$$u=2x-2xy \rightarrow f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=2-2y-i(0-2x) \Rightarrow f'(z)=2-2y+i2x \Rightarrow f'(z)=2(1-y)+2ix$$

گزینه «۲»

مواد ۸۷ - ۳.۹ - ۶۶: فرض کنید $f(z)$ تابعی تحلیلی با قسمت حقیقی $u(x,y)=e^{-2xy}\sin(x^2-y^2)$ است. $f'(1)$ برابر است با:

۱) $2\cos 1+2i\sin 1$ ۲) $\cos 1-2i\sin 1$ ۳) $2\cos 1+i\sin 1$ ۴) $\cos 1-i\sin 1$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=(2\cos z)+i(2\sin z) \longrightarrow$$ گزینه «۱»

برای
قضیه: اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد، آنگاه:

① u و v همساز هستند.

② v را مزدوج همساز u می‌نامند.

و برعکس ← یعنی اگر شرایط ① و ② برقرار باشند، $f(z)$ تحلیلی است.

① تعریف تابع همساز (هارمونیک): تابع حقیقی $u(x,y)$ را همساز گویند اگر در معادله لاپلاس صدق کند.

$u_{xx}+u_{yy}=0$: فرم دکارتی

$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$: فرم قطبی

$u_{z\bar{z}}=0$: فرم مختلط

مثال: اگر $u=r^m\cos\theta$ باشد، m را طوری بیابید که u همساز باشد.

نوع اول سوال

$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \longrightarrow m^2-1=0 \longrightarrow m=\pm 1$: همساز باشد

نوع دوم سؤال

مثال) اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد آنگاه $u=e^{\alpha x}\sin y+2\beta xy$ باشد β و α را بیابید.

چون u و v تحلیلی هستند $\Leftarrow$ u و v همساز هستند پس:

$$u_{xx}=\alpha^2 e^{x}\sin y=0$$
$$u_{yy}=-e^{\alpha x}\sin y \Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0 \rightarrow \alpha^2-1=0 \rightarrow \alpha=\pm 1 \text{ و } \beta \text{ دلخواه}$$

مکانیک ۸۲-۳۱: قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی f در صفحه مختلط z بصورت $\operatorname{Re} f(z)=u(x,y)=\alpha x^2y-y^3-\beta y$ می‌باشد که در آن α و β ثابت حقیقی اند، در اینصورت:

۱) فقط $\alpha=3$ و فقط $\beta=1$ ۲) فقط $\alpha=-3$ و فقط $\beta=1$ ۳) $\alpha=-3$ و β دلخواه ۴) $\alpha=3$ و β دلخواه

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \rightarrow 2\alpha y-6y=0 \rightarrow \alpha=3 \text{ و } \beta \text{ دلخواه} \rightarrow \text{گزینه «۴»}$$

برق ۸۳-۱۲: اگر $u=u(x,y)$ در یک ناحیه D از صفحه xoy همساز و $z=x+iy$ باشد آنگاه مقدار $\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial \bar z}$ برابر است با:

۱) صفر ۲) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4i}$ ۳) $\frac{-1}{4}$

گزینه «۱»

$$z=x+iy \begin{cases} u=x \\ v=y \end{cases} \qquad \frac{\partial u}{\partial z}$$

برق ۸۹: اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ (u و v حقیقی و $z=x+iy$) و $u(x,y)=\alpha x\operatorname{ch} x\cos y+\beta y\operatorname{sh} x\sin y$ آنگاه به ازای کدام α و β ثابت، تابع f تحلیلی است؟

۱) $\alpha\beta=0$ ۲) $\beta=-\alpha$ ۳) $\alpha=\beta=1$ ۴) $\beta=\alpha$

u باید همساز باشد یعنی در معادله لاپلاس صدق کند.

$$\rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0 \rightarrow \alpha+\beta=0 \rightarrow \alpha=-\beta \rightarrow \text{گزینه «۲»}$$

(۲) * اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد، v مزدوج همساز u است.

نوع اول سؤال) $u(x,y)=\ldots$ است آنگاه مزدوج همساز u را بدست آورید.

معادل هم اند.

نوع دوم سؤال) اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد و $u(x,y)=\ldots$ باشد، آنگاه v را بدست آورید.

نوع سوم سؤال) اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد و $v(x,y)=\ldots$ باشد، آنگاه u را بدست آورید.

$$dv=\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial x}dx \longrightarrow v=\int\frac{\partial u}{\partial x}dy-\int\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{*}dx$$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \longrightarrow u=\int\frac{\partial v}{\partial y}dy-\int\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{*}dy$$

مثال) اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد، و $u=e^{x}\cos y+2xy$ باشد آنگاه v را بیابید.

$$v=\int\frac{\partial u}{\partial x}dy-\int\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{*}dx=\int\left(e^{x}\cos y+2y\right)dy-\int\left(\cancel{-e^{x}\sin y}+2x\right)dx$$

چون شامل y است

$$=e^{x}\sin y+y^{2}-x^{2}+c$$

فرمول فوق در مختصات قطبی:

$$dv=\frac{\partial v}{\partial \theta}d\theta+\frac{\partial v}{\partial r}dr \longrightarrow v=\int\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)d\theta-\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^{*}dr$$

$$du=\frac{\partial u}{\partial r}dr+\frac{\partial u}{\partial \theta}d\theta \longrightarrow u=\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)dr-\int\left(r\frac{dv}{dr}\right)^{*}d\theta$$

مثال) اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد و $v=r^{2}\cos 2\theta$ آنگاه u را بیابید.

$$u=\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)dr-\int\left(r\frac{dv}{dr}\right)^{*}d\theta$$

$$=\int\left(\frac{1}{r}\left(-2r^{2}\sin 2\theta\right)\right)dr-\int\left(r\,2r\,\cancel{\cos 2\theta}\right)d\theta$$

چون شامل r است.

$$=-r^{2}\sin 2\theta+c$$

مکانیک ۸۲-۲۹: اگر $u=x^2-y^2+2x$ مزدوج همساز و تابع متناظر آن $w=f(z)$ کدام اند؟

۱) $f(z)=2z(z-1)$ و $v=2xy$

۲) $f(z)=2z(z+1)$, $v=xy+2y$

۳) $f(z)=z(z+2)$, $v=2xy-2y$

۴) $f(z)=z^2+2z$, $v=y(2x+2)$

$$v=\int\frac{\partial u}{\partial x}dy-\int\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^*dx=\int(2x+2)dy-\int(\cancel{-2y})dx=2xy+2y\longrightarrow$$ «گزینه ۴»

مکانیک ۷۹-۲۴: اگر $u(x,y)=y^3-3x^2y$ آنگاه مزدوج هارمونیک v کدام یک از گزینه های زیر است؟

۱) $-3xy^2+x^3+c$ ۲) $-3x^2y+x^3+c$ ۳) $-2x^3y^2+x^3+c$ ۴) $-4xy+y^2+c$

$$v=\int\frac{\partial u}{\partial x}dy-\int\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^*dx=\int(-6xy)dy-\int(\cancel{3y^2}-3x^2)dx=-3xy^2+x^3+c$$

مکانیک ۸۰-۲۶: اگر تابع v مزدوج همساز تابع $u=\ln(x^2+y^2)$ باشد، تابع v کدام است؟

۱) $v=\frac{1}{2}ctg^{-1}\frac{x}{y}+c$ ۲) $v=\frac{1}{2}tg^{-1}\frac{x}{y}+c$ ۳) $v=2tg^{-1}\frac{y}{x}+c$ ۴) $v=2\cot g^{-1}\frac{y}{x}+c$

$$v=\int\frac{\partial u}{\partial x}dy-\int\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^*dx=\int\frac{2x}{x^2+y^2}dy-\int\cancel{\frac{2y}{x^2+y^2}}dx=\frac{1}{a}tg^{-1}\frac{u}{a}=2tg^{-1}\frac{y}{x}+c$$

$a=x$
$u=y$

«گزینه ۳»

صفحه ۲۸۰: اگر تابع $f(z)=u+iv$ در $C-\{(0,0)\}$ تحلیلی باشد و $u=\frac{x}{x^2+y^2}$ در $R^2-\{(0,0)\}$ داده شده است. آنگاه $v(x,y)$ کدام است؟

$u=\frac{r\cos\theta}{r^2}=\frac{\cos\theta}{r}$

۱) $v=\frac{y}{x^2+y^2}$ ۲) $v=\frac{xy}{x^2-y^2}$ ۳) $v=\frac{xy}{x^2+y^2}$ ۴) $v=\frac{-y}{x^2+y^2}$

$$v=\int\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)d\theta-\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^*dr=\int\left(r\frac{-\cos\theta}{r^2}\right)d\theta-\int\left(\frac{1}{r}\cancel{\frac{-\sin\theta}{r}}\right)dr=\int\frac{-1}{r}\cos\theta\, d\theta$$

$$=\frac{-\sin\theta}{r}=\frac{-r\sin\theta}{r^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}\longrightarrow$$ «گزینه ۴»

برق ۸۱-۱۰: اگر $u(x,y)=2^x\cos(y\ln 2)$ داده شده باشد، مزدوج همساز و تابع مختلط تحلیلی متناظر، $f(z)$ کدام است؟

۱) $v(x,y)=2^x i\sin(y\ln 2)+\lambda$ و $f(z)=2^x+i\lambda$

۲) $f(z)=2^z\sin(z\ln 2)+i\lambda$ و $v(x,y)=2^x\cos(y\ln 2)+\lambda$

۳) $f(z)=2^z+i\lambda$ و $v(x,y)=2^x\sin(y\ln 2)+\lambda$

۴) $f(z)=2^z\cos(z\ln 2)+u$ و $v(x,y)=2^x\sin(y\ln 2)+\lambda$

گزینه «۱» که غلط است چون u و v حقیقی هستند

$$v=\int\frac{\partial u}{\partial x}dy-\int\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^* dx=\int\left(2^x\ln 2\cos(y\ln 2)\right)dy-0=2^x\sin(y\ln 2)+c$$

$$f(x+iy)\Big|_{\substack{x=z\\y=0}}=f(z)\longrightarrow f(z)=2^z\cos(0\times\ln 2)=2^z$$

گزینه «۳»

مکانیک ۸۷-۶۴: فرض کنید $v(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ و تابع $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحلیلی باشد، در اینصورت تابع $u(x,y)$ کدام است؟

۱) $\tan^{-1}\frac{y}{x}+c$ ۲) $\tan^{-1}\frac{x}{y}+c$ ۳) $2\tan^{-1}\frac{x}{y}+c$ ۴) $2\tan^{-1}\frac{y}{x}+c$

$$u=\int\frac{\partial v}{\partial y}dy-\int\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^* dy=\int\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)dy-\int\left(\cancel{\frac{2x}{x^2+y^2}}\right)dy=2\tan^{-1}\frac{x}{y}+c$$

$\cancel{a}=x$

$\cancel{u}=y^2\to u'=2y$

گزینه «۳»

ابزار دقیق ۸۷-۶۷: مزدوج همساز (هارمونیک) تابع $u(x,y)=ax^3+by^3$ وقتی که a و b اعداد حقیقی ثابتی هستند عبارت است از:

۱) $v(x,y)=-bx^3+ay^3$ ۲) $v=3ax^2+3by^2+3ab(x+y)$ ۳) $v=c$ ۴) $v=2ax^2+4by^2-3ab(x+y)$

$$u_{xx}+u_{yy}=0\longrightarrow \begin{matrix}a=0\\b=0\end{matrix}\longrightarrow$$ گزینه «۳» $v=c$

مکانیک ۸۸ - برق ۸۷ - نانو مواد ۹۰: اگر $v(x,y)$ یک مزدوج همساز تابع $u=(x^2y^2+1)^2-4x^2y^2$ باشد و داشته باشیم $v(0,0)=0$ آنگاه مقدار $v(1,1)$ برابر کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۴

$$v=\int\frac{\partial u}{\partial x}dy-\int\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{*}dx=\int\left(4x(x^2+y^2+1)-8xy^2\right)dy-0$$

$$=4x^3y-\frac{4}{3}xy^3+4xy-\frac{8}{3}xy^3+c\xrightarrow[\substack{x=0\\y=0\\v=0}]{v(0,0)=0}0=c$$

$$\xrightarrow[\substack{x=1\\y=1}]{v(1,1)}v(1,1)=4-\frac{4}{3}+4-\frac{8}{3}+0=4\longrightarrow$$ گزینه «۴»

برق ۹۰ - برق ۸۷ - کامپیوتر ۸۲ - هوافضا ۸۴: ۱ ← تابع تحلیلی $W=u(x,y)+iv(x,y)$ را بدست آورید وقتی $U(x,y)=x^3-3xy^2$ و $W(0)=0$.

۱) $W(z)=(x^3-3xy^2)+i(x^3-3x^2y)$

۲) $W(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$

۳) $W(z)=(x^3-3xy^2)+i(x^3-3xy^2)$

۴) هیچکدام

$$v=\int\frac{\partial u}{\partial x}dy-\int\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{*}dx=\int(3x^2-3y^2)dy-\int(-6\cancel{x}y)\,dx=3x^2y-y^3+c$$

v در گزینه ۲ برابر این است.

کامپیوتر ۹۰: $u(r,\theta)=\ln r+r\cos\theta$ در مختصات قطبی داده شده است. تابع مزدوج همساز آن یعنی $v(r,\theta)$ کدام است؟

$$v=\int\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)d\theta-\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^{*}dr=\int r\left(\frac{1}{r}+\cos\theta\right)d\theta-\int\left(\frac{-1}{r}\cancel{r\sin\theta}\right)^{*}dr$$

$$=\theta+r\sin\theta+c\rightarrow$$ گزینه «۳»

راه حل دوم برای بدست آوردن $f(z)$: اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد و $u(x,y)$ و $v(x,y)$ داده شده باشند و بخواهیم $f(z)$ را بدست آوریم، باید ابتدا $f'(z)$ را بدست آورده و سپس با انتگرال گیری از آن $f(z)$ را بدست آوریم.

مکانیک ۷۶-۲۲: اگر $u = 2x(3-y)$ تابع همساز و v تابع مزدوج آن باشد. $f(z)=u+iv$ برحسب z کدام است؟

۱) $f(z)=z^2+6iz$ ۲) $f(z)=iz^2+6z$ ۳) $f(z)=z^2-6iz$ ۴) $f(z)=iz^2-6z$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=2(3-y)-i(-2x)\Big|_{\substack{x=z\\y=0}}=6+2iz \xrightarrow{\int} f(z)=6z+iz^2 \longrightarrow$$ گزینه «۲»

اما روش بهتر: $v=\int 2(3-y)\,dy-\int(-2x)\,dx=6y-y^2+x^2 \longrightarrow f(z)=6z+iz^2$

جمع بندی:

۱) اگر تابع $f(z)$ در یک ناحیه باز مشتق پذیر باشد، تحلیلی نیز هست.

۲) توابع $\sin z$، $\cos z$، e^z، $sh z$ و $ch z$ و چند جمله ای، در کل صفحه مختلط تحلیلی هستند (تام هستند).

$a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_0$

۳) جمع، تفریق، ضرب و ترکیب هر چند تابع تحلیلی، یک تابع تحلیلی است.

$$f(z)=z^4e^{\cos(z^2+1)}+\sin^4(z^5+1)\cos\theta$$

۴) اگر $f(z)$ و $g(z)$ تحلیلی باشند، آنگاه تابع $\frac{f(z)}{g(z)}$ فقط در ریشه‌های مخرج ($g(z)=0$) تحلیلی نیست (ساده نکن).

مثال) $w=\dfrac{z^3(1-\cos z)}{z^2\sin z} \rightarrow z=2k\pi$ و $z=0$

مثال) $w=\dfrac{z}{z} \longrightarrow$ تحلیلی نیست $z=0$.

مثال) $w=\dfrac{1}{z^2-1} \longrightarrow$ تحلیلی نیست $z=\pm 1$

۵) اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد، آنگاه $\overline{f(z)}$ حتماً غیرتحلیلی است جز آنکه $f(z)$ مقدار ثابت باشد.

مثال) $w=\bar{z}$ ⟵ چون خود z تحلیلی است، پس حتماً $\bar{z}$ غیرتحلیلی است. چون z در کل صفحه مختلط تحلیلی است، پس حتماً $\bar{z}$ نیز در کل صفحه مختلط غیرتحلیلی است.

مثال) $w=\overline{\sin z}$ ⟵ چون خود $\sin z$ تحلیلی است، پس حتماً $\overline{\sin z}$ غیرتحلیلی است و چون $\sin z$ در کل صفحه مختلط تحلیلی است، پس حتماً $\overline{\sin z}$ نیز در کل صفحه مختلط غیرتحلیلی است.

۶) اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد، آنگاه $g(z)=v+iu$ غیرتحلیلی است جز آنکه u و v ثابت باشند.

$$g(z)=i(u-iv)=i\,\overline{f(z)}$$

اگر v همساز مزدوج u باشد، آنگاه u نمی‌تواند مزدوج همساز v باشد جز آنکه u و v ثابت باشند.

۷) اگر $f(z)$ حقیقی خالص یا موهومی خالص باشد، حتماً $f(z)$ غیرتحلیلی است جز آنکه ثابت باشد.

مثال) $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$ ⟵ غیرتحلیلی است

مثال) $f(z)=2ixy$ ⟵ غیرتحلیلی است

۸) تابع $f(z)$ هیچگاه نمی‌تواند فقط در نقاط روی یک منحنی یا در تعداد نقاط مجزا تحلیلی باشد.

پس از بررسی شرط اول کوشی ریمان $\left(\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\right)$ اگر به یک معادله رسیدیم تابع در کل صفحه مختلط غیرتحلیلی است.

مکانیک ۸۰-۲۵: اگر R تمام صفحه، $z=x+iy$ و $f(z)=y^2-x^2+i(x^2+y^2)$ باشد، در این صورت:

۱) $f(z)$ در R تحلیلی نیست.　　　۳) $f'(z)$ در امتداد خطوط $y=\pm x$ موجود است.

۲) $f'(z)$ در R موجود است.　　　۴) $f'(z)$ در R موجود و $f(z)$ در R تحلیلی است.

گزینه «۱»

مواد ۸۰ و ۸۱-۳۷: کدام تابع در ناحیه محصور توسط دایره $\gamma: |z|=1$ تحلیلی است؟

۱) $f(z)=x+y+ixy$　　۲) $f(z)=x^2-y^2+i2xy$　　۳) $f(z)=xy+i(x+y)$　　۴) $f(z)=2xy+i(x^2-y^2)$

گزینه «۴»

برق ۸۴-۱۳: تعیین کنید تابع $f(z)=x^2-y^2+i2|xy|$ در کجا ~~تحلیق~~ تحلیلی است؟

۱) فقط در ربع اول　　۲) در تمام صفحه　　۳) در ربع اول و سوم　　۴) در هیچ جا تحلیلی نیست.

قدر مطلق را باید حذف کنیم

$$\begin{cases} xy>0 \longrightarrow x^2-y^2+i2xy=z^2 \\ xy<0 \longrightarrow x^2-y^2-i2xy \end{cases}$$

→ در ربع اول و سوم تحلیلی است. گزینه «۳»