فصل چهارم

جریان های الکتریکی ماندگار (مستقیم) در محیط های هادی
Steady Electric current

ملاحظه گردید که میدان الکتریکی ساکن یک میدان پایستار است یعنی:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\oint \vec{E}.d\vec{l} = 0$$

(و نیز رابطه $\int \vec{E}.d\vec{l}$ که اختلاف پتانسیل را محاسبه می کند مستقل از مسیر است و متناسب با انرژی و کار لازم در میدان) اما $\nabla \times \vec{E} = 0$ نشان دهنده آنست که در یک مسیر بسته هیچگونه تبادل انرژی صورت نمی گیرد. بنابراین میدان الکتریسیته ساکن قادر به ایجاد جریان دائم نخواهد بود که در آن در اثر عبور بار در هادی تلفات ایجاد شود پس برای داشتن جریان دائم به میدان غیر کنسرواتیو (ناپایستار) است. جریان دائم همیشه با تلفات انرژی همراه است.

نکته و یادآوری: میدان الکتریکی در داخل اجسام هادی صفر است و این به خاطر آنست که بارهای الکتریکی روی سطح آنها بنحوی جمع می شوند که میدان را صفر می گردانند.

چگالی جریان الکتریکی

اگر N چگالی الکترون های آزاد یا تعداد الکترون های آزاد در هر متر مکعب در یک نقطه از جسم هادی باشند و هر بار منفرد Q کولمب با سرعت متوسط $\vec{V}\, {}^{m}\!/_{s}$ در حرکت باشد، $\vec{J}$ چگالی جریان در آن نقطه بقرار زیر بدست می آید:

$$\vec{J} = NQ\vec{V}$$

با توجه به آنکه واحد N برابر ($\frac{\text{تعداد حامل}}{m^3}$) و واحد Q برابر ($\frac{\text{کولمب(c)}}{\text{حامل}}$)و واحد سرعت برابر $\frac{m}{\sec}$ بنابراین واحد $\vec{J}$:

$$\frac{c/\sec}{m^2} = Amp/m^2$$

یعنی $\vec{J}$ مقدار بار الکتریکی است که از یک سطح یک متر مربعی که عمود بر بردار $\vec{V}$ است در مدت یک ثانیه می گذرد. اگر Q<۰ باشد $\vec{J}$ با $\vec{V}$ در خلاف هم و اگر Q>۰ باشد این دو هم جهت هستند.

جریان کل:

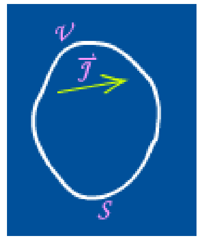
$$I = \int_S \vec{J}.d\vec{s}$$

واحد I آمپر است و برابر با کل بار الکتریکی است که در مدت یک ثانیه از سطح مورد نظر می گذرد و یک کمیت اسکالر است.

اصل بقاء بار الکتریکی

بارهای الکتریکی را نمی توان ایجاد کرد و یا از بین برد.

شکل ریاضی این اصل:



در خصوص یک سطح بسته S (دارای حجم V) در یک هادی

کل جریان وارد سطح بسته s می شود $= -\oint_s \vec{J}.d\vec{s}$

اگر این انتگرال مثبت باشد میزان بار در داخل سطح در حال افزایش است و برعکس.

یعنی رابطه فوق سرعت تغییرات بار یعنی $\frac{\partial Q}{\partial t}$ را نشان می دهد.

(شکل انتگرالی اصل بقاء و بار)
$$-\oint \vec{J}.d\vec{s} = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$-\oint_s \vec{J}.d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t}\int_v \rho dv'$$

$$-\int_V \nabla.\vec{J} dv' = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dv' \quad \Rightarrow \quad \int_v \left(\nabla.\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dv' = 0$$

(شکل دیفرانسیلی اصل بقاء بار)
$$\nabla.\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

(دیورژانس $\vec{J}$ نشان دهنده شروع و یا ختم بردار $\vec{J}$ است)
$$\nabla.\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

اگر جریانهای یکنواخت بدون تغییرات زمانی وجود داشته باشد: $\nabla.\vec{J} = 0$

یعنی خطوط جریانهای مستقیم خطوط بسته ای هستند که نقطه شروع و نقطه ختم خاصی ندارند.

اگر رابطه فوق برای یک نقطه اعمال شود قانون جریان کریشف را نتیجه می دهد: $\sum_i I_i = 0$

قانون اهم و میدان الکتریکی غیر کنسرواتیو (ناپایستار)

در فرآیند جریان الکتریکی دائم (مستقیم) که با تلفات حرارتی همراه است، هر الکترون (بار) که در این جریان شرکت می کند، به ازاء هر بار که مدار کامل (مسیر بسته) را طی می کند مقدار معینی انرژی دریافت می کند.

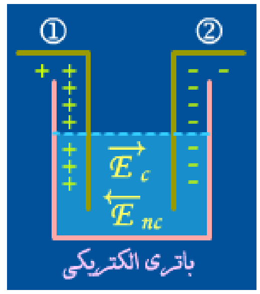
میدانهای پایستار به تنهائی قادر به ایجاد جریان دائم نیستند وبرای این منظور نیازمند به میدان خاصی است مانند پیل الکتریکی، که در آن هم میدان پایستار و هم ناپایستار تولید می شود.

فعل و انفعال شیمیایی $\Leftarrow$ میدان ناپایستار (در خارج پیل یا در داخل مدار) $\vec{E}_{nc}$

تجمع بارهای الکتریکی $\Leftarrow$ میدان پایستار $\vec{E}_c$

اگر مدار باز باشد، در داخل پیل $E_{nc} = E_c$ (اما در خلاف جهت یکدیگر) چون هیچ جریان از بارها وجود ندارد و نیروئی به آن وارد نمی شود (تعادل)

$$\vec{E}_{nc} + \vec{E}_c = 0$$



$\vec{E}_{nc}$ باعث حرکت (تجمع) بار مثبت روی الکترود (۱) و تجمع بار منفی روی الکترود (۲) می گردد $\vec{E}_c$ ناشی از میدان الکتریکی از طرف بار مثبت به سمت بار منفی است.

بنابراین

(نیروی محرکه الکتریکی)

$$V = -\int_2^1 \vec{E}_c . d\vec{l} = \int_2^1 \vec{E}_{nc} . d\vec{l} = electromotiveForce \equiv emf$$

در داخل منبع

با واحد ولت

اما از طرفی در مدار بسته

$$\oint \vec{E}_c . d\vec{l} = 0$$

$$\int_1^2 \vec{E}_c . d\vec{l} + \int_2^1 \vec{E}_c . d\vec{l} = 0$$

خارج منبع داخل منبع

$$\int_1^2 \vec{E}_c . d\vec{l} - \int_2^1 \vec{E}_{nc} . d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_1^2 \vec{E}_c . \vec{d}l - V = 0$$

خارج از منبع

$$\mathrm{V} = \mathrm{emf} = \int_1^2 \vec{E}_c . d\vec{e} = V_1 - V_2$$

- قانون اهم یک قانون تجربی است:

$$\vec{J} = \delta \vec{E}$$

($\vec{J}$ با $\vec{E}$ در هر محیط هادی متناسب است)

بطریقی که:

$$\vec{J} = NQ\vec{V}$$

$$\vec{V} = \mu \vec{E}$$

μ ضریب تحرک (mobility)

$$\vec{J} = NQ\mu \vec{E}$$

σ ضریب هدایت محیط (هدایت ویژه) conductivity

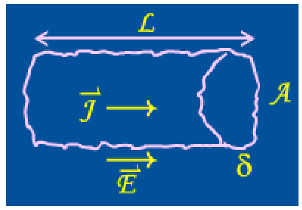
$$\vec{J} = \rho\mu\vec{E} \quad , \quad \sigma = \rho\mu$$

ρ چگالی بار

$$\sigma = NQ\mu \quad , \quad \sigma = \frac{1}{\rho}$$

ρ مقاومت ویژه

- شکل دیگر قانون اهم:



$$I = \int_s \vec{J}.d\vec{s} = \sigma EA$$

$$V = \int \vec{E}.d\vec{l} = EL \quad \Rightarrow \quad E = \frac{V}{L}$$

$$I = \sigma \frac{V}{L} A \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V}{L/\sigma A} = \frac{V}{R} \qquad V = RI \qquad R = \frac{L}{\sigma A}$$

- محاسبه مقاومت الکتریکی (Resistance)

همانگونه که ملاحظه شد، نسبت اختلاف پتانسیل بین دو سطح از قطعه هادی به جریان عبور کرده از آن سطوح را مقاومت گویند، بنابراین:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_L \vec{E}.d\vec{l}}{\oint_s \vec{J}.d\vec{s}} = \frac{-\int_L \vec{E}.d\vec{l}}{\oint \sigma \vec{E}.d\vec{s}}$$

اما از طرفی

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_s \vec{D}.d\vec{s}}{-\int_L \vec{E}.d\vec{l}} = \frac{\oint_s \varepsilon \vec{E}.d\vec{s}}{-\int \vec{E}_L.d\vec{l}}$$

چنانچه طرفین دو رابطه فوق در هم ضرب شود: $RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}$

[در صورتیکه ε,σ مستقل از مختصات باشند (محیط همگن) و یا وابستگی به مختصات برای دو یکسان باشد، چه در غیر اینصورت رابطه فوق قابل اعمال نیست.]

بنابراین روشهای محاسبه مقاومت الکتریکی:

با یافتن $\vec{E}$ در محیط:

$$1) R = \frac{-\int \vec{E}.d\vec{l}}{\oint \sigma \vec{E}.d\vec{s}}$$

با وجود شرط ذکر شده در بالا:

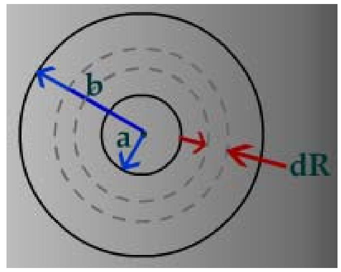
$$2) R = \frac{\varepsilon}{\sigma C} \quad , \quad G = \frac{\sigma C}{\varepsilon} = \frac{1}{R}$$

با تکیه بر ساختار دیفرانسیلی مقاومت و یا کنداکتاس (هدایت الکتریکی)

$$3) dR = \frac{dl}{\sigma s} \quad \Rightarrow \quad R = \int dR = \int \frac{dl}{\sigma s}$$

$$dG = \frac{\sigma ds}{\ell} \quad \Rightarrow \quad G = \int dG = \int \frac{\sigma ds}{\ell}$$

مثال: مطلوبست محاسبه مقاومت بین دو کره متحدالمرکز بشعاع های a و b (b>a) که فضای بین دو کره از جسمی با ضریب هدایت σ پر شده است.



در مختصات کروی مقاومت یک پوسته کروی به شعاع R از جنس δ و با سطح S و بضخامت dR

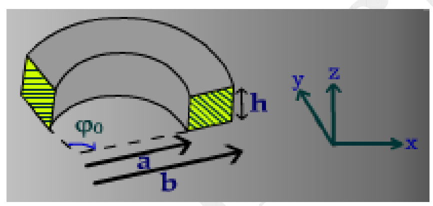
$$d\mathbf{R}=\frac{dl}{\sigma s}$$

$$dl=dR$$

$$S=4\pi R^2$$

$$d\mathbf{R}=\frac{dR}{\sigma 4\pi R^2} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{R}=\int d\,\mathbf{R}\int_a^b \frac{dR}{4\pi\sigma R^2}=\frac{-1}{4\pi\sigma R}\Bigg]_z^b=\frac{b-a}{4\pi\sigma ab}$$

مثال: مطلوبست محاسبه مقاومت قسمتی از یک واشر (استوانه ای به ارتفاع (h مطابق شکل که از هادی با ضریب هدایت σ ساخته شده است (منظور مقاومت بین دو سطح هاشور خورده است)



چنانچه بین دو سطح مذکور اختلاف پتانسیل V_0 متصل گردد:

$$\nabla^2 V=0$$

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2}=0$$

$$V=c_1\varphi+c_2$$

$$\begin{cases} V(\varphi=0)=0 & \Rightarrow \quad c_2=0 \\ V(\varphi=\varphi_0)=V_0 & \Rightarrow \quad c_1=\dfrac{V_0}{\varphi_0} \end{cases}$$

بنابراین:

$$V=\frac{V_0}{\varphi_0}\varphi$$

$$\vec{E}=-\nabla V=-\frac{1}{r}\frac{dV}{d\varphi}\hat{a}_\varphi=-\hat{a}_\varphi\frac{V_0}{\varphi_0 r}$$

$$\vec{J}=\sigma\vec{E}=-\frac{\sigma V_0}{\varphi_0 r}\hat{a}_\varphi$$

$$I=\int \vec{J}.d\bar{s}=\int_0^h\int_a^b\left(-\hat{a}_\varphi\frac{\sigma V_0}{\varphi_0 r}\right).\left(-\hat{a}_\varphi\right)drdz \qquad d\bar{s}=-\bar{a}_\varphi drdz$$

$$I=+\frac{\sigma V_0 h}{\varphi_0}\ln\frac{b}{a}$$

$$R=\frac{V_0}{I}=\frac{\varphi_0}{\sigma h\ln\frac{b}{a}}$$

قانون ژول

می دانیم که جریان الکتریکی دائم، با تلفات همراه است. در این قسمت هدف محاسبه تلفات یک محیط هادی با جریان دائم است.

$$P=\frac{\Delta w}{\Delta t}=\frac{F\Delta l}{\Delta t}=QEV \quad , \quad \frac{\Delta \ell}{\Delta t}=V \quad , \quad F=QE$$

و چون $J=NQV$ کل در واحد حجم $p=NQEV=EJ$

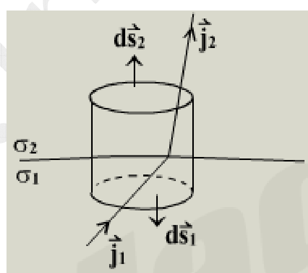
چگالی توان (توان در واحد حجم) $p=\vec{E}.\vec{J} \qquad w/m^3$

در یک قطعه $dv=dsdl$

$$P_{کل}=\int pdv=\int \vec{E}.\vec{J}dv$$

$$p=\int EJdv=\int Edl\int Jds=VI \quad \Rightarrow \quad P=VI$$

شرایط مرزی برای بردار چگالی بریان



چنانچه سطح بین دو محیط هادی را در نظر بگیریم با فرض جریان یکنواخت و بدون تغییرات زمانی، سطح گاوسی استوانه ای مطابق شکل با ارتفاع h و سطح مقطع Δsرا در نظر بگیرید.

$$\nabla.\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

$$\Rightarrow \quad \int_v \nabla.\vec{J}dv'=0 \qquad h\to 0$$

$$\oint_s \vec{J}.d\bar{s}=0 \quad \Rightarrow \quad \underset{پائین}{\int \vec{J}_1.d\bar{s}_1}+\underset{بالا}{\int \vec{J}_2.d\bar{s}_2}+\underset{جانبی}{\int \vec{J}.d\bar{s}}=0$$

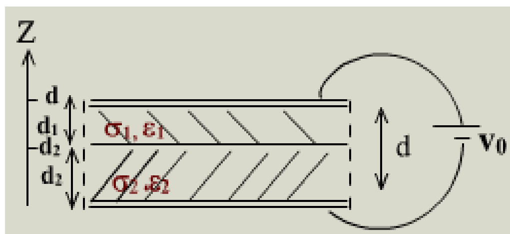
$$-\Delta sJ_{1n}+\Delta sJ_{2n}+0=0 \quad \Rightarrow \quad J_{1n}=J_{2n}$$

از طرفی

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{J_{1t}}{\sigma_1} = \frac{J_{2t}}{\sigma_2}$$

بنابراین خطوط $\vec{J}$ از یک محیط رساناتر به محیط با رسانائی کمتر $(\sigma_2 < \sigma_1)$ وارد می شوند می شکند و به خط عمود بر سطح مشترک نزدیکتر می گردد.

مثال: فضای بین صفحات موازی خازنی با دو نوع هادی که دارای σ_1, ε_1 و نیز σ_2, ε_2 می باشد پرشده است چنانچه فاصله دو فلز خازن d و ولتاژ منبع متصل به خازن V_0 باشد مطلوبست تعیین $\vec{P}, \vec{D}, \vec{E}, \vec{J}$ و چگالی بارهای آزاد و مقید روی تمام سطوح در حالت ماندگار
d=d۱+d۲



Steady state $\Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla . \vec{J} = 0$

(در حالت عایق تلفی مبنا و شروع محاسبات از بردار $\vec{J}$ می باشد)

$$J_{1n} = J_{2n} = J \quad , \quad E_1 = \frac{J}{\delta_1} \quad , \quad E_2 = \frac{J}{\delta_2}$$

$$V = -\int \vec{E}.dl = -\int_0^d \vec{E}.dz\hat{a}_z = -\int_0^{d_2} \left(-E_2\hat{a}_z\right).\left(\hat{a}_z dz\right) - \int_{d_2}^{d} \left(-E_1\hat{a}_z\right).\left(\hat{a}_z dz\right)$$

$$V_0 = \frac{J}{\sigma_2} d_2 + \frac{J}{\sigma_2} d_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = \frac{V_0 \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} \left(-\hat{a}_z\right)$$

$$\vec{E}_1 = \vec{J} / \sigma_1 = \frac{V_0 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} \left(-\hat{a}_z\right)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{J} / \sigma_2 = \frac{V_0 \sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_2} \left(-\hat{a}_z\right)$$

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \frac{V_0 \varepsilon_1 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} \quad , \quad D_2 = \varepsilon_2 E_2 = \frac{V_0 \varepsilon_2 \sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

$$\vec{P}_1 = \vec{D}_1 - \varepsilon_0 \vec{E}_1 = \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_0\right) \vec{E}_1 = \frac{V_0 \sigma_2 \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_0\right)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} \left(-\hat{a}_z\right)$$

$$\vec{P}_2 = \vec{D}_2 - \varepsilon_0 \vec{E}_2 = \left(\varepsilon_2 - \varepsilon_0\right) \vec{E}_2 = \frac{V_0 \sigma_1 \left(\varepsilon_2 - \varepsilon_0\right)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_1 d_2} \left(-\hat{a}_z\right)$$

$$\rho_s\left(z = 0\right) = \vec{D}_2 . \hat{n} = -\frac{V_0 \varepsilon_2 \sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

روی هادی پائین $\hat{n}\Big|_{z=0} = \hat{a}_z$

$$\rho\left(z = d_2\right) = D_2 - D_1 = \frac{V_0 \left(\varepsilon_2 \sigma_1 - \varepsilon_1 \sigma_2\right)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

روی هادی بالا $\hat{n}\Big|_{z=d} = -\hat{a}_z$

$$\rho_s(z=d) = \vec{D}_1.\hat{n} = \frac{V_0\varepsilon_1\sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

$$\rho_{ps}(z=0) = \vec{P}_1.\hat{n} = \vec{P}_2.(-\hat{a}_z) = \frac{V_0\sigma_1(\varepsilon_2\varepsilon_0)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_1 d_2}$$

$$\rho_{ps}(z=d_2) = \vec{P}_1 - \vec{P}_2 = V_0\frac{\sigma_2(\varepsilon_1-\varepsilon_0) - V_0(\varepsilon_2-\varepsilon_0)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_1 d_2}$$

$$\rho_{ps}(z=d) = \vec{P}_1.\vec{n} = \vec{P}_1.\hat{a}_z = -\frac{V_0\sigma_2(\varepsilon_1\varepsilon_0)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_1 d_2}$$

نکته: برای بررسی حالات گذرا (transient) در خصوص رفتار زمانی توزیع بار (ρ) قبل از رسیدن به حالت ماندگار $(t \to \infty)$ بقرار زیر عمل می شود.

(در صورت همگن بودن محیط یا ثبات δ, ε)

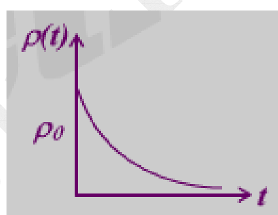
$$\nabla.\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \quad , \quad \nabla.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla.(\sigma\vec{E}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\sigma\nabla.\vec{E} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\sigma\frac{\rho}{\varepsilon} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(t) = \rho_0 e^{-t/\tau}$$



$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \mathrm{Re}\,laxationTime \quad \Rightarrow \quad \rho(t=\tau) = \frac{1}{e}\rho_0$$

$$\rho_0 = \rho(t=0)$$

$\frac{\varepsilon}{\delta}$ معیاری برای تشخیص هادی خوب و یا عایق خوب است.

$$if \quad \frac{\varepsilon}{\sigma} >> 1 \quad \Rightarrow \quad goodDielectric$$

$$if \quad \frac{\varepsilon}{\sigma} << 1 \quad \Rightarrow \quad goodConductur$$

(در حالت میدان های متغیر با زمان، این معیار بصورت $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ در نظر گرفته می شود)